Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика, том VIII, 1944

ОБТЕКАНИЕ ТЕЛ, БЛИЗКИХ К ПРОДОЛГОВАТЫМ ЭЛЛИПСОИДАМ ВРАЩЕНИЯ

Ф. И. ФРАНКЛЬ, И. И. ЭТЕРМАН

(Новосибирск)

Рассматриваемая задача является частным случаем внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа, т. е. сводится к определению решения уравнения Лапласа вне некоторой замкнутой поверхности, равного нулю в бесконечности и имеющего заданные нормальные производные на этой поверхности.

Внешняя задача Неймана решается путем распределения источников по указанной поверхности. Нахождение этих источников сводится к решению некоторого интегрального уравнения типа Фредгольма второго рода.

В общем случае решение этого уравнения приводит к весьма большим вычислениям.

В связи с этим возникает вопрос, нельзя ли задачу свести приближенно к задаче Неймана на такой поверхности, на которой задача Неймана решается просто.

Такое сведение оказывается на самом деле возможным, так как, как будет доказано ниже, имеет место теорема:

Пусть данная замкнутая поверхность A мало отклоняется от некоторой поверхности вращения B. Пусть φ — решение внешней задачи Неймана для поверхности A, $\bar{\nu}$ — внешняя нормаль на поверхности B. Тогда значения $d\varphi / d\bar{\nu}$ на поверхности B могут быть найдены с точностью до величин второго порядка малости еще до нахождения функции φ.

Тем самым задача сводится к решению задачи Неймана на некоторой поверхности вращения.

В частности, в качестве такого тела вращения можно взять эллипсоид вращения [1]. На эллипсоиде вращения внешняя задача Неймана была решена уже Гейне [1,2] с помощью обобщенных им функций Лежандра (шаровых функций). Методом Гейне мы и пользуемся в данной работе.

Рассмотрим тело вращения, движущееся со скоростью V в направлении отрицательной оси x, совпадающей с осью вращения. Поверхность тела пусть будет задана в виде уравнения

[1] Можно было бы рассматривать и более общий случай—случай тел, близких к трехосным эллипсоидам. Тогда задача Неймана решалась бы с помощью функций Ламе. Однако применение разложений по функциям Ламе сильно усложнило бы расчет.

$$\beta=\bar{\beta}(s) \tag{1}$$

где s—расстояние точки на поверхности тела от носа, измеренное вдоль образующей, а β—угол между касательной к образующей и осью x.

Обозначая через $\bar{\varphi}$ потенциал абсолютного течения для указанного движения, имеем

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{\nu}}=V\sin\beta \tag{2}$$

где производная берется по внешней нормали $\bar{\nu}$ к телу вращения.

Тело, близкое к телу вращения, можно теперь задать уравнением

$$\bar{\nu}=\delta\bar{\nu}\,(s,\,\psi) \tag{3}$$

где ν —расстояние произвольной точки от тела вращения (1), измеренное вдоль внешней нормали к последнему (т. е. будем считать $\bar{\nu}$ положительным для точек, лежащих вне поверхности вращения), а ψ — угол цилиндрических координат.

Пусть теперь потенциал абсолютного течения, обтекающего тело (3), движущееся со скоростью V вдоль отрицательной оси x, будет

$$\varphi=\bar{\varphi}+\delta\varphi \tag{4}$$

Обозначая через ν внешнюю нормаль к телу (3), имеем с точностью до величин второго порядка малости

$$\frac{d}{d\nu}=\frac{\partial}{\partial\bar{\nu}}-\frac{\partial\delta\bar{\nu}}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s}-\frac{\partial\delta\bar{\nu}}{\partial\psi}\frac{\partial}{\partial\psi} \tag{5}$$

$$\frac{d\varphi}{d\nu}=\frac{\partial\,(\bar{\varphi}+\delta\varphi)}{d\nu}=\frac{d\bar{\varphi}(\delta\bar{\nu})}{d\nu}+\frac{d\delta\varphi}{d\bar{\nu}}=\frac{\partial\bar{\varphi}\,(0)}{\partial\bar{\nu}}+\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial\bar{\nu}^2}\delta\bar{\nu}-\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial s}\frac{\partial\delta\bar{\nu}}{\partial s}+\frac{d\delta\varphi}{d\bar{\nu}} \tag{6}$$

С другой стороны, на основании уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial\bar{\nu}^2}=-\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial s^2}-\frac{1}{\bar{r}}\left(\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial s}\sin\bar{\beta}+\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{\nu}}\cos\bar{\beta}\right)+\frac{d\bar{\beta}}{ds}\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\nu}=$$

$$=-\frac{d\bar{v}_s}{ds}-\frac{\sin\bar{\beta}}{\bar{r}}\left(v_s+V\cos\bar{\beta}\right)+V\sin\bar{\beta}\,\frac{d\bar{\beta}}{ds} \tag{7}$$

где $\bar{v}_s$—касательная скорость потока потенциала $\bar{\varphi}$ на поверхности тела вращения, а $r=\bar{r}(s)$—расстояние точки поверхности вращения от оси.

Кроме того, согласно условию обтекания

$$\frac{d\varphi}{d\nu}=V\sin\left(\bar{\beta}+\frac{\partial\delta\bar{\nu}}{\partial s}\right)=V\sin\bar{\beta}+V\cos\bar{\beta}\,\frac{\partial\delta\bar{\nu}}{\partial s} \tag{8}$$

Уравнения (5), (6), (7) дают

$$\frac{d\varphi}{d\nu}-\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{\nu}}=V\cos\bar{\beta}\frac{\partial\delta\bar{\nu}}{\partial s}=$$

$$=\frac{\partial\delta\varphi}{\partial\bar{\nu}}-\left[\frac{dv_s}{ds}+\frac{\sin\beta}{\bar{r}}\left(\bar{v}_s+V\cos\beta\right)-V\sin\bar{\beta}\frac{d\beta}{ds}\right]\delta\bar{\nu}-\bar{v}_s\frac{\partial\delta\bar{\nu}}{\partial s} \tag{9}$$

и, наконец,

$$\frac{\partial\delta\varphi}{\partial\nu}=\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\bar{v}_s+V\cos\bar{\beta}\right)\delta\bar{\nu}\right]+\frac{\sin\bar{\beta}}{r}\left(V\cos\bar{\beta}+v_s\right)\delta\bar{\nu}=$$
$$=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial s}\left[\bar{r}\left(\bar{v}_s+V\cos\bar{\beta}\right)\delta\bar{\nu}\right] \qquad (10)$$

Выражение $\bar{v}_s+V\cos\bar{\beta}$ здесь означает, очевидно, значение относительной скорости на поверхности тела вращения (1) при обтекании его потоком скорости V по направлению оси x.

Примем теперь, что тело вращения (1) является эллипсоидом. Введем эллиптические координаты η, θ, так что

$$x=\operatorname{ch}\eta\cos\theta,\qquad r=\operatorname{sh}\eta\sin\theta \qquad (11)$$

Примем в качестве единицы длины расстояние фокуса от начала координат, так что в соответствии с формулами (11)

$$a=\operatorname{ch}\eta_0,\qquad b=\operatorname{sh}\eta_0,\qquad b/a=\operatorname{th}\eta_0 \qquad (12)$$

За единицу скорости берем в дальнейшем скорость полета V. В соответствии с этим

$$d\eta\sqrt{\operatorname{ch}^2\eta_0-\cos^2\theta}=d\bar{\nu},\qquad -d\theta\sqrt{\operatorname{ch}^2\eta_0-\cos^2\theta}=ds,$$
$$\sin\bar{\beta}=\frac{d\bar{r}}{ds}=-\frac{\operatorname{sh}\eta_0\cos\theta}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\eta_0-\cos^2\theta}},\qquad \cos\bar{\beta}=\frac{dx}{ds}=\frac{\operatorname{ch}\eta_0\sin\theta}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\eta_0-\cos^2\theta}} \qquad (13)$$

Потенциал φ можно представить в виде

$$\bar{\varphi}=-kP_1(\cos\theta)\,Q_1(\operatorname{ch}\eta)\qquad\left(k=\frac{\operatorname{sh}\eta_0}{\dot{Q}(\operatorname{ch}\eta_0)}\right) \qquad (14)$$

где P_1 и Q_1 — функции Лежандра первого и второго родов

$$P_1(z)=z,\qquad Q_1(z)=\frac{z}{2}\ln\frac{z+1}{z-1}-1 \qquad (15)$$

(Точка над Q_1 (как и в дальнейшем) означает дифференцирование по η. Точно так же точка над P_n^m будет в дальнейшем означать дифференцирование по θ).

Что касается искомой функции $\delta\varphi$, то она может быть представлена в виде

$$\delta\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(A_n^m\cos m\psi+B_n^m\sin m\psi\right)P_n^m(\cos\theta)\,Q_n^m(\operatorname{ch}\eta) \qquad (16)$$

В самом деле, любая функция вида

$$P_i(\cos\theta)\,Q_i(\operatorname{ch}\eta),\qquad P_i^k(\cos\theta)\,Q_i^k(\operatorname{ch}\eta)\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}k\psi \qquad (17)$$

где P_i, Q_i, P_i^k, Q_i^k — функции Лежандра, удовлетворяет уравнению Лапласа и величина k согласно (14) обеспечивает выполнение краевого условия (3).

Условие, которому $\delta\varphi$ удовлетворяет в бесконечности $\delta\varphi=0$, обеспечивается соответствующим поведением функций $Q_n^m(z)$ при $z=\infty$, а краевое условие (10), которое должно быть удовлетворено на эллипсоиде, принимает вид

$$\left(\frac{\partial\delta\varphi}{\partial\eta}\right)_{\eta=\eta_0}=-\frac{F(\eta_0)}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin^2\theta\,\delta\eta\right)\qquad\left(F(\eta_0)=\operatorname{ch}\eta_0-\frac{\operatorname{sh}\eta_0 Q_1(\operatorname{ch}\eta_0)}{\dot{Q}_1(\operatorname{ch}\eta)}\right) \qquad (18)$$

где $\delta\eta$ определяется из $\delta\bar{\nu}$ по первой формуле (13). Иначе говоря, с точностью до величин второго порядка малости $\delta\eta$ означает разность между значениями η в точках обтекаемого тела и эллипсоида, лежащих на одной и той же конфокальной гиперболе.

Согласно формуле (16) формула (18) может быть представлена в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(A_n^m\cos m\psi+B_n^m\sin m\psi)\dot{Q}_n^m(\operatorname{ch}\eta_0)P_n^m(\cos\theta)=$$
$$=-\frac{F(\eta_0)}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin^2\theta\,\delta\eta\right) \tag{19}$$

Согласно формуле разложения произвольной функции, данной на продолговатом эллипсоиде вращения (Hobson [2], § 247), получаем после интегрирования по частям

$$\begin{aligned} A_n^m&=\frac{F(\eta_0)}{\dot{Q}_n^m(\operatorname{ch}\eta_0)}\frac{(2n+1)}{4\pi}2\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{\pi}\dot{P}_n^m(\cos\theta)\sin^2\theta\cos m\psi\,\delta\eta\,d\theta\\ B_n^m&=\frac{F(\eta_0)}{\dot{Q}_n^m(\operatorname{ch}\eta_0)}\frac{(2n+1)}{4\pi}2\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{\pi}\dot{P}_n^m(\cos\theta)\sin^2\theta\sin m\psi\,\delta\eta\,d\theta \end{aligned} \tag{20}$$

где при $m=0$ множитель 2 пропускается.

Таким образом решение задачи сведено к численному определению некоторых определенных интегралов.

При наличии вертикальной плоскости симметрии

$$B_n^m=0 \tag{21}$$

Скорость w относительного потока в произвольной точке поля вычисляется по формуле

$$w^2=\frac{1}{\operatorname{ch}^2\eta-\cos^2\theta}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)^2\right]+\frac{1}{\operatorname{sh}^2\eta\sin^2\theta}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\psi}\right)^2 \tag{22}$$

где

$$\Phi=\operatorname{ch}\eta\cos\theta-\frac{\operatorname{sh}\eta_0}{\dot{Q}(\operatorname{ch}\eta_0)}\cos\theta\,Q_1(\operatorname{ch}\eta)+\delta\varphi \tag{23}$$

В частности, в точках поверхности обтекаемого тела имеем с точностью до величин второго порядка малости

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}&=-F(\eta_0)\sin\theta+\left(\frac{\partial\delta\varphi}{\partial\theta}\right)_{\eta=\eta_0}\\ \frac{\partial\Phi}{\partial\eta}&=-\operatorname{sh}\eta_0\frac{\ddot{Q}_1(\operatorname{ch}\eta_0)}{\dot{Q}_1(\operatorname{ch}\eta_0)}\delta\eta\cos\theta+\left(\frac{\partial\delta\varphi}{\partial\eta}\right)_{\eta=\eta_0}\\ \frac{\partial\Phi}{\partial\psi}&=\left(\frac{\partial\delta\varphi}{\partial\psi}\right)_{\eta=\eta_0} \end{aligned} \tag{24}$$

Следовательно, формула для скорости на поверхности обтекаемого тела, верная с той же точностью, будет

$$w=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\eta-\cos^2\theta}}\left|-F(\eta_0)\sin\theta+\frac{\partial\delta\varphi}{\partial\theta}\right|_{\eta=\eta_0} \tag{25}$$

В качестве примера приведем результаты вычислений обтекания эллипсоида, не обладающего осевой симметрией, с отношением осей

$$a:b:c=1.02:0.263:0.140$$

Обтекание предполагаем в направлении большой оси.

В этом случае имеется, как известно, строгое решение задачи [3].

Применяя изложенный приближенный метод, перенесем краевые условия на эллипсоид вращения с большой осью, совпадающей с осью обтекаемого эллипсоида и с отношением осей, соответствующим значению $\eta_0 = 0.2$.

С точностью до величин второго порядка малости уравнение обтекаемого эллипсоида было представлено в виде

$$\delta\eta = \frac{\mathrm{ch}^2\,\eta_0\,\delta\eta_0 \cos 2\psi}{\mathrm{ch}^2\,\eta_0 - \cos^2\theta} \qquad (\delta\eta_0 = 0.06)$$

Для сопоставления приводим результаты вычислений значений скорости $w_{стр}$ и приближенных значений $w_{пр}$ при $\psi = 0$:

θ	0°	10°	20°	30°	40°
$w_{стр}$	0	0.5[illegible]02	0.8304	0.9516	1.002
$w_{пр}$	0	0.6289	0.8516	0.9487	1.002
θ	50°	60°	70°	80°	90°
$w_{стр}$	1.026	1.039	1.047	1.050	1.051
$w_{пр}$	1.033	1.047	1.050	1.051	1.051

Совпадение оказалось достаточно хорошим, несмотря на значительное отклонение обтекаемого эллипсоида от осевой симметрии и несмотря на то, что использовано всего два члена ряда (отличных от нуля).

Поступила в редакцию
4 V 1943.

P. I. FLANCL and I. I. ETERMAN. THE CALCULATION OF THE FLOW PAST A BODY APPROACHING AN OBLONG ELLIPSOID OF REVOLUTION

It is known that the above mentioned problem can be reduced to the solution of the Laplace equation beyond a closed surface. This solution must vanish at infinity and its normal derivatives must take the given values on the surface.

This, so-called, external problem of Neuman can be reduced to an integral equation of Fredholm and its solution in the general case require a great deal of calculation.

In the present work the authors give an approximate procedure. Suppose a given surface A approaches a surface of revolution B. Let φ be the accepted solution of the Neuman's problem for the surface A and $\bar{\nu}$ denotes the external normal to the surface B. Then the value $d\varphi / d\bar{\nu}$ on the surface B can be found with great accuracy before the determination of function φ.

Hence Neuman's problem for the given surface can be approximately reduced to the same problem, but on the surface of revolution. For the case of an ablong ellipsoid of revolution the problem was solved by Heine [1] by means of the spherical functions. This method is used in the present work.

ЛИТЕРАТУРА

1. Heine. Handbuch der Kugelfunktionen.
2. Hobson. The theory of spherical and ellipsoidal harmonics. Cambridge. 1931. § 243.
3. Розе-Кибель-Кочин. Теоретическая гидромеханика. Ч. II. ОНТИ. 1937 [Стр. 108].