Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика, том VIII, 1944

ЗАМЕТКИ

ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПРОДОЛЬНО ВИБРИРУЮЩЕЙ ТРУБЕ

Г. В. АРОНОВИЧ

(Горький)

Известно [1], что вибрации бензопитающей системы на самолете влияют на скорость опорожнения баков. Рассматривая впервые это явление, В. А. Боднер [2], естественно, идеализирует постановку задачи и, в частности, оставляет в стороне вопрос о влиянии вибраций на величину гидравлического сопротивления трубопровода. Между тем вибрация трубопровода, вне зависимости от результатов приводимого ниже исследования, может существенным образом влиять на скорость движения жидкости. В связи с этим нами была рассмотрена задача о неустановившемся движении вязкой жидкости в круглой, продольно вибрирующей трубе. Отметим, что для случая неподвижной трубы решение аналогичной задачи было доложено Шиманским на третьем международном конгрессе по прикладной механике в Стокгольме в 1930 г. и опубликовано полностью в 1932 г (см. [3] и [4], стр. 205).

Пусть несжимаемая вязкая жидкость движется в прямой круглой трубе, совершающей произвольные продольные колебания около положения равновесия. Ось трубы примем за ось z и положим, что течение является одномерным, совпадающим по направлению с осью трубы. Пусть, скорость движения трубы $u=u(t)$ является заданной произвольной периодической функцией времени с периодом T, удовлетворяющей условию Дирихле. По величине функция $u(t)$ ограничена требованиями, чтобы течение было ламинарным.

Введем подвижную цилиндрическую систему координат, жестко связанную с трубой, и рассмотрим относительное движение жидкости. Между координатами подвижной и неподвижной координатных систем будет существовать следующая связь

$$r^*=r, \qquad \theta^*=\theta, \qquad z^*=z+\int_0^t u(t)\,dt$$

где значок * относится к неподвижной системе.

Тогда скорость абсолютного движения $v^*=v+u(t)$, а ускорение абсолютного движения $w^*=w+u'(t)$.

Из уравнения неразрывности следует, что относительная скорость v не зависит от координаты z, а в силу симметрии движения не зависит также от полярного угла θ. Таким образом скорость $v=v(r,t)$.

Предполагаем также, что массовые силы отсутствуют, а жидкость в начальный момент покоится по отношению к трубе. Тогда задача сводится к решению линейного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial q}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right)-u'(t) \tag{1}$$

при начальном и граничном условиях соответственно

$$v(r,0)=0, \qquad v(r_0,t)=0$$

где r_0 — радиус трубы, q — давление.

Примем также для общности, что градиент давления по оси трубы является заданной функцией времени

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial q}{\partial z}=\frac{1}{\rho}\frac{1}{l}\left(q_0(t)-q_1(t)\right)=h(t) \qquad (3)$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right)=h(t)-u'(t) \qquad (4)$$

Поставленная задача легко решается методами операционного исчисления (см. [4]). Применим к уравнению (4) преобразование Лапласа

$$\frac{1}{p}f(r,\ p)=\int_0^\infty e^{-pt}v(r,\ t)\,dt$$

где $p=s+i\sigma$—параметр.

Тогда в области изображения в силу начального условия (2) дело сведется к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения в полных производных вида

$$\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df}{dr}-\frac{p}{\nu}f=-\frac{H(p)}{\nu}+\frac{U'(p)}{\nu} \qquad (5)$$

где

$$\frac{1}{p}H(p)=\int_0^\infty e^{-pt}h(t)\,dt, \qquad \frac{1}{p}U'(p)=\int_0^\infty e^{-pt}u'(t)\,dt \qquad (6)$$

Решение уравнения (5) имеет вид

$$f(r,p)=C_1I_0\left(r\sqrt{\frac{p}{\nu}}\right)+C_2K_0\left(r\sqrt{\frac{p}{\nu}}\right)+\frac{H(p)}{p}-\frac{U'(p)}{p}$$

где K_0 и I_0—символы бесселевых функций нулевого порядка.

Так как на оси трубы при $r=0$ функция $f(r,\ p)$ должна быть величиной конечной, то коэффициент C_2 необходимо положить равным нулю.

Определим коэффициент C_1. Для этого используем граничное условие (2)

$$\frac{1}{p}f(r_0,\ p)=\int_0^\infty e^{-pt}v(r_0,t)=0$$

Тогда

$$C_1J_0\left(ir_0\sqrt{\frac{p}{\nu}}\right)+\frac{H(p)}{p}-\frac{U'(p)}{p}=0,\ \text{откуда}\ C_1=\frac{1}{J_0(ir_0\sqrt{p/\nu})}\left(\frac{U'(p)}{p}-\frac{H(p)}{p}\right)$$

Следовательно,

$$f(r,\ p)=\left(\frac{H(p)}{p}-\frac{U'(p)}{p}\right)\left(1-\frac{J_0(ir\sqrt{p/\nu})}{J_0(ir_0\sqrt{p/\nu})}\right) \qquad (7)$$

Чтобы вернуться к оригиналу, заметим, что (см. [4], стр. 207)

$$1-\frac{J_0(ir\sqrt{p/\nu})}{J_0(ir_0\sqrt{p/\nu})}\to 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha_k r/r_0)}{\alpha_k J_1(\alpha_k)}\exp\left(-\frac{\nu\alpha_k^2 t}{r_0^2}\right)$$

где положено $ir_0\sqrt{p/\nu}=\alpha$ и α_k—корень уравнения $J_0(\alpha)=0$.

Тогда, воспользовавшись теоремой Бореля, получим решение задачи в общем случае

$$v(r,\ t)=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha_k r/r_0)}{\alpha_k J_1(\alpha_k)}\exp\left(-\frac{\nu\alpha_k^2 t}{r_0^2}\right)\int_0^t\left(h(\zeta)-u'(\zeta)\right)\exp\left(\frac{\nu\alpha_k^2\zeta}{r_0^2}d\zeta\right) \qquad (8)$$

Положим теперь $h(t) = h = \mathrm{const}$. Тогда будем иметь (см. [4], стр. 207)

$$v(r, t) = \frac{h}{4\nu}\left[r_0^2 - r^2 - 8r_0^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_k r / r_0)}{\alpha_k^3 J_1(\alpha_k)} \exp - \left(\frac{\nu\alpha_k^2 t}{r_0^2}\right)\right] -$$

$$- 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_k r / r_0)}{\alpha_k J_1(\alpha_k)} \exp\left(-\frac{\nu\alpha_k^2 t}{r_0^2}\right) \int_0^t \exp\left(\frac{\nu\alpha_k^2 \zeta}{r_0^2}\right) u'(\zeta)\, d\zeta \tag{9}$$

что совпадает для случая $u'(t) = 0$ с выражением, приведенным у Лурье.

Разложим функцию $u(t)$ в ряд Фурье

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin\frac{2\pi nt}{T}, \tag{10}$$

где

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\, dt, \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}\, dt, \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}\, dt$$

Подставляя выражение для $u'(t)$ согласно (10) в разложение (8), после интегрирования будем иметь

$$v(r, t) = \frac{h}{4\nu}\left[r_0^2 - r^2 - 8r_0^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_k r / r_0)}{\alpha_k^3 J_1(\alpha_k)} \exp\left(-\frac{\nu\alpha_k^2 t}{r_0^2}\right)\right] +$$

$$+ \frac{4\pi}{T}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_k r / r_0)}{\alpha_k J_1(\alpha_k)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\nu^2\alpha_k^4 / r_0^4 + 4\pi^2 n^2 / T^2}\left[a_n\left(\frac{\nu\alpha_k^2}{r_0^2}\sin\frac{2\pi nt}{T} - \frac{2\pi n}{T}\cos\frac{2\pi nt}{T}\right) -\right.$$

$$\left. - b_n\left(\frac{\nu\alpha_k^2}{r_0^2}\cos\frac{2\pi nt}{T} + \frac{2\pi n}{T}\sin\frac{2\pi nt}{T}\right) + \left(a_n\frac{2\pi n}{T} + b_n\frac{\nu\alpha_k^2}{r_0^2}\right)\exp\left(-\frac{\nu\alpha_k^2 t}{r_0^2}\right)\right] \tag{11}$$

При $t \to \infty$

$$v_\infty(r, t) = \frac{h}{4\nu}(r_0^2 - r^2) + \frac{4\pi}{T}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_k r / r_0)}{\alpha_k J_1(\alpha_k)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\nu^2\alpha_k^4 / r_0^4 + 4\pi^2 n^2 / T^2}\left[a_n\left(\frac{\nu\alpha_k^2}{r_0^2}\sin\frac{2\pi nt}{T} -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{2\pi n}{T}\cos\frac{2\pi nt}{T}\right) - b_n\left(\frac{\nu\alpha_k^2}{r_0^2}\cos\frac{2\pi nt}{T} + \frac{2\pi n}{T}\sin\frac{2\pi nt}{T}\right)\right] \tag{12}$$

Из формулы (12) следует, что скорость течения можно рассматривать как результат наложения на течение Пуазейля одномерных возмущений, вызванных движением стенок трубы. Это обстоятельство является следствием линейности нашей задачи.

Средняя скорость $\bar{v}$ потока на радиусе r за время одного колебания

$$\bar{v} = \frac{1}{T}\int_0^T v_\infty dt = \frac{h}{4\nu}(r_0^2 - r^2) = \frac{1}{4\mu l}(q_0 - q_1)(r_0^2 - r^2) \tag{13}$$

Так как скорость v^* в абсолютном движении определяется выражением $v^* = v_\infty(r, t) + u(t)$, где $u(t)$ согласно (10), то средняя абсолютная скорость за период

$$\bar{v}^* = a_0 + \frac{1}{4\mu l}(q_0 - q_1)(r_0^2 - r^2) \tag{14}$$

Коэффициент a_0 характеризует собой жесткое смещение трубы в одном направлении В случае периодических колебаний трубы по любому закону около положения равновесия (что практически наиболее вероятно) коэффициент $a_0 = 0$.

Из полученных формул видно, что жидкость в среднем будет двигаться по закону Пуазейля. Следовательно, чисто продольные вибрации трубопровода в условиях ламинарного режима не вызовут изменения средней скорости движения жидких частиц, т. е. по отношению к этим произвольным по величине возмущениям средний поток, совпадающий с потоком Пуазейля, будет устойчивым. Тем самым не изменится в среднем и гидравлическое сопротивление трубы. Полученный результат находится в полном соответствии с общетеоретическим выводом, который нетрудно получить из рассмотрения кинетической энергии возмущающего движения (см., например, [3], стр. 206). Следует отметить, что для случая бесконечно малых осесимметричных возмущений устойчивость пуазейлева течения в неподвижной трубе была в свое время доказана Th. Sexl [5].

Рассмотрим частный случай. Пусть $u(t)=v_0 \sin \omega t$, следовательно, $n=1$ и $b_1=v_0$. Тогда по формуле (12)

$$v_\infty(r,\ t)=\frac{q_0-q_1}{4\mu l}(r_0^2-r^2)-(A\cos\omega t+B\sin\omega t) \tag{14}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} A&=2\omega v_0\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha_k r/r_0)}{\alpha_k J_1(\alpha_k)}\,\frac{\nu\alpha_k^2/r_0^2}{\nu^2\alpha_k^4/r_0^4+\omega^2}\\ B&=2\omega v_0\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha_k r/r_0)}{\alpha_k J_1(\alpha_k)}\,\frac{\omega}{\nu^2\alpha_k^4/r_0^4+\omega^2} \end{aligned} \tag{15}$$

Из приведенных выше формул нетрудно определить время, в течение которого вырабатывается стационарный (с заданной точностью) профиль скоростей. Нетрудно также показать, что указанное время будет зависеть от закона периодического движения трубы. Каков бы, однако, этот закон ни был, в конце концов сформируется поток с профилем Пуазейля для осредненной во времени скорости.

В заключение определим силу трения на стенке. В общем случае движения сила трения

$$\tau=-\mu\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_{r=r_0}=-\frac{2\mu}{r_0}\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{\nu\alpha_k^2 t}{r_0^2}\right)\int_0^t\left(\exp\frac{\nu\alpha_k^2\zeta}{r_0^2}\right)\left(h(\zeta)-u'(\zeta)\right)d\zeta \tag{16}$$

Сила трения при постоянном перепаде давления $h=\text{const}$ и $t\to\infty$

$$\begin{aligned}\tau=\frac{1}{2l}(q_0-q_1)r_0-\frac{4\pi\mu}{Tr_0}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\nu^2\alpha_k^4/r_0^4-4\pi^2n^2/T^2}\Big[a_n\left(\frac{\nu\alpha_k^2}{r_0^2}\sin\frac{2\pi nt}{T}-\frac{2\pi n}{T}\cos\frac{2\pi nt}{T}\right)-\\ -b_n\left(\frac{\nu\alpha_k^2}{r_0^2}\cos\frac{2\pi nt}{T}+\frac{2\pi n}{T}\sin\frac{2\pi nt}{T}\right)\Big]\end{aligned}$$

При чисто синусоидальном движении трубы

$$\tau=\frac{(q_0-q_1)r_0}{2l}+\frac{4\pi\mu v_0}{Tr_0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2\alpha_k^4/r_0^4+\omega^2}\left(\frac{\nu\alpha_k^2}{r_0^2}\cos\omega t+\omega\sin\omega t\right) \tag{17}$$

Приведем еще выражения для работы, которую надо затратить за период при колебаниях для преодоления силы трения. На отрезок трубы длиной l действует сила $Q-2\pi r_0 l\tau$. Тогда указанная работа в общем случае (при h=const)

$$R=\int_0^T 2\pi r_0 l\tau u\,dt=2\pi r_0 l\left\{\frac{(q_0-q_1)r_0 a_0 T}{2l}+\frac{4\pi^2\mu}{Tr_0}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\nu^2\alpha_k^4/r_0^4+4\pi^2n^2/T^2}(a_n^2+b_n^2)\right.$$

При чисто синусоидальном движении трубы

$$R=4\pi^2\omega l\mu v_0^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2\alpha_k^4/r_0^4+\omega^2}$$

В заключение отметим, что по самой своей постановке задача свелась к исследованию устойчивости ламинарного режима при наложении возмущения, обусловленных граничными условиями. Нам кажется, что подобного рода исследования с физической точки зрения имеют некоторые преимущества перед обычным способом рассмотрения таких задач, когда происхождение накладываемых возмущений неизвестно.

Поступила в редакцию
10 XII 1943.

G. V. ARONOVITCH. MOTION OF A VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID IN A CIRCULAR TUBE VIBRATING LONGITUDINALLY

The problem expressed in the title of this article is considered for the unsteady laminar flow arising from the state of rest due to a given pressure. It is shown that independently of the law of oscillations the average velocity of the generating flow is governed by the law of Poiseille. The conclusion which can be drawn, that the average flow estimated is steady relative to the one-dimensional disturbances of an arbitrary value arising due to the vibration of the tube. It means that the longitudinal oscillations of the tube for the laminar state of flow do not generate an average estimated additional hydraulic resistance. The expression for the viscous friction acting along the surface of the vibrating-tube is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. Поликовский В. И. и Тихонов Н. И. О влиянии вибраций бака на скорость его опорожнения. Техника воздушного флота, № 7—8. 1939.
2. Боднер В. А. К вопросу о влиянии вибрации бака на скорость его опорожнения. Инженерный сборник. 1943. Т. II. Вып. I.
3. Аэродинамика. Под редакцией В. Ф. Дюренда. Оборонгиз, 1939. Т. III.
4. Лурье А. И. Операционное исчисление в приложении к задачам механики. ОНТИ. 1938.
5. Sexl Th. Zur Stabilitätsfrage der Poiseilleschen und Couetteschen Strömung. Ann. d. Physik. Bd. 83. 1927. S. 835 u. Bd. 84. S. 807.