Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика, том VIII, 1944

О ВОЛНОВОМ СОПРОТИВЛЕНИИ ТЕЛ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

С. З. БЕЛЕНЬКИЙ

(Москва)

В заметке устанавливается из термодинамических соотношений связь между сопротивлением тел в сжимаемом газе и возрастанием энтропии в скачках уплотнения, образующихся при обтекании тел.

1. Известно, что при движении тел в сжимаемой жидкости при достаточно больших скоростях возникают скачки уплотнений. Эти скачки уплотнения, являющиеся поверхностями разрыва скоростей и давлений, неизбежно связаны с необратимыми потерями, а следовательно, и с возрастанием энтропии масс жидкости, проходящих через скачки и, как будет показано ниже, с увеличением сопротивления тел.

Из теории ударных волн нетрудно получить выражение для изменения энтропии при прохождении через скачок уплотнения. Найдем это выражение. Законы сохранения массы, импульса и энергии приводят к следующему равенству, связывающему изменение давления Δp с изменением плотности $\Delta\rho$ в скачке уплотнения (см., например, Т. Карман[1]):

$$\frac{\Delta p}{p} = k\frac{\Delta\rho}{\rho} : \left(1 + \frac{1-k}{2}\,\frac{\Delta\rho}{\rho}\right) \tag{1.1}$$

Здесь p и ρ — давление и плотность перед скачком уплотнения, $k = c_p/c_v$, где c_p — теплоемкость при постоянном давлении, c_v — теплоемкость при постоянном объеме.

Выражение для энтропии идеального газа, как зивестно, имеет вид

$$\frac{S}{R} = \frac{1}{k-1}\ln\frac{p}{\rho^k} + \mathrm{const} \tag{1.2}$$

где R — газовая постоянная. Следовательно, возрастание энтропии после скачка уплотнения можно представить формулой

$$\frac{\Delta S}{R} = \frac{1}{k-1}\left\{\ln\left(1+\frac{\Delta p}{p}\right) - \ln\left(1+\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)^k\right\} \tag{1.3}$$

Учитывая соотношение (1.1), получим

$$\frac{\Delta S}{R} = \frac{1}{k-1}\left\{\ln\left(1+\frac{1+k}{2}\,\frac{\Delta\rho}{\rho}\right) - \ln\left[\left(1+\frac{1-k}{2}\,\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)\left(1+\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)^k\right]\right\} \tag{1.4}$$

Это выражение можно разложить в ряд по степеням $\Delta\rho/\rho$. Имеем

$$\frac{\Delta S}{R} = \frac{1}{k-1}\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n} A_n\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)^n \tag{1.5}$$

где

$$A_n = \left(\frac{1-k}{2}\right)^n + k - \left(\frac{1+k}{2}\right)^n$$

Непосредственно видно, что первые два коэффициента разложения A_1 и A_2 обращаются в нуль, т. е. ряд начинается с члена, пропорционального третьей степени $\Delta\rho/\rho$.

Предположим, что $\Delta\rho / \rho \ll 1$ (слабые скачки уплотнения). Тогда, ограничиваясь первым не равным нулю, членом ряда (1.5), получим

$$\frac{\Delta S}{R} \approx \frac{k(k+1)}{12}\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)^3 \tag{1.6}$$

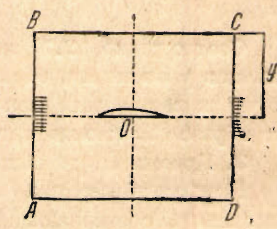
Соотоошения (1.1) — (1.6) справедливы как для прямого, так и для косого скачка уплотнения.

Для слабого косого скачка уплотнения $\dfrac{\Delta\rho}{\rho} \approx \dfrac{\varphi}{\cos\alpha\sin\alpha}$ (см., например, [1]), где α—угол Маха для течения перед скачком, а φ — угол отклонения вектора скорости после скачка, угол φ принимается малым. Для прямого скачка уплотнения $\Delta\rho / \rho — \lambda^2 — 1$ (см. [2]), где $\lambda = w / a^*$, w — скорость набегающего потока, a^* — критическая скорость; если λ близко к единице, что соответствует слабому скачку, то $\Delta\rho / \rho \approx 2(\lambda - 1)$. Таким образом для прямого и косого слабых скачков имеем соответственно приближенные формулы

$$\frac{\Delta S}{R} \approx \frac{2}{3}k(k+1)(\lambda-1)^3, \qquad \frac{\Delta S}{R} \approx \frac{k(k+1)\varphi^3}{12\sin^3\alpha\cos^3\alpha} \tag{1.7}$$

2. Выведем соотношение для сопротивления тела, обтекаемого сжимаемым газом, набегающим с постоянной скоростью. Применяя теорему количества движения к трубке тока (фиг. 1) между сечением перед телом AB (где скорость постоянна и равна u_1) и сечением за телом CD, получим при условии, что сечения достаточно велики

$$\int_{-y_2}^{+y_2}(p_1 - p_2)\,dy_2 - \int_{-y_2}^{+y_2}\rho_2 u_2^2\,dy_2 + \int_{-y_2}^{+y_2}\rho_1 u_1^2\,dy_1 = F_x \tag{2.1}$$



Фиг. 1

Здесь индекс 1 относится к величинам в плоскости AB, индекс 2 — к величинам в плоскости CD, F_x — сопротивление тела, равное изменению количества движения за обтекаемым телом.

Применяя к той же трубке тока уравнение сохранения массы, получим

$$\int_{-y_1}^{+y_1}\rho_1 u_1\,dy_1 = \int_{-y_2}^{+y_2}\rho_2 u_2\,dy_2 \tag{2.2}$$

Помножив уравнение (2.1) на u_1 и вычтя его из уравнения (2.2), находим

$$\int_{-y_2}^{+y_2}(p_1 - p_2)\,dy_2 - \int_{-y_2}^{+y_2}\rho_2 u_2(u_2 - u_1)\,dy_2 = F_x \tag{2.3}$$

Допустим, что контрольные сечения находятся на большом расстоянии друг от друга, и будем считать, что $p_2 - p_1 = \Delta p$ и $u_2 - u_1 = \Delta u$ — величины малые; пренебрежем величинами более высокого порядка малости. Тогда, переходя к пределу при $y_2 \to \infty$, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(\Delta p + \rho_1 u_1 \Delta u)\,dy_2 = -F_x \tag{2.4}$$

Теперь воспользуемся термодинамическими соотношениями для изменения энергии (полной тепловой функции) и энтропии

$$\Delta i_0 = \Delta i + u_1 \Delta u, \qquad T_1 \Delta S = \Delta i - \Delta p / \rho_1 \tag{2.5}$$

Здесь T — температура, S — энтропия, i_0 — полная тепловая функция, i — тепловая функция, $i_0 = i + \dfrac{1}{2}w^2$.

Из уравнений (2.5) можно выразить изменения давления и скорости через изменения энергии и энтропии. Сделав соответствующие простые преобразования, получим

$$F_x = \int_{-\infty}^{+\infty} (\rho_1 T_1 \Delta S - \rho_1 \Delta i_0)\, dy_2 \qquad (2.6)$$

Отсюда следует, что сопротивление неизбежно связано с изменением между контрольными сечениями или полной тепловой функции, т. е. энергии, или с изменением энтропии, т. е. с необратимым переходом механической энергии в тепловую. В случае адиабатического идеального течения в несжимаемой жидкости величины S и i_0 остаются постоянными и сопротивление равно нулю.

При обтекании тела потоком со сверхзвуковой скоростью или при местных сверхзвуковых зонах главную часть в сопротивлении составляет волновое сопротивление, обусловленное наличием скачков уплотнения.

В скачках уплотнения полная тепловая функция i_0 не меняется (см. [1] или [2]), поэтому, пренебрегая всеми видами сопротивления, кроме волнового, которое является основным, можно принять

$$F_{x\,\text{волн}} = p_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta S}{R}\, dy_2 \qquad (2.7)$$

Соотношение (2.7) непосредственно связывает сопротивление тела с конфигурацией скачков уплотнения, образующихся при обтекании тела между контрольными сечениями и увеличением энтропии в этих скачках. (Аналогичное соотношение совершенно таким же образом можно получить и для пространственного обтекания.)

3. Применим эти общие результаты к некоторым частным случаям.

Пользуясь выражением (2.7), можно вычислить лобовое сопротивление очень тонкой пластинки, составляющей малый угол φ с направлением набегающего сверхзвукового потока (крыло Аккерета). От переднего ребра пластинки будут исходить с верхней поверхности волны Маха, с нижней — косой скачок уплотнения, затем от заднего ребра пластинки, наоборот, с нижней поверхности будут итти волны Маха, а с верхней — косой скачок уплотнения. Скачки уплотнения будут пересекаться с волнами Маха, и интенсивность их будет убывать. Если подставить в уравнение (2.7) вторую формулу (1.7) для возрастания энтропии в слабом косом скачке уплотнения и произвести интегрирование по длине скачка, то получим для коэффициента волнового сопротивления $C_{x\,\text{волн}} = \frac{2F_x}{\rho v^2}$ известное выражение $\frac{4\varphi^2}{\sqrt{M^2-1}}$, где φ — угол атаки пластинки и M — число Маха набегающего потока [3].

С помощью уравнения (2.7) нетрудно также получить выражение для волнового сопротивления крыла при обтекании потоком с дозвуковой скоростью, но при наличии местных сверхзвуковых зон.

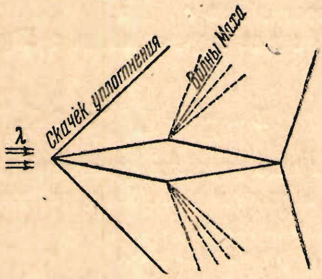
Волновое сопротивление при наличии местных сверхзвуковых зон было впервые вычислено Я. М. Серебрийским и С. А. Христиановичем [4]. Согласно допущению, принятому этими авторами, в образующейся над крылом сверхзвуковой зоне возникает прямой скачок уплотнения. Принимая, что скорость перед скачком мало отличается от скорости звука, можем использовать первую формулу (1.7); подставив ее в выражение (2.7), получим в согласии с результатом Серебрийского и Христиановича, что волновое сопротивление пропорционально $(\lambda-1)^3$ или $(M-M_{\text{кр}})^3$, где M — число Маха набегающего потока а $M_{\text{кр}}$ — число Маха набегающего потока, при котором на профиле возникает скорость, равная скорости звука.

[Подстановка в (2.7) разложения (1.5) дает совпадение не только с первым членом разложения по степени $(\lambda-1)$ формулы Серебрийского-Христиановича, но и с последующими пятью членами.]

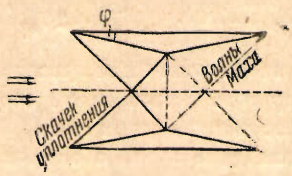
Мы оценили также (при обтекании плоским потоком со сверхзвуковой скоростью) волновое сопротивление ромба и двух треугольных дужек (биплан Буземана), причем эти дужки являются двумя половинами ромба, разрезанного вдоль большей диагонали (фиг. 2 и 3).

Из простых качественных соображений можно ожидать, что волновое сопротивление дужек при малых углах φ будет значительно меньше, чем сопротивление ромба. Сопротивление ромба, аналогично сопротивлению крыла Аккерета, будет пропорционально φ^2. Сопротивление симметричных дужек определяется согласно формуле (2.7) изменением энтропии в скачке уплотнения и длиной скачков уплотнения.

Но возрастание энтропии в косых скачках согласно второй формуле (1.7) пропорционально φ^3, а длина скачков при обтекании дужек в отличие от обтекания ромба не



Фиг. 2



Фиг. 3

зависит от угла φ и определяется расстоянием между дужками и числом Маха набегающего потока. Следовательно, волновое сопротивление дужек будет пропорционально φ^3, т. е. на порядок величины меньше, чем сопротивление ромба.

Для малых углов φ сопротивление биплана Буземана дается формулой

$$C_x = \frac{2F_x}{\rho\omega^2 b} = \frac{k+1}{3}\,\frac{M^4}{(M^2-1)^{3/2}}\,\varphi^3 \qquad (3.1)$$

где b—расстояние между дужками.

Более точный расчет сопротивления обеих систем на основе формул (1.4) и (2.7), проведенный в предположении, что обтекание происходит без срыва потока, подтверждает эти соображения.

Таким образом при сверхзвуковом течении интерференция, возникающая при обтекании двух тел, может привести к значительному уменьшению волнового сопротивления.

Поступила в редакцию
22 X 1943.

Центральный аэрогидродинамический институт

C. Z. BELENKY. CONCERNING THE WAVE RESISTANCE OF BODIES IN THE SUPER SOUND FLOW

Starting from thermodynamical laws the author considers the relationship between the resistance of a body in a compressible gas and the increasing of the entropy value in jumps of compression generating due to flow of gas past the body.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сборник «Газовая динамика». ОНТИ. 1939 [Стр. 75].
2. Франкль Ф., Христианович С. и Алексеева Р. Основы газовой динамики. Труды ЦАГИ. 1938. № 364.
3. Busemann. A. Gasdynamik. Handbuch d. exp. Physik. Bd. 4. 1931.
4. Серебрийский Я. М. и Христианович С. А. Труды ЦАГИ. 1943.