

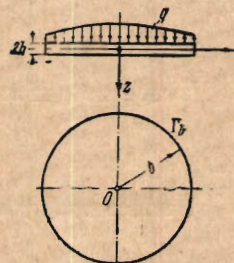
УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ КРУГОВОЙ И КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНОК

В. В. СОКОЛОВСКИЙ

(Москва)

Настоящая статья посвящена рассмотрению изгиба круговой и кольцевой пластинок под действием распределенной осесимметричной нагрузки. Метод¹ решения этой задачи аналогичен примененному в работе автора [1].

1. Основные соотношения. При рассмотрении круговой (или кольцевой) пластинки удобно пользоваться цилиндрическими координатами r , θ и z . Пусть $z=0$ является средней плоскостью пластинки, а граничными плоскостями служат плоскости $z = \pm h$. Толщина пластинки равна $2h$ (фиг. 1). Средняя плоскость круговой пластинки ограничена окружностью Γ_b , а кольцевой пластинки двумя concentрическими окружностями Γ_a и Γ_b с центрами в точке O . Радиусы этих окружностей будем обозначать через a и b .



Фиг. 1

Далее предполагается, что пластинка находится под действием осесимметричной распределенной нагрузки $q = q(r)$.

Как частный случай будет рассмотрена нагрузка, равномерно распределенная по кругу радиуса d ($d \leq b$) с центром в точке O

$$q = \text{const} \quad (0 \leq r < d), \quad q = 0 \quad (d < r \leq b)$$

Окружность радиуса d будем обозначать через Γ_d .

Если $d = b$, то равномерная нагрузка $q = \text{const}$ распределена по всей пластинке ($0 \leq r \leq b$); если принять $\pi d^2 q = Q$ и допустить, что при постоянном значении Q радиус d становится равным нулю, то указанная нагрузка приводится к сосредоточенной силе Q в точке O .

Вследствие осевой симметрии задачи напряженное состояние пластинки характеризуется компонентами напряжения σ_r и σ_θ . Компонента напряжения $\sigma_z = 0$.

¹ Применяемый метод исследования может быть перенесен также на задачи об изгибе осесимметрично-нагруженной круговой цилиндрической оболочки.

Для удобства будем пользоваться безразмерными величинами

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{r}{b}, & \alpha &= \frac{a}{b}, & \gamma &= \frac{c}{b}, & \delta &= \frac{d}{b}, & \zeta &= \frac{z}{h} \\ \bar{\sigma}_r &= \frac{\sigma_r}{k}, & \bar{\sigma}_\theta &= \frac{\sigma_\theta}{k}, & \bar{\varepsilon}_r &= \frac{G}{k} \varepsilon_r, & \bar{\varepsilon}_\theta &= \frac{G}{k} \varepsilon_\theta, & \bar{\omega} &= \frac{Gh}{kb^2} \omega \\ \bar{M}_r &= \frac{M_r}{kh^2}, & \bar{M}_\theta &= \frac{M_\theta}{kh^2}, & \bar{N}_r &= \frac{N_r b}{kh^2}, & P &= \frac{qb^2}{kh^2}, & P &= \frac{Q}{kh^2} \end{aligned}$$

Здесь через k обозначена величина $\sigma_s/\sqrt{3}$, где σ_s — предел текучести при простом растяжении.

Условимся эти безразмерные величины называть так же, как называются соответствующие им величины, имеющие размерность.

При упругом состоянии материала применяются соотношения Гука, которые приводят к известным формулам

$$\bar{\sigma}_r = \frac{2}{1-\nu} (\bar{\varepsilon}_r + \nu \bar{\varepsilon}_\theta), \quad \bar{\sigma}_\theta = \frac{2}{1-\nu} (\bar{\varepsilon}_\theta + \nu \bar{\varepsilon}_r) \quad (1.1)$$

При пластическом состоянии материала принимаются соотношения

$$\frac{\bar{\varepsilon}_r - \bar{\varepsilon}_\theta}{\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta} = \frac{\bar{\varepsilon}_\theta - \bar{\varepsilon}_z}{\bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_z} = \frac{\bar{\varepsilon}_r - \bar{\varepsilon}_z}{\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_z}$$

где

$$3\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_r + \bar{\varepsilon}_\theta + \bar{\varepsilon}_z, \quad 3\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_r + \bar{\sigma}_\theta + \bar{\sigma}_z$$

Далее вводится допущение о несжимаемости пластического материала

$$\bar{\varepsilon}_r + \bar{\varepsilon}_\theta + \bar{\varepsilon}_z = 0$$

Написанные соотношения при $\bar{\sigma}_z = 0$ приводят к уравнениям

$$\frac{2\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta}{\bar{\varepsilon}_r} = \frac{2\bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_r}{\bar{\varepsilon}_\theta}, \quad \bar{\varepsilon}_z = -(\bar{\varepsilon}_r + \bar{\varepsilon}_\theta)$$

Выражения интенсивности напряжения сдвига \bar{T} и интенсивности деформации сдвига \bar{E} напишутся в виде

$$\bar{T} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \sqrt{\bar{\sigma}_r^2 + \bar{\sigma}_\theta^2 - \bar{\sigma}_r \bar{\sigma}_\theta} \right|, \quad \bar{E} = 2 \left| \sqrt{\bar{\varepsilon}_r^2 + \bar{\varepsilon}_\theta^2 + \bar{\varepsilon}_r \bar{\varepsilon}_\theta} \right|$$

В качестве условия идеальной пластичности принимается условие Мизеса

$$\bar{T} = 1$$

Из написанных соотношений имеем

$$\bar{\sigma}_r = 2 \frac{2\bar{\varepsilon}_r + \bar{\varepsilon}_\theta}{E}, \quad \bar{\sigma}_\theta = 2 \frac{2\bar{\varepsilon}_\theta + \bar{\varepsilon}_r}{E} \quad (1.2)$$

В качестве условия пластичности с упрочнением принимается условие

$$\bar{T} = n(1 + \lambda \bar{E}^\mu) \quad \text{где } n = 1/(1 + \lambda)$$

Здесь λ, μ — постоянные, зависящие от материала $\mu \geq 0$. При $\lambda = 0, n = 1$ условие пластичности с упрочнением переходит в условие идеальной пластичности Мизеса.

При наличии упрочнения материала вместо формул (1.2) имеем

$$\bar{\sigma}_r = 2n(1 + \lambda \bar{E}^\mu) \frac{2\bar{\varepsilon}_r + \bar{\varepsilon}_\theta}{\bar{E}}, \quad \bar{\sigma}_\theta = 2n(1 + \lambda \bar{E}^\mu) \frac{2\bar{\varepsilon}_\theta + \bar{\varepsilon}_r}{\bar{E}} \quad (1.2')$$

Предлагаемая теория применима как при идеальной пластичности по Мизесу, так и при пластичности с упрочнением.

В дальнейшем приводятся как формулы для случая идеальной пластичности, так и формулы (номера этих формул отмечены штрихами) для случая пластичности с упрочнением.

Далее, принимается известная гипотеза о том, что волокна, прямолинейные и перпендикулярные средней плоскости пластинки в не напряженном состоянии, остаются и после изгиба прямолинейными и перпендикулярными к средней поверхности.

Эта гипотеза дает возможность представить компоненты деформации в виде

$$\bar{\varepsilon}_r = -\zeta \frac{d^2 \bar{w}}{d\rho^2}, \quad \bar{\varepsilon}_\theta = -\frac{\zeta}{\rho} \frac{d\bar{w}}{d\rho}$$

Буквами e и p мы будем отмечать компоненты напряжения и смещения соответственно в упругой и пластической областях.

Компоненты напряжения имеют вид

$$\bar{\sigma}_r^e = -\frac{2\zeta}{1-\nu} \left(\frac{d^2 \bar{w}}{d\rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \frac{d\bar{w}}{d\rho} \right), \quad \bar{\sigma}_\theta^e = -\frac{2\zeta}{1-\nu} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\bar{w}}{d\rho} + \nu \frac{d^2 \bar{w}}{d\rho^2} \right) \quad (1.3)$$

Для идеальной пластичности

$$\bar{\sigma}_r^p = -x \frac{1}{\bar{W}} \left(2 \frac{d^2 \bar{w}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\bar{w}}{d\rho} \right), \quad \bar{\sigma}_\theta^p = -x \frac{1}{\bar{W}} \left(\frac{2}{\rho} \frac{d\bar{w}}{d\rho} + \frac{d^2 \bar{w}}{d\rho^2} \right) \quad (1.4)$$

где

$$\bar{W} = \left| \sqrt{\left(\frac{d^2 \bar{w}}{d\rho^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\bar{w}}{d\rho} \right)^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\bar{w}}{d\rho} \frac{d^2 \bar{w}}{d\rho^2} \right|, \quad x = \text{sign } \zeta$$

Функция $\text{sign } \zeta$ определена равенствами $\text{sign } \zeta = +1$ при $\zeta > 0$ и $\text{sign } \zeta = -1$ при $\zeta < 0$.

Заметим, что компоненты пластического напряжения не зависят от координаты ζ .

Для пластичности с упрочнением

$$\bar{\sigma}_r^p = -\frac{xn}{\bar{W}} \left(1 + \lambda (2\bar{W})^\mu |\zeta|^\mu \right) \left(2 \frac{d^2 \bar{w}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\bar{w}}{d\rho} \right) \quad (1.4')$$

$$\bar{\sigma}_\theta^p = -\frac{xn}{\bar{W}} \left(1 + \lambda (2\bar{W})^\mu |\zeta|^\mu \right) \left(\frac{2}{\rho} \frac{d\bar{w}}{d\rho} + \frac{d^2 \bar{w}}{d\rho^2} \right)$$

В отличие от компонентов пластического напряжения, определяемых формулами (1.4), компоненты напряжения, даваемые формулами (1.4'), зависят от ζ .

Уравнение равновесия круговой (или кольцевой) симметрично нагруженной пластинки имеет вид

$$\frac{d\bar{M}_r}{d\rho} + \frac{\bar{M}_r - \bar{M}_\theta}{\rho} = \bar{N}_r \quad (1.5)$$

причем

$$\bar{N}_r = -\frac{1}{\rho} \int_0^{\rho} p \rho d\rho \quad (1.6)$$

Для кольцевой пластинки, у которой внутренний край ни на что не опирается,

$$\bar{N}_r = -\frac{1}{\rho} \int_a^{\rho} p \rho d\rho$$

В случае нагрузки, равномерно распределенной по кругу Γ_a радиуса d ,

$$p = \text{const} \quad (0 \leq \rho < \delta), \quad p = 0 \quad (\delta < \rho \leq 1)$$

формула (1.6) будет

$$\bar{N}_r = -\frac{p\rho}{2} \quad (0 \leq \rho \leq \delta) \quad (1.7)$$

$$\bar{N}_r = -\frac{p\delta^2}{2\rho} \quad (\delta \leq \rho \leq 1) \quad (1.8)$$

Далее, будем различать три вида напряженных состояний.

2. Чисто упругое напряженное состояние. Чисто упругим называется напряженное состояние, при котором

$$\bar{T} < 1 \quad \text{при} \quad 0 \leq |\zeta| \leq 1 \quad (2.1)$$

Компоненты момента, отнесенного ко всей толщине пластинки, вычисляются по формулам

$$\bar{M}_r^e = 2 \int_0^1 \bar{\sigma}_r^e \zeta d\zeta, \quad \bar{M}_\theta^e = 2 \int_0^1 \bar{\sigma}_\theta^e \zeta d\zeta \quad (2.2)$$

или в силу (1.3)

$$\bar{M}_r^e = -\frac{4}{3(1-\nu)} \left(\frac{d^2 \bar{w}}{d\rho^2} + \nu \frac{d\bar{w}}{d\rho} \right), \quad \bar{M}_\theta^e = -\frac{4}{3(1-\nu)} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\bar{w}}{d\rho} + \nu \frac{d^2 \bar{w}}{d\rho^2} \right) \quad (2.3)$$

Подстановка (2.3) в уравнение (1.5) приводит к уравнению

$$\frac{d^3 \bar{w}}{d\rho^3} + \frac{1}{\rho} \frac{d^2 \bar{w}}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{d\bar{w}}{d\rho} = \frac{3(1-\nu)}{4} \frac{1}{\rho} \int_0^{\rho} p \rho d\rho \quad (2.4)$$

Для кольцевой пластинки, у которой внутренний край $\rho = a$ ни на что не опирается, уравнение (2.4) остается в силе, если заменить нижний предел 0 у интеграла на a .

В случае нагрузки, равномерно распределенной по всей пластинке, решение уравнения (2.4) будет иметь вид

$$\bar{w} = \frac{3p(1-\nu)}{256} (\rho^4 + C_1 \rho^2 + C_2 \ln \rho + C_3) \quad (2.5)$$

3. Упруго-пластическое напряженное состояние. Упруго-пластическим называется напряженное состояние, при котором:

для идеальной пластичности

$$\chi, \quad \bar{T} = 1 \quad \text{при} \quad \chi \leq |\zeta| \leq 1 \quad (3.1)$$

для пластичности с упрочнением

$$\bar{T} < 1 \quad \text{при} \quad 0 \leq |\zeta| < \chi, \quad \bar{T} = n(1 + \lambda \bar{E}^n) \quad \text{при} \quad \chi \leq |\zeta| \leq 1 \quad (3.1')$$

Через χ обозначена абсолютная величина ординаты ζ линий границ (фиг. 2) между упругим и пластическими слоями ($0 \leq \chi \leq 1$).

Принятое допущение о несжимаемости пластического материала не позволяет (если $\nu \neq \frac{1}{2}$) удовлетворить условию непрерывности всех компонент напряжения на границах $|\zeta| = \chi$ между упругим и пластическими слоями. Поэтому мы ослабляем это условие и вместо непрерывности компонент напряжения $\bar{\sigma}_r$ и $\bar{\sigma}_\theta$ будем требовать непрерывность \bar{T} .

Таким образом вдоль границ между упругим и пластическими слоями (фиг. 2) как для идеальной пластичности, так и для пластичности с упрочнением $\bar{T} = 1$; и, следовательно, при $|\zeta| = \chi$

$$\bar{\sigma}_r^2 + \bar{\sigma}_\theta^2 - \bar{\sigma}_r \bar{\sigma}_\theta = 3$$

Отсюда, в силу (1.3), имеет место уравнение

$$(1 - \nu + \nu^2) \left[\left(\frac{d^2 \bar{w}}{d\rho^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\bar{w}}{d\rho} \right)^2 \right] - (1 - 4\nu + \nu^2) \frac{1}{\rho} \frac{d\bar{w}}{d\rho} \frac{d^2 \bar{w}}{d\rho^2} = \frac{3(1 - \nu)^2}{4\chi^2} \quad (3.2)$$

Введем новое переменное ψ следующим образом:

$$\frac{d^2 \bar{w}}{d\rho^2} = \pm \frac{\sin(\psi - \omega)}{2\chi \cos \omega}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{d\bar{w}}{d\rho} = -\frac{\sin(\psi + \omega)}{2\chi \cos \omega} \quad (3.3)$$

где

$$\sin \omega = \frac{\sqrt{3(1 - \nu)}}{2\sqrt{1 - \nu + \nu^2}}, \quad \cos \omega = \frac{1 + \nu}{2\sqrt{1 - \nu + \nu^2}}$$

связав при этом ψ и χ соотношением

$$\frac{d\chi}{d\rho} = \chi \left[\operatorname{ctg}(\psi + \omega) \frac{d\psi}{d\rho} + \frac{2 \cos \omega \sin \psi}{\rho \sin(\psi + \omega)} \right] \quad (3.4)$$

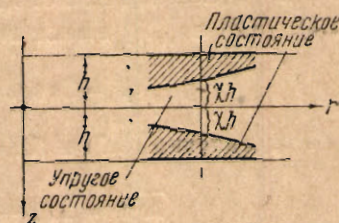
которое следует из (3.3), если исключить \bar{w} . При этом уравнение (3.2) тождественно удовлетворяется.

Уравнение для нахождения \bar{w} может быть получено из (3.3) в виде

$$\frac{d\bar{w}}{d\rho} = -\rho \frac{\sin(\psi + \omega)}{2\chi \cos \omega} \quad (3.5)$$

Компоненты момента, отнесенного ко всей толщине пластинки, вычисляются по формулам

$$\bar{M}_r^{ep} = 2 \int_0^\chi \bar{\sigma}_r^e \zeta d\zeta + 2 \int_\chi^1 \bar{\sigma}_r^p \zeta d\zeta, \quad \bar{M}^{ep} = 2 \int_0^\chi \bar{\sigma}_\theta^e \zeta d\zeta + 2 \int_\chi^1 \bar{\sigma}_\theta^p \zeta d\zeta \quad (3.6)$$



Фиг. 2

Компоненты упругого напряжения в силу (1.3) и (3.3) имеют вид

$$\bar{\sigma}_r^e = 2 \frac{\xi}{\chi} \cos \left(\psi + \frac{\pi}{6} \right), \quad \bar{\sigma}_\theta^e = 2 \frac{\xi}{\chi} \cos \left(\psi - \frac{\pi}{6} \right) \quad (3.7)$$

В дальнейшем удобно наряду с функцией ψ пользоваться функцией φ , определенной уравнением

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{ctg} \omega}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \psi \quad (3.8)$$

Для идеальной пластичности компоненты пластического напряжения в силу (1.4), (3.3) и (3.8) имеют вид

$$\bar{\sigma}_r^p = 2\chi \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right) \quad \bar{\sigma}_\theta^p = 2\chi \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{6} \right) \quad (3.9)$$

Подстановка (3.7) и (3.9) в формулы (3.6) дает

$$\begin{aligned} \bar{M}_r^{ep} &= 2(1 - \chi^2) \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{4}{3} \chi^2 \cos \left(\psi + \frac{\pi}{6} \right) \\ \bar{M}_\theta^{ep} &= 2(1 - \chi^2) \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{4}{3} \chi^2 \cos \left(\psi - \frac{\pi}{6} \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Уравнение (1.5), преобразованное при помощи формул (3.10), представится в виде

$$\rho \frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{1}{\Psi \chi^2 + (1 - \chi^2) \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right)} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\rho p \rho d\rho - \Phi \chi^2 - (1 - \chi^2) \sin \varphi \right\} \quad (3.11)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{2}{3} \sin \psi \left\{ 1 + 2 \left[3 \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right) - 2 \cos \left(\psi + \frac{\pi}{6} \right) \right] \frac{\cos \omega}{\sin(\psi + \omega)} \right\} \\ \Psi &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \omega \frac{\cos^2 \psi}{\cos^2 \varphi} \left\{ \sin \left(\psi + \frac{\pi}{6} \right) + \left[3 \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right) - 2 \cos \left(\psi + \frac{\pi}{6} \right) \right] \operatorname{ctg}(\psi + \omega) \right\} \end{aligned}$$

Для кольцевой пластинки, у которой внутренний край $\rho = \alpha$ ни на что не опирается, уравнение (3.12) остается в силе, если заменить нижний предел 0 интеграла на α .

Система трех уравнений (3.4), (3.8) и (3.11) служит для определения трех функций φ , ψ и χ .

В случае нагрузки $p = \text{const}$, равномерно распределенной по всей пластинке, удобно ввести обозначения

$$\bar{\rho} = \frac{\sqrt{p}}{2} \rho, \quad \bar{\gamma} = \frac{\sqrt{p}}{2} \gamma, \quad \bar{\delta} = \frac{\sqrt{p}}{2} \delta \quad (3.12)$$

Уравнения (3.4) и (3.11) могут быть представлены в виде

$$\bar{\rho} \frac{d\varphi}{d\bar{\rho}} = \frac{\bar{\rho}^2 - \Phi \chi^2 - (1 - \chi^2) \sin \varphi}{\Psi \chi^2 + (1 - \chi^2) \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right)} = F(\bar{\rho}; \varphi, \psi, \chi) \quad (3.13)$$

$$\frac{d\chi}{d\bar{\rho}} = \chi \operatorname{ctg}(\psi + \omega) \frac{\sin \psi}{\sin \varphi} \left[\frac{\cos \psi d\varphi}{\cos \varphi d\bar{\rho}} + \frac{2 \cos \omega \sin \varphi}{\bar{\rho} \cos(\psi + \omega)} \right] \quad (3.14)$$

Эти уравнения имеют особые точки.

Для пластичности с упрочнением компоненты пластического напряжения

в силу (1.4') и (3.3) имеют вид

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_r^p &= 2\lambda n \left\{ 1 + \lambda \left| \frac{\sin \psi}{\lambda \sin \varphi} \right|^\mu |\zeta|^\mu \right\} \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right) \\ \bar{\sigma}_r^p &= 2\lambda n \left\{ 1 + \lambda \left| \frac{\sin \psi}{\lambda \sin \varphi} \right|^\mu |\zeta|^\mu \right\} \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{6} \right)\end{aligned}\quad (3.9')$$

Формулы (3.6) и (3.9') дают возможность найти

$$\begin{aligned}M_r^{ep} &= 2n \left\{ (1 - \chi^2) + \frac{2\lambda}{\mu + 2} (\chi^{-\mu} - \chi^2) \left(\frac{\sin \psi}{\sin \varphi} \right)^\mu \right\} \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right) + \\ &\quad + \frac{4}{3} \chi^2 \cos \left(\psi + \frac{\pi}{6} \right) \\ \bar{M}_\theta^{ep} &= 2n \left\{ (1 - \chi^2) + \frac{2\lambda}{\mu + 2} (\chi^{-\mu} - \chi^2) \left(\frac{\sin \psi}{\sin \varphi} \right)^\mu \right\} \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{6} \right) + \\ &\quad + \frac{4}{3} \chi^2 \cos \left(\psi - \frac{\pi}{6} \right)\end{aligned}\quad (3.10')$$

Уравнение (1.5), преобразованное при помощи формул (3.10'), представится в виде

$$\rho \frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{\frac{1}{2} \int_0^\rho p \rho d\rho - \Phi \chi^2 - \Phi^* \chi^{-\mu} - n(1 - \chi^2) \sin \varphi}{\Psi \chi^2 + \Psi^* \chi^{-\mu} + n(1 - \chi^2) \sin(\varphi + \pi/6)} \quad (3.11')$$

где обозначено

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{2}{3} \sin \psi \left\{ 1 + 2 \left[3n \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right) - 2 \cos \left(\psi + \frac{\pi}{6} \right) \right] \frac{\cos \omega}{\sin(\psi + \omega)} \right\} + \\ &\quad + \frac{2\lambda}{\mu + 2} \left(\frac{\sin \psi}{\sin \varphi} \right)^\mu \left(2 \frac{\cos \omega \sin \psi}{\sin(\psi + \omega)} - n \sin \varphi \right)\end{aligned}$$

$$\Phi^* = \frac{2\lambda}{\mu + 2} \left(\frac{\sin \psi}{\sin \varphi} \right)^\mu \left(\mu \frac{\cos \omega \sin \psi}{\sin(\psi + \omega)} + n \sin \varphi \right)$$

$$\begin{aligned}\Psi &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \omega \left(\frac{\cos \psi}{\cos \varphi} \right)^2 \left\{ \sin \left(\psi + \frac{\pi}{6} \right) + \left[3n \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \cos \left(\psi + \frac{\pi}{6} \right) \right] \operatorname{ctg}(\psi + \omega) \right\} + \frac{2\lambda n}{\mu + 2} \left(\frac{\sin \psi}{\sin \varphi} \right)^\mu \left\{ \sqrt{3} \operatorname{tg} \omega \frac{\cos(\varphi + \pi/6)}{\cos^2 \varphi} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\operatorname{ctg}(\psi + \omega) \cos^2 \psi - \mu (\cos \psi \sin \psi - \cos \varphi \sin \varphi) \right] - \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right) \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi^* &= \frac{2\lambda n}{\mu + 2} \left(\frac{\sin \psi}{\sin \varphi} \right)^\mu \left\{ \mu \sqrt{3} \operatorname{tg} \omega \frac{\cos(\varphi + \pi/6)}{\cos^2 \varphi} \left[\operatorname{ctg}(\psi + \omega) \cos^2 \psi + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cos \psi \sin \psi - \cos \varphi \sin \varphi \right] + \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right) \right\}\end{aligned}$$

Для кольцевой пластинки, у которой внутренний край $\rho = \alpha$ ни на что не опирается, уравнение (3.9) остается в силе, если заменить нижний предел 0 интеграла на α .

Система трех уравнений (3.4), (3.8) и (3.11') служит для определения трех функций φ , ψ и χ .

4. Чисто пластическое напряженное состояние. Чисто пластическим называется напряженное состояние, при котором:

для идеальной пластичности

$$\bar{T} = 1 \quad \text{при } 0 \leq |\zeta| \leq 1 \quad (4.1)$$

для пластичности с упрочнением

$$\bar{T} = n(1 + \lambda E^k) \quad \text{при } 0 \leq |\zeta| \leq 1 \quad (4.1')$$

Чисто пластическое напряженное состояние является предельным случаем упруго-пластического состояния, когда упругий слой исчезает ($\chi = 0$).

Компоненты момента, отнесенного ко всей толщине пластинки, вычисляются по формулам

$$\bar{M}_r^p = 2 \int_0^1 \bar{\sigma}_r^p \zeta d\zeta, \quad \bar{M}_\theta^p = 2 \int_0^1 \bar{\sigma}_\theta^p \zeta d\zeta \quad (4.2)$$

Для случая идеальной пластичности при неограниченном убывании χ смещения неограниченно возрастают, компоненты напряжения же остаются конечными.

Компоненты пластического напряжения $\bar{\sigma}_r^p$ и $\bar{\sigma}_\theta^p$ не зависят от ζ и должны удовлетворять условию Мизеса

$$\bar{\sigma}_r^2 + \bar{\sigma}_\theta^2 - \sigma_r \sigma_\theta = 3 \quad (4.3)$$

Введем новое переменное φ , положив

$$\bar{\sigma}_r^p = 2\chi \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right), \quad \bar{\sigma}_\theta^p = 2\chi \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) \quad (3.9)$$

где $\chi = \text{sign} \zeta$.

Условие Мизеса удовлетворяется тождественно. Подстановка (3.9) в формулы (4.2) дает

$$\bar{M}_r^p = 2 \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right), \quad \bar{M}_\theta^p = 2 \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) \quad (4.4)$$

Уравнение (4.5), преобразованное при помощи формул (4.4), представится в виде

$$\rho \frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{1}{\sin(\varphi + \pi/6)} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\rho p \rho d\rho - \sin \varphi \right\} \quad (4.5)$$

Формулы (4.4) и (4.5) можно получить из (3.10) (3.11), положив $\chi = 0$.

Для кольцевой пластинки, у которой внутренний край $\rho = \alpha$ ни на что не опирается, уравнение (4.5) остается в силе, если заменить нижний предел 0 интеграла на α .

В случае нагрузки, равномерно распределенной по кругу Γ_a радиуса d с центром в точке 0,

$$p = \text{const} \quad (0 \leq \rho < d), \quad p = 0 \quad (d < \rho \leq 1)$$

и уравнение (4.5) приводит к уравнениям:

для $0 \leq \rho \leq \delta$ или $0 \leq \rho \leq \delta$

$$\rho \frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{\bar{\rho}^2 - \sin \varphi}{\sin(\varphi + \pi/6)} = F(\bar{\rho}, \varphi) \quad (4.6)$$

для $\delta \leq \rho \leq 1$

$$\rho = \frac{C}{\sqrt{|\delta^2 - \sin \varphi|}} \exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \varphi\right) f(\varphi, \delta) \quad (4.7)$$

Здесь обозначено

$$f(\varphi, \bar{\delta}) = \exp\left(\frac{\sqrt{3} \bar{\delta}^2}{2 \sqrt{\bar{\delta}^4 - 1}} \arcsin \frac{\bar{\delta}^2 \sin \varphi - 1}{\bar{\delta}^2 - \sin \varphi}\right) \quad \text{при } \bar{\delta} > 1 \quad (4.8)$$

$$f(\varphi, 1) = \exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi}\right) \quad \text{при } \bar{\delta} = 1$$

$$f(\varphi, \bar{\delta}) = \left| \frac{1 - \bar{\delta}^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi + \sqrt{1 - \bar{\delta}^4}}{1 - \bar{\delta}^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi - \sqrt{1 - \bar{\delta}^4}} \right|^\omega \quad \left(\omega = \frac{\sqrt{3} \bar{\delta}^2}{2 \sqrt{1 - \bar{\delta}^4}} \right) \quad \text{при } \bar{\delta} < 1$$

Для случая пластичности с упрочнением при неограниченном убывании γ как смещения, так и компоненты момента неограниченно возрастают. Поэтому чисто пластическое напряженное состояние пластинки для пластичности с упрочнением лишено механического смысла.

5. Граничные условия. Приведем условия, имеющие место на контуре пластинки, в зависимости от характера закрепления вдоль него, а также на границе между чисто упругой и упруго-пластической областями.

Условия в центре пластинки

$$\bar{M}_r = \bar{M}_\theta \geq 0$$

на основании формул (2.3), (3.10) и (4.4) имеют следующий вид:

При чисто упругом напряженном состоянии

$$\frac{d\bar{w}^e}{d\rho} = 0 \quad (5.1)$$

При упруго-пластическом напряженном состоянии

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0 \quad (5.2)$$

При чисто пластическом напряженном состоянии

$$\varphi = 0 \quad (5.3)$$

Здесь опущены числа, кратные 2π , не влияющие на \bar{w} .

Условия вдоль контура при свободном опирании пластинки

$$\bar{w} = 0, \quad \bar{M}_r = 0$$

в силу (2.3), (3.10), (3.10') и (1.4) будут:

При чисто упругом напряженном состоянии

$$\bar{w}^e = 0, \quad \frac{d^2 \bar{w}^e}{d\rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \frac{d\bar{w}^e}{d\rho} = 0 \quad (5.4)$$

При упруго-пластическом напряженном состоянии:
для идеальной пластичности

$$\bar{w}^{ep} = 0, \quad R(\varphi, \psi, \chi) \equiv 3(1 - \chi^2) \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) + 2\chi^2 \cos\left(\psi + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \quad (5.5)$$

для пластичности с упрочнением

$$\bar{w}^{ep} = 0, \quad R(\varphi, \psi, \chi) \equiv 3n \left\{ (1 - \chi^2) + \right. \\ \left. + \frac{2\lambda}{\mu + 2} (\chi^{-\mu} - \chi^2) \left(\frac{\sin \psi}{\sin \varphi} \right)^\mu \right\} \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) + 2\chi^2 \cos\left(\psi + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \quad (5.5')$$

При чисто пластическом напряженном состоянии

$$\varphi = \pi/3 \quad (5.6)$$

Здесь опущено число, кратное 2π , не влияющее на \bar{w} .

Условия вдоль контура при заземлении пластинки

$$\bar{w} = 0, \quad d\bar{w}/d\rho = 0$$

вследствие (3.5) представляются в виде:

При чисто упругом напряженном состоянии

$$\bar{w}^e = 0, \quad d\bar{w}^e/d\rho = 0 \quad (5.7)$$

При упруго-пластическом напряженном состоянии

$$\bar{w}^{ep} = 0, \quad \varphi = 5\pi/6, \quad \psi = \pi - \omega \quad (5.8)$$

При чисто пластическом напряженном состоянии:

$$\varphi = 5\pi/6 \quad (5.9)$$

Здесь опущено число, кратное 2π , не влияющее на \bar{w} .

Условия вдоль границы между чисто упругой и упруго-пластической областями

$$\bar{w}^p = \bar{w}^e, \quad \frac{d\bar{w}^p}{d\rho} = \frac{d\bar{w}^e}{d\rho}, \quad \bar{M}_r^p = \bar{M}_r^e, \quad \bar{M}_\theta^p = \bar{M}_\theta^e$$

вследствие (2.3), (3.5) и (3.10) будут

$$\bar{w}^p = \bar{w}^e, \quad \chi = 1, \quad \frac{d\bar{w}^e}{d\rho} = -\rho \frac{\sin(\psi + \omega)}{2 \cos \omega}, \quad \frac{d^2 \bar{w}^e}{d\rho^2} = \frac{\sin(\psi - \omega)}{2 \cos \omega} \quad (5.10)$$

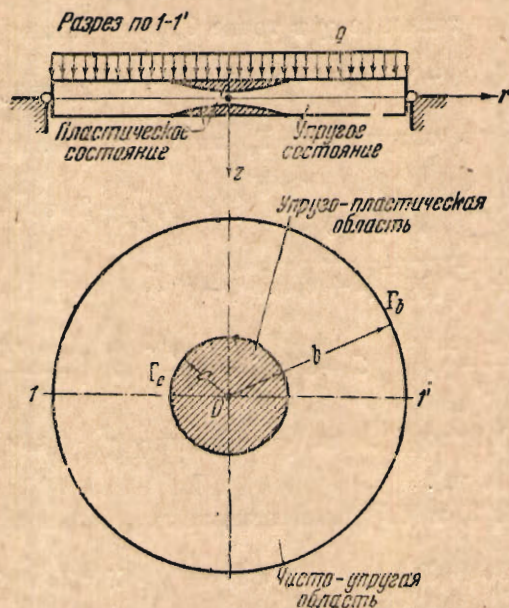
6. Решение задач. Приведенные в предыдущих параграфах уравнения и граничные условия дают возможность решать задачи об упруго-пластическом изгибе круговой и кольцевой пластинок при различных нагрузках и граничных условиях. Метод решения этих задач поясним на двух конкретных примерах, взятых для идеальной пластичности.

В первом примере рассмотрим круговую пластинку, свободно опертую по контуру и находящуюся под действием нагрузки, равномерно распределенной по всей площади пластинки:

$$p = \text{const} \quad (0 \leq \rho \leq 1)$$

Определим смещения средней плоскости пластинки \bar{w} при различных значениях p . При достаточной величине нагрузки ($p > p_0$) упруго-пластическая об-

ласть заполняет некоторый круг, ограниченный окружностью Γ_c с центром в точке O , радиус которой обозначаем через c . Кольцевая область между окружностями Γ_c и Γ_b остается чисто упругой (фиг. 3).



Фиг. 3

В кольцевой чисто упругой области ($\gamma \leq r \leq 1$) смещение \bar{w}^e определяется формулой (2.5) после нахождения двух постоянных интегрирования условий (5.4). Имеем

$$\bar{w}^e = -\frac{3p(1-\nu)}{256} \left(1 - r^4 - 4\frac{3+\nu}{1-\nu} \ln r \right) + C \left(1 - r^2 - 2\frac{1+\nu}{1-\nu} \ln r \right) \quad (6.1)$$

где C — постоянное интегрирования, значение которого будет найдено ниже. Компоненты момента в силу (2.3) имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{M}_r^e &= \frac{p(3+\nu)}{16} \left(\frac{1}{r^2} - r^2 \right) - \frac{8 \operatorname{ctg} \omega}{\sqrt{3}} C \left(\frac{1}{r^2} - 1 \right) \\ \bar{M}_\theta^e &= -\frac{p}{16} \left[\frac{3+\nu}{r^2} + (1+3\nu)r^2 \right] + \frac{8 \operatorname{ctg} \omega}{\sqrt{3}} C \left(\frac{1}{r^2} + 1 \right) \end{aligned} \quad (6.2)$$

В круговой упруго-пластической области $0 \leq r \leq \gamma$ определение \bar{w}^{ep} сводится к нахождению функций φ , ψ и χ , удовлетворяющих уравнениям (3.8), (3.13), (3.14) и допускающих непрерывные и ограниченные производные в окрестности особой точки $r=0$. Должно быть удовлетворено также условие (5.2)¹.

¹ Существование решения уравнений (3.13) и (3.14) голоморфного в окрестностях особой точки $r=0$ может быть доказано. Для такого голоморфного решения удовлетворяется условие (5.2).

Последнее очевидно из уравнения (3.13).

Пусть

$$\varphi = \varphi(\bar{\rho}, \chi_0), \quad \psi = \psi(\bar{\rho}, \chi_0), \quad \chi = \chi(\bar{\rho}, \chi_0)$$

где через χ_0 обозначено значение χ в точке 0, суть такие функции, причем

$$\varphi(0, \chi_0) = \psi(0, \chi_0) = 0, \quad \chi(0, \chi_0) = \chi_0$$

Условия (5.10) вдоль окружности Γ_c вместе с уравнениями (3.12) дают

$$p = p(\chi_0) = \frac{8}{\sqrt{3}(3+\nu)} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} (1+\nu) \bar{\gamma}^2 + 2 \cos \tilde{\psi} + \right. \\ \left. + \sqrt{3\bar{\gamma}^4 + 2\bar{\gamma}^2 [\sqrt{3}(1+\nu) \cos \tilde{\psi} - (3+\nu) \sin \tilde{\psi}] + 4 \cos^2 \tilde{\psi}} \right\} \quad (6.3)$$

$$\bar{\gamma} = \bar{\gamma}(\chi_0) = \frac{2}{\sqrt{p}} \bar{\gamma}, \quad C = C(\chi_0) = \frac{4g\omega}{4} \left[\cos \tilde{\psi} + \frac{\sqrt{3}(1+\nu)}{4} p^2 \bar{\gamma}^2 \right] \quad (6.4)$$

Значение $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}(\chi_0)$ находится из уравнения $\chi(\bar{\gamma}, \chi_0) = 1$, а $\tilde{\psi}$ определяется формулой $\tilde{\psi} = \psi[\bar{\gamma}(\chi_0), \chi_0]$.

Решение в силу (3.12) и (6.3) окончательно получается в виде

$$\varphi = \varphi_*(\rho, \chi_0), \quad \psi = \psi_*(\rho, \chi_0), \quad \chi = \chi_*(\rho, \chi_0)$$

Минимальная величина p , при которой впервые появляется упруго-пластическая область в точке 0, может быть найдена из (6.3) при $\bar{\gamma} = 0$, $\tilde{\psi} = 0$ в виде

$$p_0 = \frac{32}{\sqrt{3}(3+\nu)}$$

Смещение $\bar{w}^{ep} = \bar{w}^{ep}(\rho, \chi_0)$ находится из уравнения (3.5) при условии

$$\bar{w}^{ep}(\bar{\gamma}, \chi_0) = -\frac{3p(4-\nu)}{256} \left(1 - \bar{\gamma}^4 - 4 \frac{3+\nu}{1-\nu} \ln \bar{\gamma} \right) + C(\chi_0) \left(1 - \bar{\gamma}^2 - 2 \frac{1+\nu}{1-\nu} \ln \bar{\gamma} \right)$$

Приведенное решение имеет физический смысл, пока нагрузка p такова, что в пластинке имеется чисто упругая кольцевая область между окружностями Γ_c и Γ_b , т. е. пока найденная по формуле (6.4) величина $\bar{\gamma} \leq 1$.

При дальнейшем увеличении нагрузки p чисто упругая кольцевая область уменьшается, вырождается в окружность Γ_b , а затем и вовсе пропадает, так что вся пластинка переходит в упруго-пластическое состояние.

Определение смещения \bar{w}^{ep} попрежнему сводится к нахождению функции $\varphi = \varphi(\bar{\rho}, \chi_0)$, $\psi = \psi(\bar{\rho}, \chi_0)$, $\chi = \chi(\bar{\rho}, \chi_0)$. Напомним, что

$$\varphi(0, \chi_0) = \psi(0, \chi_0) = 0, \quad \chi(0, \chi_0) = \chi_0$$

Условие (5.5) вдоль окружности Γ_b вместе с формулой (3.12) приводит к уравнению

$$R \left[\varphi \left(\frac{\sqrt{p}}{2}, \chi_0 \right), \psi \left(\frac{\sqrt{p}}{2}, \chi_0 \right), \chi \left(\frac{\sqrt{p}}{2}, \chi_0 \right) \right] = 0$$

определяющему $p = p(\chi_0)$.

Как и выше, решение в силу (3.12) и (6.3) окончательно представится в виде

$$\varphi = \varphi_*(\rho, \chi_0), \quad \psi = \psi_*(\rho, \chi_0), \quad \chi = \chi_*(\rho, \chi_0)$$

Смещение $\bar{w}^{ep} = \bar{w}^{ep}(\rho, \chi_0)$ находится из уравнения (3.5) при условии

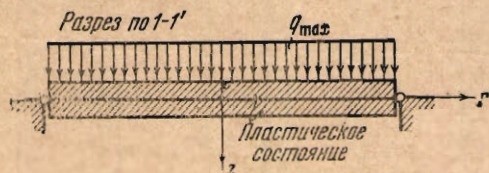
$$\bar{w}^{ep}(1, \chi_0) = 0$$

Подстановка найденных выше функций φ , ψ и χ в формулы (3.10) дает возможность найти \bar{M}_r^{ep} и \bar{M}_θ^{ep} .

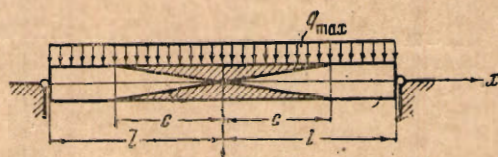
Заметим, что построенное решение будет выражено через параметр χ_0 . Нетрудно видеть, что при $\chi_0 = 0$ решением уравнения (3.4) является

$$\chi = 0$$

Следовательно, одновременно с появлением чисто пластического состояния в точке O вся пластинка переходит в чисто пластическое состояние (фиг. 4). В этом состоит существенное отличие задачи об изгибе круговой пластинки от задачи об изгибе балки. Образование чисто пластического состояния в одной точке балки, как известно (см., например, Nadai [2]), вовсе не влечет появления чисто пластического состояния во всей балке.



Фиг. 4



Фиг. 5

Предельным значением равномерно распределенной нагрузки мы называем такое значение $p = p_{\max}$, при котором в точке O , а следовательно, и во всей пластинке, образуется чисто пластическое состояние.

Определение величины $p = p_{\max}$, а также \bar{M}_r^p и \bar{M}_θ^p сводится к нахождению функции φ из уравнения (4.6) и условия (5.3). Пусть $\varphi = \varphi(\rho)$ есть решение уравнения (4.6), построенное при условии (5.3)

$$\varphi(0) = 0$$

Условие (5.6) на окружности Γ_b в силу (3.12) приводит к уравнению

$$\varphi\left(\frac{\sqrt{p}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

определяющему значение p_{\max} .

Функция $\varphi = \varphi(\rho)$, в силу (3.12) и принимая во внимание, что $p = p_{\max}$ известно, определяет

$$\varphi = \varphi_*(\rho)$$

Подстановка этой функции в формулы (4.4) дает возможность найти \bar{M}_r^p и \bar{M}_θ^p .

Для сравнения рассмотрим балку, свободно опертую по концам и находящуюся под действием нагрузки, равномерно распределенной по всей длине (см. [1]).

Пусть ось x совпадает с осью балки, ось z направлена вниз, а начало коор-

динат совпадает с серединой балки. Длина балки $2l$, высота балки $2h$, ширина равна единице.

Абсолютная величина абсцисс точек, служащих границами между чисто упругими и упруго-пластическими областями, обозначается через c .

Введем обозначения

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \gamma = \frac{c}{l}, \quad \zeta = \frac{z}{h}, \quad p = \frac{ql^2}{kh^3}$$

Из условия задачи следует, что

$$p = \text{const} \quad (0 \leq |\xi| \leq 1)$$

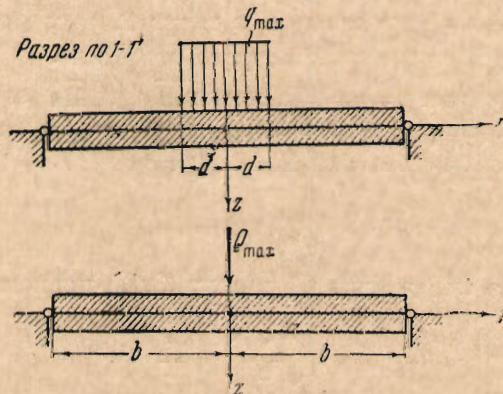
Рассмотрим случай, когда в точке O имеет место чисто пластическое состояние. При этом

$$p_{\max} = 2\sqrt{3}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Пластические области, заштрихованные на фиг. 5, ограничены двумя прямыми

$$|\zeta| = \sqrt{3}|\xi|$$

Таким образом имеют место чисто упругое состояние на участках ($\gamma < |\xi| \leq 1$), упруго-пластическое состояние на участках ($0 < |\xi| \leq \gamma$), чисто пластическое состояние в одной точке $\xi = 0$.



Фиг. 6

Во втором примере рассмотрим круговую пластинку, свободно опертую по контуру (фиг. 6) и находящуюся под действием нагрузки, равномерно распределенной по кругу радиуса d ($d < b$):

$$p = \text{const} \quad (0 \leq \rho < \delta), \quad p = 0 \quad (\delta < \rho \leq 1)$$

Окружность радиуса d обозначается через Γ_d .

Определим величину $p = p_{\max}$, при которой вся пластинка находится в чисто пластическом состоянии, а также соответствующие значения \overline{M}_r^p и \overline{M}_θ^p .

Решение задачи сводится к нахождению функции φ из уравнений (4.6), (4.7) и условия (5.6)

Пусть для $0 \leq \rho \leq \bar{\delta}$, или $0 \leq \bar{\rho} \leq \bar{\delta}$

$$\varphi = \varphi(\rho)$$

есть решение уравнения (4.6) при условии (5.3)

$$\varphi(0) = 0$$

Уравнение (4.7) после нахождения постоянного интегрирования C из условия (5.6) на окружности Γ_b принимает вид

$$\rho = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{2\bar{\delta}^2 - \sqrt{3}}{\bar{\delta}^2 - \sin \varphi}} \exp \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\pi}{3} - \varphi \right) \right] \frac{f(\varphi, \bar{\delta})}{f(\pi/3, \bar{\delta})} \quad \text{для } \bar{\delta} \leq \rho \leq 1 \quad (6.5)$$

Функция $f(\varphi, \bar{\delta})$ определена формулами (4.8).

Подстановка $\rho = \bar{\delta}$ и $\varphi = \varphi(\bar{\delta})$ в уравнения (6.5) дает

$$\bar{\delta} = \delta(\bar{\delta}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{2\bar{\delta}^2 - \sqrt{3}}{\bar{\delta}^2 - \sin \varphi(\bar{\delta})}} \exp \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{\pi}{3} - \varphi(\bar{\delta}) \right] \right\} \frac{f[\varphi(\bar{\delta}), \bar{\delta}]}{f[\pi/3, \bar{\delta}]} \quad (6.6)$$

$$P_{\max} = P(\bar{\delta}) = 4 \frac{\bar{\delta}^3}{\bar{\delta}^2}$$

Уравнения (6.6) устанавливают при помощи параметра $\bar{\delta}$ зависимость между ρ и $\bar{\delta}$.

Функция $\varphi = \varphi(\bar{\rho})$ и уравнение (6.5) в силу формул (3.15) и (6.6) определяют φ в виде

$$\varphi = \varphi_*(\rho, \bar{\delta})$$

Подстановка этой функции в формулы (4.4) дает возможность найти \bar{M}_r^p и \bar{M}_θ^p .

Предельным случаем нагрузки, равномерно распределенной по кругу радиуса d с центром в точке O , является сосредоточенная сила приложения в точке O (фиг. 5). Если принять

$$\pi \bar{\delta}^2 p = P \quad \text{или} \quad 4\pi \bar{\delta}^2 = P$$

и допустить, что при постоянном значении P величина $\bar{\delta}$ становится равной нулю, то из формул (6.5) и (6.6) следует, что

$$\bar{\delta}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \varphi = \bar{\delta}^2$$

При $\rho = 0$ величина φ претерпевает разрыв.

Отсюда нетрудно определить $P = P_{\max}$, при котором вся пластинка находится в чисто пластическом состоянии, а также найти соответствующие значения \bar{M}_r^p и \bar{M}_θ^p . Имеем

$$P_{\max} = 2\pi \sqrt{3} \quad \text{и} \quad \varphi = \pi/3$$

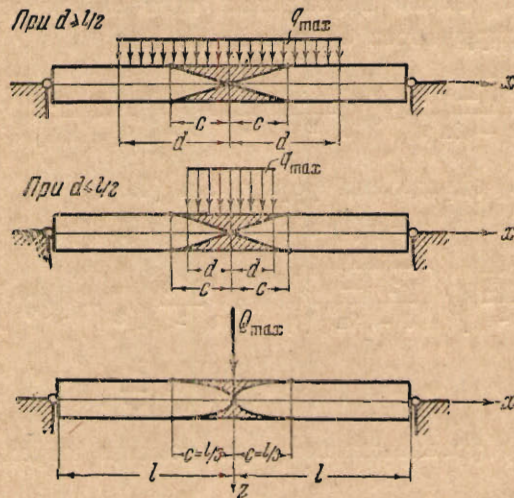
Формулы (4.4) дают

$$\bar{M}_r^p = 0, \quad \bar{M}_\theta^p = \sqrt{3}$$

Для сравнения рассмотрим балку, свободно опертую по концам (фиг. 7) и находящуюся под действием нагрузки $q = \text{const}$, равномерно распределенной на участке $(-d, +d)$:

$$p = \text{const} \quad (0 \leq |\xi| < \delta), \quad p = 0 \quad (\delta < |\xi| \leq l)$$

Если $d = l$, то равномерная нагрузка $q = \text{const}$ распределена по всей балке $0 \leq |\xi| \leq l$; если принять $2dq = Q$ и допустить, что при постоянном значении Q величина d становится равной нулю, то указанная нагрузка приводится к сосредоточенной силе Q в точке O .



Фиг. 7

Введем обозначения

$$\delta = \frac{d}{l}, \quad p = \frac{ql^2}{kh^2}, \quad P = \frac{Ql}{kh^2}$$

Величина $p = p_{\text{max}}$, при которой в точке O имеет место чисто пластическое состояние:

$$p_{\text{max}} = \frac{2\sqrt{3}}{\delta(2-\delta)}$$

При $\delta \geq \frac{1}{2}$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\delta(2-\delta)}$$

а пластические области (заштрихованные на фиг. 7) ограничены двумя прямыми

$$|\zeta| = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\delta(2-\delta)}} |\xi|$$

При $\delta \leq \frac{1}{2}$

$$\gamma = \frac{1}{3}(1+\delta)$$

а пластические области (заштрихованные на фиг. 7) ограничены двумя кривыми, определенными уравнениями

$$\zeta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\delta(2-\delta)}} |\xi| \quad (0 \leq |\xi| \leq \delta), \quad \zeta^2 = \frac{3}{2-\delta} (2|\xi| - \delta) \quad (\delta \leq |\xi| \leq \gamma)$$

Предельным случаем нагрузки, равномерно распределенной на участке $(-d, +d)$, является сосредоточенная сила Q , приложенная в точке O .

Если принять $2\delta p = P$ и допустить, что при постоянном значении P величина δ становится равной нулю, получим

$$P_{\max} = 2\sqrt{3}, \quad \gamma = 1/3$$

Пластические области (заштрихованные на фиг. 7) ограничены двумя парабололами

$$\zeta^2 = 3|\xi|$$

касающимися в точке O .

Во всех приведенных случаях имеют место чисто упругое состояние на участках $(\gamma < |\xi| \leq 1)$, упруго-пластическое состояние на участках $(0 < |\xi| \leq \gamma)$, чисто пластическое состояние в одной точке $\xi = 0$.

Ниже приведены численные расчеты для рассмотренных примеров¹.

Приведем численное решение первого примера. Определим смещения \bar{w} пластинки при увеличении нагрузки p . Пусть χ_0 последовательно принимает значения 1.0, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0.0. Принимаем $\nu = 0.25$.

Числовые расчеты сведены в табл. 1, 2, 3.

Табл. 1 составлена следующим образом. Каждая строка соответствует одному из значений $\chi_0 = 1.0, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0.0$.

Вычисления проводятся при помощи формул

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k + \frac{\Delta \bar{\rho}}{\rho_k} F_k,$$

$$\chi_{k+1} = \chi_k \left\{ 1 + \frac{\Delta \bar{\rho}}{\rho_k} \left[\frac{2 \cos \omega \sin \psi_k}{\sin(\psi_k + \omega)} + \operatorname{ctg}(\psi_k + \omega) F_k \right] \right\}$$

$$\psi_k = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\sqrt{3} \operatorname{tg} \omega \operatorname{tg} \varphi_k)$$

где $F_k = F(\rho_k; \varphi_k, \psi_k, \chi_k)$, полученных из уравнений (3.8), (3.13) и (3.14).

Строки 0-3 соответствуют случаю, когда в пластинке имеется чисто упругая кольцевая область между окружностями Γ_c и Γ_b , т. е. когда $\gamma < 1$.

Вычисления обрываются на тех клетках, в которых $\chi > 1$. Значения $\varphi = \tilde{\varphi}$, $\psi = \tilde{\psi}$, а также $\bar{\rho} = \bar{\gamma}$ вдоль Γ_c , т. е. при $\chi = 1$, находятся путем линейной интерполяции и помещены в столбцах 17 и 18 табл. 1.

Значения p и C , найденные по формулам (6.3) и (6.4), помещены в столбцах 19 и 20.

Строка 4 соответствует случаю, когда вся пластинка находится в упруго-пластическом состоянии.

Значения φ , ψ и χ , а также $\bar{\rho} = \frac{1}{2}\sqrt{p}$ вдоль Γ_b , т. е. при

$$\chi^2 = \frac{3 \cos(\varphi + \pi/6)}{3 \cos(\varphi + \pi/6) - 2 \cos(\psi + \pi/6)}$$

находятся путем линейной интерполяции и помещены в столбцах 17 и 18 табл. 1.

¹ Приведенные расчеты имеют своей целью показать путь вычислений и не претендуют на большую точность.

l	γ_0	k		0	1	2	3	4	5	6	7	8
		$\bar{\rho}$	$\bar{\rho}$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
0	1.0	φ	$\bar{\rho}$	0.000								
		ψ	$\bar{\rho}$	0.000								
		χ	$\bar{\rho}$	1.000								
		ρ	$\bar{\rho}$	0.000								
1	0.8	φ	$\bar{\rho}$	0.000	0.002	0.008	0.017	0.029	0.043	0.069		
		ψ	$\bar{\rho}$	0.000	0.003	0.014	0.030	0.062	0.078	0.107		
		χ	$\bar{\rho}$	0.800	0.804	0.818	0.843	0.865	0.916	0.963		
		ρ	$\bar{\rho}$	0.000	0.076	0.152	0.228	0.304	0.380	0.456		
2	0.6	φ	$\bar{\rho}$	0.000	0.003	0.009	0.022	0.038	0.058	0.080	0.103	0.126
		ψ	$\bar{\rho}$	0.000	0.005	0.017	0.039	0.069	0.105	0.144	0.185	0.227
		χ	$\bar{\rho}$	0.600	0.603	0.614	0.636	0.668	0.709	0.757	0.812	0.871
		ρ	$\bar{\rho}$	0.000	0.069	0.138	0.207	0.276	0.345	0.414	0.483	0.552
3	0.4	φ	$\bar{\rho}$	0.000	0.003	0.014	0.029	0.054	0.078	0.108	0.139	0.178
		ψ	$\bar{\rho}$	0.000	0.006	0.025	0.052	0.097	0.142	0.194	0.250	0.320
		χ	$\bar{\rho}$	0.400	0.404	0.413	0.432	0.461	0.497	0.541	0.589	0.640
		ρ	$\bar{\rho}$	0.000	0.064	0.128	0.192	0.256	0.320	0.384	0.448	0.512
4	0.2	φ	$\bar{\rho}$	0.000	0.004	0.017	0.035	0.063	0.095	0.133	0.182	0.230
		ψ	$\bar{\rho}$	0.000	0.008	0.031	0.062	0.113	0.171	0.240	0.320	0.401
		χ	$\bar{\rho}$	0.200	0.202	0.207	0.218	0.226	0.254	0.284	0.309	0.343
		ρ	$\bar{\rho}$	0.000	0.060	0.120	0.180	0.240	0.300	0.360	0.420	0.480
5	0.0	φ	$\bar{\rho}$	0.000	0.005	0.018	0.042	0.074	0.114	0.162	0.216	0.275
		χ	$\bar{\rho}$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
		ρ	$\bar{\rho}$	0.000	0.059	0.118	0.178	0.237	0.296	0.355	0.414	0.474

l	γ_0	k		0	1	2	3	4	5	6
		$\bar{\rho}$	$\bar{\rho}$	0	1	2	3	4	5	6
0	1.0	ρ	$\bar{\omega}^p$	0.000						
		$\bar{\omega}^p$	$\bar{\rho}$	0.210						
1	0.8	ρ	$\bar{\omega}^p$	0.000	0.076	0.152	0.228	0.304	0.380	0.456
		$\bar{\omega}^p$	$\bar{\rho}$	0.268	0.265	0.259	0.249	0.235	0.218	0.197
2	0.6	ρ	$\bar{\omega}^p$	0.000	0.069	0.138	0.207	0.276	0.345	0.414
		$\bar{\omega}^p$	$\bar{\rho}$	0.356	0.346	0.336	0.324	0.304	0.285	0.258
3	0.4	ρ	$\bar{\omega}^p$	0.000	0.064	0.128	0.192	0.256	0.320	0.384
		$\bar{\omega}^p$	$\bar{\rho}$	0.476	0.469	0.448	0.424	0.395	0.372	0.345
4	0.2	ρ	$\bar{\omega}^p$	0.000	0.060	0.120	0.180	0.240	0.300	0.360
		$\bar{\omega}^p$	$\bar{\rho}$							

Таблица 1

9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	Вдоль Γ_c		p	C
								$\bar{\gamma} = 0.000$	0.000 0.000 1.000 0.000	5.70	0.259
								$\bar{\gamma} = 0.668$	0.071 0.128 1.000 0.508	7.00	0.320
0.149 0.269 0.935 0.621								$\bar{\gamma} = 1.000$	0.177 0.309 1.000 0.690	8.52	0.386
0.217 0.391 0.694 0.578	0.268 0.460 0.758 0.642	0.320 0.538 0.825 0.706	0.371 0.619 0.876 0.770	0.433 0.695 0.943 0.834				$\bar{\gamma} = 1.400$	0.496 0.775 1.000 0.898	9.93	0.454
0.282 0.481 0.383 0.540	0.342 0.570 0.421 0.600	0.408 0.662 0.447 0.660	0.473 0.743 0.510 0.720	0.555 0.833 0.533 0.780	0.642 0.930 0.571 0.840	0.749 1.028 0.595 0.900	0.851 1.102 0.627 0.960	Вдоль Γ_c $\frac{\sqrt{p}}{2} = 1.675$	0.891 1.452 0.655 1.000	11.22	
0.341 0.000 0.533	0.442 0.000 0.592	0.488 0.000 0.651	0.568 0.000 0.710	0.654 0.000 0.770	0.746 0.000 0.829	0.843 0.000 0.888	0.948 0.000 0.947	$\frac{\sqrt{p}}{2} = 1.689$	1.047	11.41	

Таблица 2

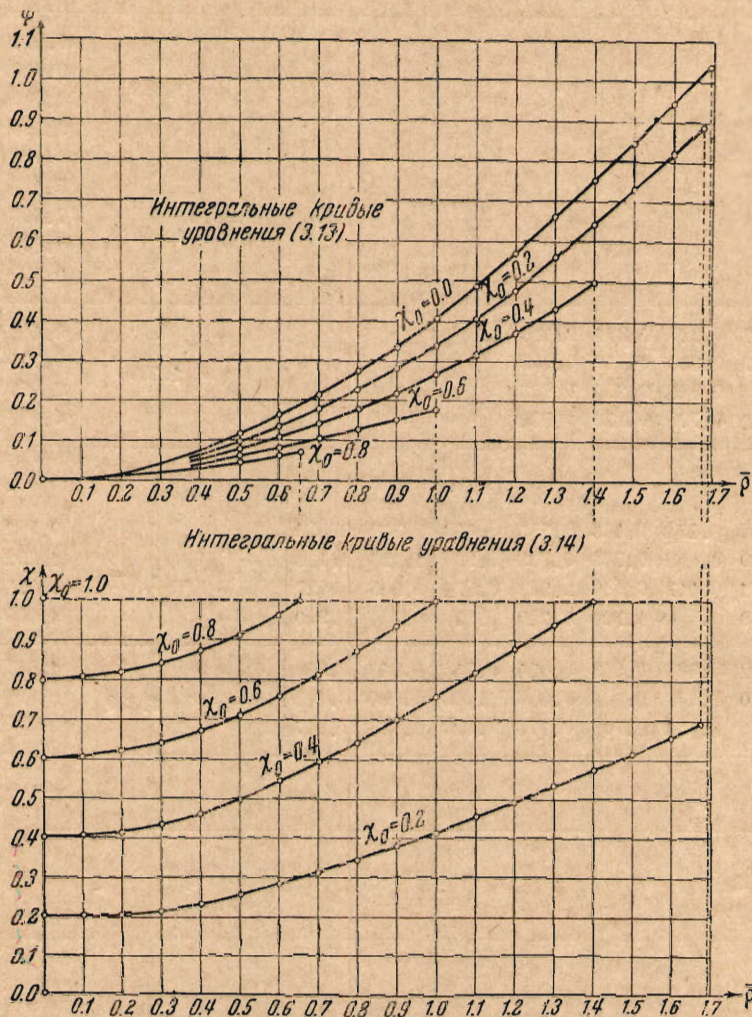
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
										0.000 0.210
										0.508 0.181
0.483 0.237	0.552 0.206	0.621 0.176								0.690 0.147
0.448 0.316	0.512 0.284	0.578 0.261	0.642 0.215	0.706 0.178	0.770 0.140	0.834 0.101				0.898 0.061
0.420	0.480 0.532	0.540 0.480	0.600 0.429	0.660 0.369	0.720 0.310	0.780 0.253	0.840 0.189	0.900 0.124	0.960 0.061	1.000 0.000

Значения p помещены в столбце 19.

Строка 5 соответствует случаю, когда вся пластинка находится в чисто пластическом состоянии. Она заполняется при помощи формулы

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k + \frac{\Delta \bar{p}}{r_k} F(\bar{p}_k, \varphi_k)$$

полученной из уравнения (4.6). Вычисления обрываются на тех клетках, где



Фиг. 8

$\varphi > \pi/3$. Значение $\bar{p} = \frac{1}{2} \sqrt{p}$ вдоль Γ_b , т. е. при $\varphi = \pi/3$, находится путем линейной интерполяции и помещено в столбце 19.

Предельная равномерно распределенная нагрузка

$$p_{\max} = 11.4$$

Значения p находятся по формуле $p = \frac{2}{V \bar{p}}$

значения $\bar{\omega}^{ep}$ во всех клетках каждой строки при помощи формул

$$\bar{\omega}_{k-1} = \bar{\omega}_k + \Delta\rho \rho_k \frac{\sin(\psi_k + \omega)}{2\gamma_k \cos \omega}$$

полученных из уравнения (3.5).

В табл. 3 приведены $\bar{\omega}^e$, вычисленные по формуле (6.1). На фиг. 11 изображены кривые $\bar{\omega} = \bar{\omega}(\rho)$, соответствующие различным значениям χ_0 , а следова-

$\bar{\omega}^e$		ρ									
		0	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	
0.95	φ	0	0.005	0.018	0.042	0.074	0.114	0.162	0.216	0.275	
	ρ	0	0.002	0.004	0.006	0.007	0.009	0.011	0.013	0.015	
1.00	φ	0	0.005	0.018	0.042	0.074	0.114	0.162	0.216	0.275	
	ρ	0	0.012	0.024	0.036	0.048	0.060	0.072	0.084	0.096	
1.10	φ	0	0.005	0.018	0.042	0.074	0.114	0.162	0.216	0.275	
	ρ	0	0.031	0.062	0.093	0.124	0.156	0.187	0.218	0.249	
1.20	φ	0	0.005	0.018	0.042	0.074	0.114	0.162	0.216	0.275	
	ρ	0	0.043	0.087	0.130	0.174	0.217	0.261	0.304	0.348	
1.30	φ	0	0.005	0.018	0.042	0.074	0.114	0.162	0.216	0.275	
	ρ	0	0.051	0.102	0.153	0.204	0.255	0.306	0.357	0.408	
1.40	φ	0	0.005	0.018	0.042	0.074	0.114	0.162	0.216	0.275	
	ρ	0	0.056	0.111	0.116	0.222	0.278	0.333	0.388	0.444	
1.50	φ	0	0.005	0.018	0.042	0.074	0.114	0.162	0.216	0.275	
	ρ	0	0.058	0.116	0.174	0.232	0.290	0.347	0.405	0.463	
1.60	φ	0	0.005	0.018	0.042	0.074	0.114	0.162	0.216	0.275	
	ρ	0	0.059	0.118	0.177	0.236	0.296	0.354	0.414	0.473	
1.69	φ	0	0.005	0.018	0.042	0.074	0.114	0.162	0.216	0.275	
	ρ	0	0.059	0.118	0.178	0.237	0.296	0.353	0.414	0.474	

δ	φ	ρ			
		0.376	0.412	0.488	0.568
0.95	ρ	0.018	0.019	0.022	0.026
1.06	ρ		0.120	0.135	0.155
1.00	ρ			0.342	0.377
1.20	ρ				0.521
1.30	ρ				
1.40	ρ				
1.50	ρ				
1.60	ρ				
1.69	ρ				

тельно, различным значениям p . Точки, соответствующие $\rho = \gamma$, отмечены кружками. На фиг. 12 нанесена кривая, изображающая зависимость смещения w_0 в центре пластинки от p .

Приведем численное решение второго примера. Найдем зависимость между p_{\max} и δ . Пусть δ принимает значения $\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{z} = 0.93, 0.95, 1.00, 1.10, 1.20, 1.30, 1.40, 1.50, 1.60, 1.69$.

Таблица 4

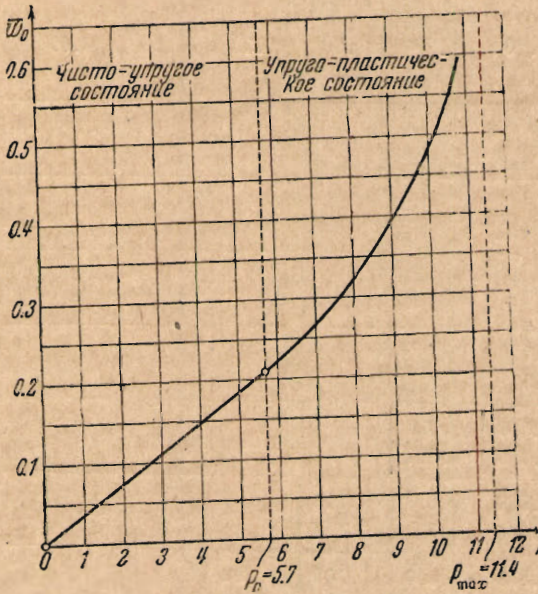
0.90	0.9306	0.95	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	1.60	1.69
0.341 0.017	0.364 0.017	0.376 0.018								
0.341 0.108	0.364 0.112	0.376 0.114	0.412 0.120							
0.341 0.280	0.364 0.290	0.376 0.296	0.412 0.311	0.488 0.342						
0.341 0.391	0.364 0.404	0.376 0.413	0.412 0.434	0.488 0.478	0.568 0.521					
0.341 0.459	0.364 0.475	0.376 0.485	0.412 0.510	0.488 0.562	0.568 0.613	0.658 0.664				
0.341 0.500	0.364 0.517	0.376 0.517	0.412 0.555	0.488 0.611	0.568 0.666	0.658 0.722	0.746 0.777			
0.341 0.521	0.364 0.539	0.376 0.550	0.412 0.579	0.488 0.637	0.568 0.695	0.658 0.753	0.746 0.811	0.843 0.869		
0.341 0.532	0.364 0.550	0.376 0.561	0.412 0.591	0.488 0.650	0.568 0.709	0.658 0.768	0.746 0.827	0.843 0.886	0.948 0.945	
0.341 0.533	0.364 0.550	0.376 0.563	0.412 0.592	0.488 0.651	0.568 0.710	0.658 0.770	0.746 0.829	0.843 0.888	0.948 0.947	1.047 1.000

Таблица 5

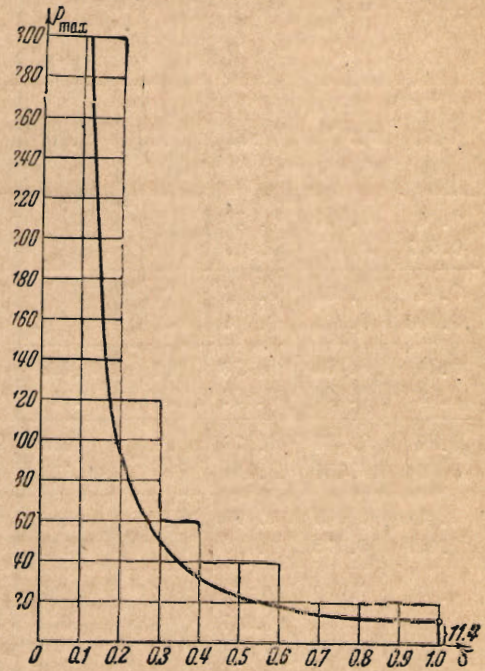
0.658	0.746	0.843	0.948	1.047
0.033	0.046	0.076	0.185	0.000
0.188	0.238	0.332	0.540	1.000
0.429	0.497	0.600	0.792	1.000
0.597	0.636	0.724	0.846	1.000
0.664	0.722	0.782	0.902	1.000
	0.777	0.838	0.915	1.000
		0.869	0.932	1.000
			0.945	1.000
				1.000

В табл. 4 занесены значения φ , вычисленные в 5 строке табл. 1. В каждой строке заполняются лишь клетки, для которых $\bar{\rho} \leq \bar{\delta}$, в табл. 5 заносятся значения ρ , вычисленные по формулам (6.5).

Значения φ и ρ , помещенные в диагональных клетках табл. 4 и 5 (эти клетки обведены жирными линиями), соответствуют окружности Γ_a .



Фиг. 12



Фиг. 13

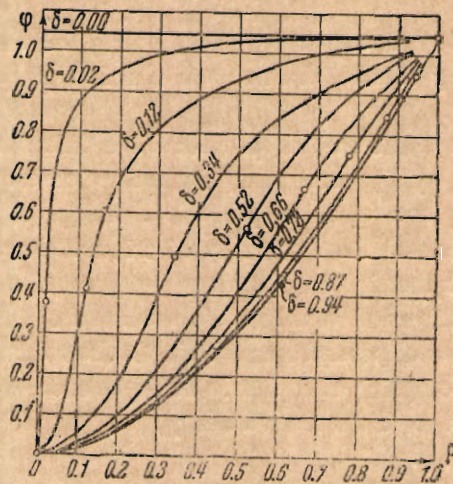
В табл. 6 помещены значения φ по окружности Γ_a , взятые из табл. 4, и значения δ и ρ_{max} , найденные по формулам (6.6) для $\sqrt{\frac{1}{2}V^3} = 0.93, 0.95, 1.00, 1.10, 1.20, 1.30, 1.40, 1.50, 1.60, 1.69$.

Таблица 6

$\bar{\delta}$	$\sqrt{\frac{V^3}{2}} = 0.93$	0.95	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	1.60	1.69
φ	0.364	0.376	0.412	0.488	0.568	0.654	0.746	0.843	0.948	1.047
δ	0	0.018	0.120	0.342	0.521	0.664	0.777	0.869	0.945	1.000
ρ_{max}	∞	11431.3	275.48	41.33	21.19	15.35	12.98	11.92	11.46	11.41

На фиг. 13 нанесена кривая, изображающая зависимость между ρ_{max} и δ .

Кривые, приведенные на фиг. 14, изображают зависимости φ от ρ для различных значений δ . Точки, соответствующие $\rho = \delta$, отмечены жирно.



Фиг. 14

Вычисления примеров выполнены Л. А. Телешевой и А. Л. Фигельман.

Поступила в редакцию
10 III 1944

Институт механики
Академии Наук СССР

W. W. SOKOLOVSKY.—ELASTICO-PLASTIC BENDING OF CIRCULAR PLATES AND PLANE RINGS

The work is devoted to the theory of bending of circular plates and plane rings under the action of a load $q = \bar{q}(r)$ distributed with axial symmetry. The cylindric system of coordinates r , θ and z are used in the paper, and $z = 0$ and $z = \pm h$ are the middle and boundary surfaces of the given plate respectively (fig. 1). The middle surface of the circular plate is bounded by a circle Γ_b and of the plate ring by two concentric circles Γ_a and Γ_b with the corresponding radii a and b .

The form of the plastic zone in an arbitrary cross-section $\theta = \text{const}$ is determined by a contour $z = \chi h$, where the value χ is a function of r and $0 \leq \chi \leq 1$ (fig. 2).

In section n^o1 are expounded the well known Hencky relationships for components of plastic stress and deformation, the hypothesis of incompressibility of the plastic material, the condition of plasticity of Mises and the condition of strain hardening following to the power law. Further, the usual hypothesis is accepted that the rectilinear elements normal to the middle surface in the stressed state remain rectilinear and normal to this surface after the bending.

This hypothesis permits the components of stresses σ_r and σ_θ both in elastic and plastic states to be expressed in terms of the vertical displacements w of the middle surface.

In sections nos 2, 3 and 4 the basic equations for the elasto-plastic and pure stressed states of a plate are considered.

By introducing new variables the equations are reduced to forms more suitable for solving the problems.

Section no 5 covers the conditions developing on the contour of plate as well as on the boundary of the elastic and elasto-plastic zones for the different cases of clamping.

In section no 6 two more special problems are discussed and the results are illustrated extensively by the study of a number cases.

For the first example a circular plate is considered resting freely on the contour under the action of the uniformly distributed load $q = \text{const}$ (fig. 3). The contours of the plastic zones in cross-section 1—1 for different values of load and the displacements w of the middle surface of the plate are then determined. The solution is expressed in terms of parameter χ_0 , which is the value χ at point O . In fig. 10 are given the curves bounding the plastic zones at cross-section 1—1 of the plate which correspond to the different values χ_0 and consequently correspond to different values of load q .

In fig. 11 are plotted the curves $w = w(r)$, while in fig. 12 is shown the relationship between the displacement w_0 at the centre of plate and the load q .

The results show that at same moment the plastic state occurs at the point O ($\chi_0 = 0$) the whole plate (fig. 4) succumbs to this state ($\chi = 0$). This phenomena represents the essential difference with the bending of a beam, where the purely plastic state at one middle point of the beam does not lead to the purely plastic state of the whole beam material (fig. 5).

The value of the uniformly distributed load q , for which the purely plastic state occurs at the point O and of course rough out the whole material of the circular plate is expressed by formula

$$q_{\max} = 11.4 kh^2 / b^2$$

In the second example a circular plate resting freely on its contours is considered under the action of a load $q = \text{const}$ uniformly distributed along a circle of the radius d (fig. 6).

The relationship is given between the value of load q_{\max} , for which the whole material of the plate is in a purely plastic state, and radius d (fig. 13).

The concentrated load Q at the centre of a circular plate O is also considered (fig. 6). The value $Q = Q_{\max}$, for which the whole material of the plate is in a purely plastic state, is expressed by the formula

$$Q_{\max} = 2\pi \sqrt{3} kh^2$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Упруго-пластическое равновесие цилиндрической трубы с учетом упрочнения материала. Прикладная математика и механика. Т. VII. Вып. 4. 1943.
2. Nádai, A. Plasticity. New York and London. 1931. (Русский перевод. Надаи А.—Пластичность, ОНТИ, 1936).
3. Ильюшин А. А. Вопросы теории пластических деформаций. Прикладная математика и механика. Т. VII. Вып. 4. 1943.