Институт механики Академии Наук Союза ССР

Прикладная математика и механика, том VIII, 1944

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ ПОЛОГО ШАРА ПРИ НАЛИЧИИ УПРОЧНЕНИЯ МАТЕРИАЛА

В. В. СОКОЛОВСКИЙ

(Москва)

Вопрос об упруго-пластическом равновесии полого шара, находящегося под действием равномерного внутреннего и внешнего давлений, имеет много общего с вопросом об упруго-пластическом равновесии цилиндрической трубы.

Задача о нахождении упруго-пластического напряженного состояния цилиндрической трубы приводит, как показано в нашей работе [1], к некоторой системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений, для решения которых могут быть применены эффективные численные методы.

Задача об определении упруго-пластического напряженного состояния полого шара при наличии упрочнения материала[1] решается в квадратурах.

§ 1. Основные соотношения. Принимаем начало координат в центре O полого шара и вводим полярные координаты r, θ и φ. Радиусы внутренней S_a и внешней S_b сфер будем обозначать через a и b.

Вследствие полярной симметрии задачи границей упругой и пластической областей является сфера S_c с центром в точке O, радиус которой мы обозначаем через c.

Напряженное состояние определяется компонентами напряжения σ_r, σ_θ и компонентами деформации ε_r, ε_θ.

Будем пользоваться безразмерными величинами

$$\rho=\frac{r}{b}, \qquad \alpha=\frac{a}{b}, \qquad \gamma=\frac{c}{b}, \qquad \gamma^*=\frac{c^*}{b}, \qquad \bar{\sigma}_r=\frac{\sigma_r}{k}, \qquad \bar{\sigma}_\theta=\frac{\sigma_\theta}{k},$$

$$\bar{\varepsilon}_r=\frac{G}{k}\varepsilon_r \qquad \bar{\varepsilon}_\theta=\frac{G}{k}\varepsilon_\theta \qquad \bar{u}=\frac{G}{kb}u.$$

Условимся эти безразмерные величины называть так же, как называются соответствующие величины, имеющие размерность.

Через k обозначена величина

$$k=\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$$

где σ_s — предел текучести при простом растяжении.

Граничные условия на сферах S_a и S_b могут быть записаны в виде

$$\bar{\sigma}_r=-p \quad \text{при} \quad \rho=\alpha, \qquad \bar{\sigma}_r=-q \quad \text{при} \quad \rho=1$$

---

[1] Решение этой задачи для случая идеальной пластичности (без упрочнения) было дано в работах Г. Генки [2] и Л. С. Лейбензона [3].

Выражения интенсивности напряжения сдвига $\overline{T}$ и интенсивности деформации сдвига $\overline{E}$ (по терминологии Г. Генки) напишутся в виде

$$\overline{T} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta \right|, \qquad \overline{E} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left| \bar{\varepsilon}_r - \bar{\varepsilon}_\theta \right|$$

Как в упругом ($\overline{E} \leqslant 1$), так и в пластическом ($\overline{E} \geqslant 1$) состояниях материала имеет место зависимость

$$\varepsilon = \omega \sigma \tag{1}$$

где

$$3\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_r + 2\bar{\varepsilon}_\theta, \qquad 3\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_r + 2\bar{\sigma}_\theta, \qquad \omega = \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)}$$

ν — коэффициент Пуассона.

При упругом состоянии ($\overline{E} \leqslant 1$) применяются соотношения Р. Гука

$$2(\bar{\varepsilon}_r - \bar{\varepsilon}) = \bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}, \qquad 2(\bar{\varepsilon}_\theta - \bar{\varepsilon}) = \bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma} \tag{1.2}$$

Из формул (1.1) и (1.2) имеем

$$3\bar{\varepsilon}_r = \omega(\bar{\sigma}_r + 2\bar{\sigma}_\theta) + (\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta), \qquad 3\bar{\varepsilon}_\theta = \omega(\bar{\sigma}_r + 2\bar{\sigma}_\theta) - \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta) \tag{1.3}$$

В пластическом состоянии материала ($\overline{E} \geqslant 1$) принимаются соотношения Г. Генки[4]

$$2(\bar{\varepsilon}_r - \bar{\varepsilon}) = \psi(\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}), \qquad 2(\bar{\varepsilon}_\theta - \bar{\varepsilon}) = \psi(\bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}) \tag{1.4}$$

Из формул (1.1) и (1.4) имеем

$$\begin{gathered} 3\bar{\varepsilon}_r = \omega(\bar{\sigma}_r + 2\bar{\sigma}_\theta) + \psi(\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta) \\ 3\bar{\varepsilon}_\theta = \omega(\bar{\sigma}_r + 2\bar{\sigma}_\theta) - \frac{1}{2}\psi(\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta) \end{gathered} \tag{1.5}$$

Далее, используется условие упрочнения материала Р. Шмидта [5]

$$\overline{T} = \overline{F}(\overline{E}) \tag{1.6}$$

Функция $\overline{F}$, зависящая от материала, определяется экспериментально [1]. Если ввести функцию $f(\psi)$, определенную уравнением

$$f(\psi) = \overline{F}[\psi f(\psi)] \tag{1.7}$$

то в силу (1.1) и (1.4) условие (1.6) может быть преобразовано к виду

$$\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta = -\varkappa \sqrt{3} f(\psi) \tag{1.8}$$

где $\varkappa = \pm 1$.

Между компонентами деформации и радиальным смещением имеют место зависимости

$$\bar{\varepsilon}_r = \frac{d\bar{u}}{d\rho}, \qquad \bar{\varepsilon}_\theta = \frac{\bar{u}}{\rho}$$

Из этих уравнений следует условие совместности деформаций

$$\frac{d\bar{\varepsilon}_\theta}{d\rho} + \frac{\bar{\varepsilon}_\theta - \bar{\varepsilon}_r}{\rho} = 0 \tag{1.9}$$

и формула для определения радиального смещения

$$\bar{u} = \rho \bar{\varepsilon}_\theta \tag{1.10}$$

---

[1] В нашей статье [1] мы пользовались функцией F, причем $\overline{F}(x) = F\left(\frac{k}{G}x\right)$.

§ 2. Решение упруго-пластической задачи. Пластическое напряженное состояние описывается уравнением равновесия

$$\frac{d\bar{\sigma}_r}{d\rho} + 2\frac{\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta}{\rho} = 0 \tag{2.1}$$

условием упрочнения

$$\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta = -\varkappa\sqrt{3}\, f(\psi) \tag{1.6}$$

и уравнением (1.9), преобразованным при помощи (1.5),

$$2\omega\frac{d}{d\rho}(\bar{\sigma}_r + 2\bar{\sigma}_\theta) - \psi\frac{d}{d\rho}(\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta) - (\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta)\frac{d\psi}{d\rho} - 3\frac{\psi(\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta)}{\rho} = 0 \tag{2.2}$$

Уравнения (1.6), (2.1) и (2.2) содержат три неизвестные функции $\bar{\sigma}_r$, $\bar{\sigma}_\theta$ и ψ.

Для удобства решения задачи переменные $\bar{\sigma}_r$, $\bar{\sigma}_\theta$ и ρ рассматриваются как искомые функции, а ψ принимается за независимое переменное. Вместо уравнений (2.1) и (2.2) имеем

$$\frac{d\bar{\sigma}_r}{d\psi} + 2(\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta)\frac{d\ln\rho}{d\psi} = 0 \tag{2.3}$$

$$2\omega\frac{d}{d\psi}(\bar{\sigma}_r + 2\bar{\sigma}_\theta) - \psi\frac{d}{d\psi}(\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta) - 3\psi(\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta)\frac{d\ln\rho}{d\psi} - (\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta) = 0 \tag{2.4}$$

Будем в дальнейшем буквами e и p отмечать компоненты напряжения и деформации соответственно в упругой и пластических областях.

Решение системы трех уравнений (1.6), (2.3) и (2.4) имеет вид

$$\begin{gathered}\bar{\sigma}_r{}^p = -\frac{2\varkappa}{\sqrt{3}}\left[f(\psi) + \int_1^\psi \frac{f(\psi)}{\psi + 4\omega}\,d\psi\right] + C_2 \\ \bar{\sigma}_\theta{}^p = +\frac{2\varkappa}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{2}f(\psi) - \int_1^\psi \frac{f(\psi)}{\psi + 4\omega}\,d\psi\right] + C_2\end{gathered} \tag{2.5}$$

$$\rho^3 = \frac{C_1}{(\psi + 4\omega)\,f(\psi)} \tag{2.6}$$

В упругой области $\gamma \leqslant \rho \leqslant 1$ компоненты напряжения выражаются известными из теории упругости формулами

$$\bar{\sigma}_r{}^e = \frac{C}{\rho^3} + D, \qquad \bar{\sigma}_\theta{}^e = -\frac{C}{2\rho^3} + D$$

где C и D — постоянные интегрирования.

Определяя D из условия на внешней граничной сфере S_b, получим

$$\bar{\sigma}_r{}^e = -q + C\left(\frac{1}{\rho^3} - 1\right), \qquad \bar{\sigma}_\theta{}^e = -q - C\left(\frac{1}{2\rho^3} + 1\right) \tag{2.7}$$

Мы предполагаем, что при переходе через границу упругой и пластической областей все компоненты напряжения и деформации изменяются непрерывно и, следовательно, на сфере S_c

$$\text{при } \rho = \gamma \qquad \bar{\sigma}_r{}^p = \bar{\sigma}_r{}^e, \qquad \bar{\sigma}_\theta{}^p = \bar{\sigma}_\theta{}^e, \qquad \psi = 1 \tag{2.8}$$

Отсюда в силу (1.8) следует, что

$$\text{при } \rho = \gamma \qquad \bar{\sigma}_r{}^e - \bar{\sigma}_\theta{}^e = -\varkappa\sqrt{3}\,f(1)$$

Это условие дает возможность выразить постоянную интегрирования C через γ

$$C = -\frac{2\varkappa}{\sqrt{3}} \gamma^3 f(1), \qquad \text{где } \varkappa = \pm 1.$$

Имеем

$$\bar{\sigma}_r^e = -q - \frac{2\varkappa}{\sqrt{3}} \gamma^3 f(1) \left(\frac{1}{\rho^3} - 1\right), \qquad \sigma_\theta^e = -q + \frac{2\varkappa}{\sqrt{3}} \gamma^3 f(1) \left(\frac{1}{2\rho^3} + 1\right) \quad (2.9)$$

где $\varkappa = \pm 1$. Уравнения (1.3) и (1.10) дают

$$\bar{u}^e = \omega\rho \left[-q + \frac{2\varkappa}{\sqrt{3}} \gamma^3 f(1) \left(\frac{1}{4\omega} \frac{1}{\rho^3} + 1\right) \right] \quad (2.10)$$

Формулы (2.9) — (2.10) определяют два решения в зависимости от выбора знака $\varkappa$. Из условия на сфере S_c (при $\rho = \gamma$), когда она совпадает с внутренней граничной сферой $S_a^{\cdot}$ (при $\gamma = \alpha$), т. е. в момент возникновения пластической области, ясно, что[1] $\varkappa = \operatorname{sign}(p - q)$.

Таким образом знак $\varkappa$ определяется однозначно из граничных условий. В момент возникновения пластической деформации

$$p_0 = q + \frac{2\varkappa}{\sqrt{3}} f(1)(1 - \alpha^3)$$

В пластической области $\alpha \leqslant \rho \leqslant \gamma$ определение компонент напряжения и радиального смещения сводится к нахождению постоянных интегрирования из условий (2.8) на сфере S_c. Имеем

$$\bar{\sigma}_r^p = -q - \frac{2\varkappa}{\sqrt{3}} \left[f(\psi) - \gamma^3 f(1) + \int_1^\psi \frac{f(\psi)}{\psi + 4\omega} d\psi \right]$$

$$\sigma_\theta^p = -q + \frac{2\varkappa}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{2} f(\psi) + \gamma^3 f(1) - \int_1^\psi \frac{f(\psi)}{\psi + 4\omega} d\psi \right] \quad (2.11)$$

Уравнения (1.5) и (1.10) дают

$$\bar{u}^p = \omega\rho \left\{ -q + \frac{2\varkappa}{\sqrt{3}} \left[\gamma^3 f(1) - \int_1^\psi \frac{f(\psi)}{\psi + 4\omega} d\psi \right] \right\} + \frac{\varkappa}{2\sqrt{3}} \rho\psi f(\psi) \quad (2.12)$$

Величина ψ определена как функция ρ равенством

$$\rho^3 = \gamma^3 \frac{(1 + 4\omega) f(1)}{(\psi + 4\omega) f(\psi)}$$

Внутреннее давление дается формулой

$$p = q + \frac{2\varkappa}{\sqrt{3}} \left[f(\tilde{\psi}) - \gamma^3 f(1) + \int_1^{\tilde{\psi}} \frac{f(\psi)}{\psi + 4\omega} d\psi \right]$$

причем $\tilde{\psi}$ находится из уравнения

$$\alpha^3 (\tilde{\psi} + 4\omega) f(\tilde{\psi}) = \gamma^3 (1 + 4\omega) f(1)$$

Построенное решение дает возможность достаточно эффективно проводить практические расчеты. Покажем, какой вид принимает построенное решение для простейших частных случаев функции F.

---

[1] Функция $\operatorname{sign} x$ определена равенствами:

$$\operatorname{sign} x = +1 \quad (x > 0), \quad \operatorname{sign} x = -1 \quad (x < 0), \quad \operatorname{sign} 0 = 0.$$

a) Идеальная пластичность

$$\bar{T}=1 \quad \text{для} \quad \bar{E}\geqslant 1 \tag{1.6a}$$

Функция f будет

$$f(\psi)=1 \quad \text{для} \quad \psi\geqslant 1 \tag{1.7a}$$

По формулам (2.9) и (2.10) имеем

$$\bar{\sigma}_r{}^e=-q-\frac{2\varkappa}{\sqrt{3}}\gamma^3\left(\frac{1}{\rho^3}-1\right), \quad \bar{\sigma}_\theta{}^e=-q+\frac{2\varkappa}{\sqrt{3}}\gamma^3\left(\frac{1}{2\rho^3}+1\right) \tag{2.9a}$$

$$\bar{u}^e=\omega\rho\left[-q+\frac{2\varkappa}{\sqrt{3}}\gamma^3\left(\frac{1}{4\omega}\frac{1}{\rho^3}+1\right)\right] \tag{2.10a}$$

По формулам (2.11) и (2.12) имеем

$$\bar{\sigma}_r{}^p=-p+2\varkappa\sqrt{3}\ln\frac{\rho}{\alpha} \qquad \bar{\sigma}_\theta{}^p=-p+\varkappa\sqrt{3}\left(1+2\ln\frac{\rho}{\alpha}\right) \tag{2.11a}$$

$$\bar{u}^p=\omega\rho\left[-p+\frac{2\varkappa}{\sqrt{3}}\left(\frac{1+4\omega}{4\omega}\frac{\gamma^3}{\rho^3}+3\ln\frac{\rho}{\alpha}\right)\right] \tag{2.12a}$$

Внутреннее давление дается формулой

$$p=q+\frac{2\varkappa}{\sqrt{3}}\left(1-\gamma^3+3\ln\frac{\gamma}{\alpha}\right)$$

Формулы (2.9 a) и (2.11a) при $q=0$ совпадают с формулами, приведенными в книге Л. С. Лейбензона [3].

b) Линейное упрочнение[1]

$$\begin{aligned}\bar{T}&=1 &&\text{для} \quad 1\leqslant\bar{E}\leqslant\frac{1-N}{M}\\ \bar{T}&=M\bar{E}+N &&\text{для} \quad \bar{E}\geqslant\frac{1-N}{M}\end{aligned} \tag{1.6b}$$

где M и N—постоянные, зависящие от материала[2].

Функция $f(\psi)$ определена равенствами

$$\begin{aligned}f(\psi)&=1 &&\text{для} \quad 1\leqslant\psi\leqslant\frac{1-N}{M}\\ f(\psi)&=\frac{N}{1-M\psi} &&\text{для} \quad \psi\geqslant\frac{1-N}{M}\end{aligned} \tag{1.7b}$$

Компоненты упругого напряжения $\bar{\sigma}_r{}^e$, $\bar{\sigma}_\theta{}^e$ и радиальное смещение $\bar{u}^e$ попрежнему даются формулами (2.9a) и (2.10a).

По формулам (2.11) имеем:

для $\alpha\leqslant\rho\leqslant\gamma^*$

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_r{}^p&=-p+\frac{2\varkappa}{\sqrt{3}(1+4\omega M)}\left[M(1+4\omega)\frac{\gamma^3}{\alpha^3}\left(1-\frac{\alpha^3}{\rho^3}\right)+3N\ln\frac{\rho}{\alpha}\right]\\ \bar{\sigma}_\theta{}^p&=-p+\frac{2\varkappa}{\sqrt{3}(1+4\omega M)}\left[M(1+4\omega)\frac{\gamma^3}{\alpha^3}\left(1+\frac{\alpha^3}{2\rho^3}\right)+\frac{3}{2}N\left(1+2\ln\frac{\rho}{\alpha}\right)\right]\end{aligned} \tag{2.11b}$$

причем

$$p=q-\frac{2\varkappa}{\sqrt{3}}\gamma^3+\frac{2\varkappa}{\sqrt{3}(1+4\omega M)}\left[M(1+4\omega)\frac{\gamma^3}{\alpha^3}+\right.$$
$$\left.+(1-N+4\omega M)\ln\frac{1-N+4\omega M}{M(1+4\omega)}+N\left(1+3\ln\frac{\gamma}{\alpha}\right)\right]$$

---

[1] Случай линейного упрочнения при $M=1-N$ был рассмотрен К. Н. Шевченко.

[2] В нашей статье [1] применялись постоянные m и n, причем

$$M=m\frac{k}{G}, \quad N=n.$$

для $\gamma^* \leqslant \rho \leqslant \gamma$

$$\bar{\sigma}_r^p = -q - \frac{2\varkappa}{\sqrt{3}}\left(1 - \gamma^3 + 3\ln\frac{\gamma}{\rho}\right), \quad \bar{\sigma}_\theta^p = -q + \frac{2\varkappa}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2} + \gamma^3 - 3\ln\frac{\gamma}{\rho}\right) \tag{2.11b}$$

Формулы (2.12) дают:

для $\alpha \leqslant \rho \leqslant \gamma^*$

$$\bar{u}^p = \omega\rho\left\{-p + \frac{2\varkappa}{\sqrt{3}\,(1+4\omega M)}\left[(1+4\omega)\frac{\gamma^3}{\alpha^3}\left(M + \frac{1}{4\omega}\frac{\alpha^3}{\rho^3}\right) + 3N\ln\frac{\rho}{\alpha}\right]\right\} \tag{2.12b}$$

для $\gamma^* \leqslant \rho \leqslant \gamma$

$$\bar{u}^p = \omega\rho\left[-q + \frac{2\varkappa}{\sqrt{3}}\left(\frac{1+4\omega}{4\omega}\frac{\gamma^3}{\rho^3} - 3\ln\frac{\gamma}{\rho} - 1 + \gamma^3\right)\right] \tag{2.12b}$$

здесь

$$\gamma^* = \gamma M^{1/3}(1+4\omega)^{1/3}(1 - N + 4\omega M)^{-1/3}$$

определяет сферу S_{c^*} радиуса c^*, отделяющую идеально пластическую область от области линейного упрочнения ($\gamma^* = c^*/b$).

c) Степенное упрочнение

$$\bar{T} = 1 \quad \text{для} \quad 1 \leqslant \bar{E} \leqslant M^{-1/\mu}; \qquad \bar{T} = M\bar{E}^\mu \quad \text{для} \quad \bar{E} \geqslant M^{-1/\mu} \tag{1.6c}$$

где M и μ — постоянные, зависящие от материала[1] ($0 \leqslant \mu < 1$).

Функция $f(\psi)$ определяется равенствами:

$$f(\psi) = 1 \quad \text{для} \quad 1 \leqslant \psi \leqslant M^{-1/\mu}; \quad f(\psi) = M^{\frac{1}{1-\mu}}\psi^{\frac{\mu}{1-\mu}} \quad \text{для} \quad \psi \geqslant M^{-1/\mu} \tag{1.7c}$$

Компоненты упругого напряжения $\bar{\sigma}_r^e$, $\bar{\sigma}_\theta^e$ и радиальное смещение $\bar{u}^e$ попрежнему даются формулами (2.9a) и (2.10a).

По формулам (2.11) имеем:

для $\alpha \leqslant \rho \leqslant \gamma^*$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r^p &= -q - \frac{2\varkappa}{\sqrt{3}}\left[M^{\frac{1}{1-\mu}}\psi^{\frac{\mu}{1-\mu}} - \gamma^3 + \ln\frac{\psi^* + 4\omega}{1+4\omega} + M^{\frac{1}{1-\mu}}\int_{\psi_*}^{\psi}\frac{\psi^{\frac{\mu}{1-\mu}}\,d\psi}{\psi + 4\omega}\right] \\ \bar{\sigma}_\theta^p &= -q + \frac{2\varkappa}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{2}M^{\frac{1}{1-\mu}}\psi^{\frac{\mu}{1-\mu}} + \gamma^3 - \ln\frac{\psi^* + 4\omega}{1+4\omega} - M^{\frac{1}{1-\mu}}\int_{\psi^*}^{\psi}\frac{\psi^{\frac{\mu}{1-\mu}}\,d\psi}{\psi + 4\omega}\right] \end{aligned} \tag{2.11c}$$

где

$$\psi^* = M^{-\frac{1}{\mu}}, \qquad \rho^3 = \gamma^3\,\frac{1+4\omega}{\psi + 4\omega}\,M^{-\frac{1}{1-\mu}}\,\psi^{-\frac{\mu}{1-\mu}}$$

для $\gamma^* \leqslant \rho \leqslant \gamma$

$$\bar{\sigma}_r^p = -q - \frac{2\varkappa}{\sqrt{3}}\left(1 - \gamma^3 + 3\ln\frac{\gamma}{\rho}\right), \quad \bar{\sigma}_\theta^p = -q + \frac{2\varkappa}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2} + \gamma^3 - 3\ln\frac{\gamma}{\rho}\right) \tag{2.11c}$$

Формулы (2.12) дают:

для $\alpha \leqslant \rho \leqslant \gamma^*$

$$\bar{u}^p = \omega\rho\left\{-q + \frac{2\varkappa}{\sqrt{3}}\left[\gamma^3 + \frac{1}{4\omega}(M\psi)^{\frac{1}{1-\mu}} - \ln\frac{\psi^* + 4\omega}{1+4\omega} - M^{\frac{1}{1-\mu}}\int_{\psi^*}^{\psi}\frac{\psi^{\frac{\mu}{1-\mu}}\,d\psi}{\psi + 4\omega}\right]\right\} \tag{2.12c}$$

---

[1] В нашей статье [1] применялась постоянная m, причем

$$M = m\left(\frac{k}{G}\right)^\mu$$

Таблица 1

	γ \ ρ		0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
a) Идеальная пластичность	0.5	$-\bar{\sigma}_r$	1.01	0.51	0.28	0.14	0.05	0.00
		$\bar{\sigma}_\theta$	0.72	0.48	0.36	0.27	0.24	0.22
		u	0.16	0.12	0.09	0.08	0.07	0.06
	0.6	$-\bar{\sigma}_r$	1.53	0.91	0.48	0.24	0.09	0.00
		$\bar{\sigma}_\theta$	0.20	0.83	0.62	0.49	0.42	0.38
		u	0.30	0.21	0.16	0.14	0.12	0.11
	0.7	$-\bar{\sigma}_r$	1.94	1.31	0.76	0.38	0.15	0.00
		$\bar{\sigma}_\theta$	—0.20	0.42	0.98	0.78	0.66	0.59
		$\bar{u}$	0.52	0.34	0.25	0.27	0.19	0.18
	0.8	$-\bar{\sigma}_r$	2.19	1.57	0.01	0.56	0.22	0.00
		$\bar{\sigma}_\theta$	—0.46	0.16	0.72	1.18	1.00	0.89
		$\bar{u}$	0.84	0.55	0.40	0.32	0.29	0.27
	0.9	$-\bar{\sigma}_r$	2.36	1.73	1.18	0.73	0.31	0.00
		$\bar{\sigma}_\theta$	—0.62	0.00	0.55	1.01	1.42	1.27
		u	1.27	0.84	0.60	0.47	0.41	0.38
	1.0	$-\bar{\sigma}_r$	2.39	1.77	1.21	0.76	0.35	0.00
		$\bar{\sigma}_\theta$	—0.66	—0.03	0.52	0.97	1.39	1.73
		u	1.83	1.23	0.88	0.69	0.57	0.52
b) Линейное упрочнение	0.5	$-\bar{\sigma}_r$	1.01	0.51	0.28	0.14	0.05	0.00
		$\bar{\sigma}_\theta$	0.72	0.48	0.36	0.27	0.24	0.22
		$\bar{u}$	0.16	0.12	0.09	0.08	0.07	0.06
	0.6	$-\bar{\sigma}_r$	1.54	0.91	0.48	0.24	0.09	0.00
		$\bar{\sigma}_\theta$	—0.05	0.83	0.62	0.49	0.42	0.38
		$\bar{u}$	0.30	0.21	0.16	0.14	0.12	0.11
	0.7	$-\bar{\sigma}_r$	1.99	1.30	0.76	0.38	0.15	0.00
		$\bar{\sigma}_\theta$	—0.41	0.18	0.98	0.78	0.66	0.59
		u	0.51	0.34	0.25	0.27	0.19	0.18
	0.8	$-\bar{\sigma}_r$	2.42	1.60	1.03	0.56	0.22	0.00
		$\bar{\sigma}_\theta$	—0.70	—0.05	0.44	1.18	1.00	0.89
		$\bar{u}$	0.83	0.55	0.40	0.32	0.29	0.27
	0.9	$-\bar{\sigma}_r$	2.81	1.86	1.21	0.73	0.31	0.00
		$\bar{\sigma}_\theta$	—0.93	—0.20	0.32	1.01	1.42	1.27
		$\bar{u}$	1.24	0.83	0.61	0.47	0.41	0.38
	1.0	$-\bar{\sigma}_r$	3.21	2.07	1.32	0.79	0.35	0.00
		$\bar{\sigma}_\theta$	—1.10	—0.30	0.28	0.72	1.39	1.73
		$\bar{u}$	1.78	1.19	0.86	0.69	0.57	0.52

Таблица 1 (продолжение)

γ \ ρ		0.5	0.6	0.7	0.8	0,9	1.0
с) Степенное упрочнение							
0.5	ψ	—	—	—	—	—	—
	$-\bar{\sigma}_r$	**1.01**	0.51	0.28	0.14	0.05	0.00
	$\bar{\sigma}_\theta$	0.72	0.48	0.36	0.27	0.24	0.22
	$\bar{u}$	0.16	0.12	0.09	0.08	0.07	0.06
0.6	ψ	2.17	—	—	—	—	—
	$-\bar{\sigma}_r$	**1.17**	0.91	0.48	0.24	0.09	0.00
	$\bar{\sigma}_\theta$	0.62	0.83	0.62	0.49	0.42	0.38
	$\bar{u}$	0.32	0.21	0.16	0.14	0.12	0.11
0.7	ψ	3.50	1.98	—	—	—	—
	$-\bar{\sigma}_r$	**1.60**	0.93	0.76	0.38	0.15	0.00
	$\bar{\sigma}_\theta$	0.38	0.84	0.98	0.78	0.66	0.59
	$\bar{u}$	0.54	0.39	0.25	0.27	0.19	0.18
0.8	ψ	5.00	2.92	1.79	—	—	—
	$-\bar{\sigma}_r$	**1.92**	1.13	0.63	0.56	0.22	0.00
	$\bar{\sigma}_\theta$	0.21	0.74	1.12	1.18	1.00	0.89
	$\bar{u}$	0.83	0.56	0.44	0.32	0.29	0.27
0.9	ψ	7.05	4.21	2.69	—	—	—
	$-\bar{\sigma}_r$	**2.23**	1.42	0.89	0.73	0.31	0.00
	$\bar{\sigma}_\theta$	0.06	0.75	1.06	0.01	1.42	1.27
	$\bar{u}$	1.53	0.84	0.64	0.47	0.41	0.38
1.0	ψ	9.00	5.72	3.70	2.48	—	—
	$-\bar{\sigma}_r$	**2.35**	1.57	0.93	0.43	0.35	0.00
	$\bar{\sigma}_\theta$	0.06	0.62	1.07	1.44	1.39	1.73
	$\bar{u}$	1.58	1.21	0.91	0.71	0.57	0.52

где

$$\psi^* = M^{-1/\mu}, \qquad \rho^3 = \gamma^3 \frac{1+4\omega}{\psi+4\omega} M^{-\frac{1}{1-\mu}} \psi^{-\frac{\mu}{1-\mu}}$$

для $\gamma^* \leqslant \rho \leqslant \gamma$

$$\bar{u}^p = \omega\rho \left\{ -q + \frac{2\varkappa}{\sqrt{3}} \left[\frac{1+4\omega}{4\omega} \frac{\gamma^3}{\rho^3} - 3\ln\frac{\gamma}{\rho} - 1 + \gamma^3 \right] \right\} \tag{2.12c}$$

Здесь

$$\gamma^* = \gamma (1+4\omega)^{1/3} (M^{-1/\mu} + 4\omega)^{-1/3}$$

определяет сферу S_{c^*} радиуса c^*, отделяющую идеально пластическую область от области степенного упрочнения ($\gamma^* = c^* / b$).

Для частного случая $\mu = \frac{1}{2}$ имеем

$$\int\limits_{\psi^*}^{\psi} \frac{\psi\, d\psi}{\psi + 4\omega} = \psi - \psi^* - 4\omega \ln \frac{\psi + 4\omega}{\psi^* + 4\omega}$$

и формулы (2.12c) легко преобразовать к виду, аналогичному (2.12b).

В качестве примера рассмотрим задачу об определении компонент напряжения и радиального смещения в полом шаре, находящемся под действием только равномерного внутреннего давления (внешнее давление отсутствует) при постепенном расширении пластической области.

Пусть $\alpha = 0.5$, а γ последовательно принимает значения 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0. Так как $q = 0$, $p > 0$, то

$$\varkappa = \operatorname{sign} p = +1$$

При вычислениях принимаем $\nu = 0.25$, $G / k = 500$. Поставленная задача рассмотрена для случаев идеальной пластичности, линейного упрочнения, степенного упрочнения.

Результаты вычислений для случая идеальной пластичности, для случая линейного упрочнения ($M = 0.10$, $N = 0.82$) и для случая степенного упрочнения ($M = 0.90$, $\mu = {}^1/_6$) сведены соответственно в табл. 1a, b, c.

Диагональные клетки табл. 1a, b, c (обведенные жирно) соответствуют границам упругой и пластической областей. Цифры первого столбца (набранные жирно) определяют значения внутреннего давления p, соответствующего рассматриваемым значениям γ.

Поступила в редакцию
10 I 1944.

Институт механики
Академии Наук СССР

W. W. SOKOLOVSKY. THE ELASTICO-PLASTIC EQUILIBRIUM OF A HOLLOW SPHERE YIELDING THE STRAIN-HARDENING

A body bounded by spheres S_a and S_b having a common centre O and corresponding radii a and b is supposed to be in an elastico-plastic state under the action of uniform external and internal pressures.

Due to symmetry, the boundary between the elastic and plastic zones is a sphere having the same centre O and radius denoted by c.

For the elastic state of material R. Hooke's relationships (1.1), (1.2) are used.

For the plastic state of material the relationships of H. Hencky (1.1), (1.4) and the conditions of strain-hardening of R. Schmidt (1.6) are employed.

On the boundary between the elastic and plastic zones all the components of stresses and deformations are supposed to be continuous.

The expressions for the stress components and the radial displacement in the elastic zones (denoted by indexes e) are given by (2.9) and (2.10).

The expressions for stresses and the radial displacement in the plastic zones (denoted by indexes p) are given by (2.11) and (2.12).

All these values are expressed in terms of a function ψ.

The obtained solution reduces to the especially simple formes in following particular cases, which are considered in the paper: ideal plasticity (a), strain-hardening governed by linear law (b) and by power law (c).

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Прикладная математика и механика. 1943. Т. VII. Рып. 4.
2. Генки Г. Известия ОТН Академии Наук СССР. 1937. № 2.
3. Лейбензон Л. С. Элементы математической теории пластичности. 1943.
4. Hencky H. Zeitschrift für angew. Math. u. Mech. 1924. Bd. 4.
5. Schmidt R. Ingenieur Archiv. 1932. Bd. 3.