

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИИ НЕСУЩЕЙ ЛИНИИ НА СЛУЧАЙ КРЫЛА С ИЗОГНУТОЙ ОСЬЮ И ОСЬЮ, НЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ ПОТОКУ

А. А. ДОРОВНИЦЫН

(Москва)

Теория несущей линии Прандтля, которая благодаря своей простоте нашла широкое применение в расчетах характеристик крыла, не могла быть до сих пор обобщена на случай крыла со скольжением или крыла с изогнутой осью по той причине, что формально вычисляемые индуктивные углы атаки в указанных случаях принимают бесконечное значение.

Однако эта неприменимость теории объясняется не тем, что неприменима схема Прандтля, как физическая схема, а тем, что нельзя охватить все особенности движения введением лишь понятия индуктивного угла атаки.

Чтобы выяснить возможные пути обобщения теории Прандтля на указанные случаи, мы остановимся на физической сущности этой теории.

В основе теории Прандтля лежат два положения, существенные для наших дальнейших выводов: 1) система присоединенных вихрей крыла стягивается в одну вихревую нить, от которой отходит вихревая пелена; 2) предполагается, что каждое сечение крыла обтекается как плоский профиль (гипотеза плоских сечений).

Основанием для первого положения является тот известный факт, что детали в распределении присоединенных вихрей по крылу сказываются лишь на распределении скоростей в непосредственной близости от крыла. При удалении от крыла поле скоростей асимптотически и притом практически достаточно быстро стремится к тому полю, которое вызывалось бы единичной нитью.

К гипотезе плоских сечений приводят следующие соображения.

Потенциал скоростей Φ удовлетворяет трехмерному уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

(ось x направлена горизонтально вдоль основного потока, ось y — вертикально вниз, ось z — вдоль размаха). Однако вблизи крыла все три направления не являются равнозначными: в то время, как вдоль осей x и y потенциал изменяется быстро, — на величину порядка Φ_{\max} на протяжении хорды b , вдоль оси z изменения потенциала такого порядка происходят лишь на протяжении размаха l .

Вводя безразмерные координаты

$$\bar{x} = x/b, \quad \bar{y} = y/b, \quad \bar{z} = z/l$$

приведем уравнение Лапласа к виду

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{b^2}{l^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

причем значения всех производных здесь уже одного порядка.

При больших удлинениях ($l/b \gg 1$) последний член уравнения Лапласа будет мал и таким образом потенциал скоростей Φ приближенно будет удовлетворять плоскому уравнению Лапласа $\partial^2 \Phi / \partial x^2 + \partial^2 \Phi / \partial y^2 = 0$.

Но для решения последнего уравнения, помимо условия обтекания рассматриваемого сечения, необходимо задать условие на бесконечности, т. е. скорость внешнего потока, набегающего на это сечение. Когда решается задача об обтекании плоского профиля, это условие на бесконечности определяется физическим характером опыта (например, за скорость на бесконечности принимается скорость на входе в рабочую часть трубы). При рассмотрении обтекания сечения крыла такого явного выражения для скорости внешнего потока мы не имеем, так как сечение крыла находится в поле скоростей, образованном не просто внешним по отношению ко всему крылу потоком, но как-то измененном присутствием других сечений и вихревой пелены, сходящей с крыла.

Поэтому для определения внешнего потока по отношению к сечению крыла нужно исходить из такого метода вычисления внешнего потока, обтекающего плоский профиль, который мог бы быть обобщен на случай сечения крыла. В задаче об обтекании профиля внешний поток может быть найден, если известно поле скоростей в окрестности профиля. Именно достаточно для этого из полного потока, обтекающего профиль, вычесть поток, создаваемый системой присоединенных вихрей профиля.

Этот метод обобщается и на случай крыла конечного размаха, т. е. внешний по отношению к сечению крыла поток получается из полного потока в окрестности рассматриваемого сечения за вычетом потока, создаваемого этим сечением, а так как в теории Прандтля система присоединенных вихрей крыла сводится к одной нити, то этот создаваемый сечением поток будет равен

$$v_x - i v_y = \frac{\Gamma}{2\pi\epsilon} \exp \left[-i \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) \right]$$

где Γ — циркуляция в данном сечении крыла, ϵ — расстояние от несущей линии до некоторой точки в плоскости сечения, φ — угол между осью x и радиусом вектором точки.

Этот принцип определения внешнего потока, обтекающего сечение крыла, положен в основу всех дальнейших выкладок.

Расчитанный таким образом поток не будет, конечно, точно плоско-потенциальным. Однако, разлагая его по степеням ϵ/l и отбрасывая величины, стремящиеся к нулю, вместе с ϵ/l , т. е. оставляя лишь главную часть в выражении скорости внешнего потока, мы увидим, что во всех случаях будет получаться поток плоско-потенциальный. И так как теория несущей линии есть теория крыла большого удлинения, то это значит, что на расстоянии от крыла порядка хорды (или нескольких хорд) поток, набегающий на сечение крыла, является плоско-потенциальным с точностью до величин такого порядка малости, которыми теория несущей линии пренебрегает.

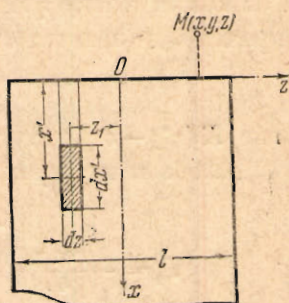
Чтобы уточнить смысл приведенных здесь рассуждений, начнем с подробного рассмотрения известного случая Прандтля (прямолинейная несущая нить, расположенная перпендикулярно потоку).

1. Случай Прандтля. Рассмотрим произвольную точку $M(x, y, z)$ и вычислим полный поток в этой точке (фиг. 1).

Этот поток складывается из: 1) внешнего по отношению к крылу потока скорости V_0 , направленного вдоль оси x , 2) потока, создаваемого вихревой пеленой, 3) потока, создаваемого несущей вихревой нитью. Вычислим в отдельности эти потоки.

а. Поток, создаваемый вихревой пеленой. Обозначив через v_x и v_y составляющие скорости вдоль осей x и y , будем иметь на основании закона Био-Савара

$$v_y = \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l} \gamma(z')(z' - z) dz' \int_0^\infty \frac{dx'}{r^3}, \quad v_x \equiv 0$$



Фиг. 1

Здесь $r = \sqrt{(x-x')^2 + y^2 + (z-z')^2}$, $\gamma(z') = -d\Gamma/dz'$ — плотность вихревого слоя пелены.

Выполняя интегрирование по x' , получим

$$v_y = \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l} \gamma(z') \frac{z' - z}{y^2 + (z' - z)^2} dz' + \frac{x}{4\pi} \int_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l} \gamma(z') \frac{(z' - z) dz'}{[y^2 + (z' - z)^2] \sqrt{x^2 + y^2 + (z' - z)^2}} \quad (1.1)$$

Для удобства оценки различных членов введем безразмерные величины

$$\bar{y} = \frac{2y}{l}, \quad \bar{x} = \frac{2x}{l}, \quad \eta = \frac{2z}{l}, \quad \alpha_i = \frac{v_y}{V_0}, \quad G = \frac{2\Gamma}{V_0 l}, \quad g(\eta') = \frac{1}{V_0} \frac{d\Gamma}{dz'} = \frac{dG}{d\eta'} \quad (1.2)$$

Таким образом, безразмерным длинам, порядка единицы будут соответствовать реальные длины порядка полуразмаха и длинам порядка хорды будут соответствовать безразмерные длины порядка $1/\lambda$ (λ — удлинение крыла).

Введем далее в плоскости сечения крыла полярные координаты

$$\bar{x} = \varepsilon \cos \varphi, \quad \bar{y} = \varepsilon \sin \varphi$$

где ε — безразмерное расстояние точки от несущей вихревой нити.

В этих новых обозначениях уравнение (1.1) запишется в виде

$$\alpha_i = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 g(\eta') \frac{(\eta - \eta') d\eta'}{\varepsilon^2 \sin^2 \varphi + (\eta - \eta')^2} + \frac{\varepsilon \cos \varphi}{4\pi} \int_{-1}^1 g(\eta') \times \frac{(\eta - \eta') d\eta'}{[\varepsilon^2 \sin^2 \varphi + (\eta - \eta')^2] \sqrt{\varepsilon^2 + (\eta - \eta')^2}} = I_1 + I_2 \quad (1.3)$$

Оценим интегралы, входящие в выражение для α_i . Во втором интеграле положим $\eta' - \eta = \varepsilon t$, тогда

$$I_2 = -\frac{\cos \varphi}{4\pi} \int_{\frac{1-\eta}{\varepsilon}}^{\frac{1+\eta}{\varepsilon}} g(\eta + \varepsilon t) \frac{t dt}{(t^2 + \sin^2 \varphi) \sqrt{1 + t^2}}$$

При непрерывном распределении углов атаки α и непрерывном изменении хорды крыла по размаху функция $g(\eta')$ в промежутке $-1 + \varepsilon_1 < \eta < 1 - \varepsilon$, ($\varepsilon_1 > 0$, но произвольно мало) удовлетворяет условию Липшица

$$|\gamma(\eta_1) - \gamma(\eta_2)| < K |\eta_1 - \eta_2|$$

Тогда при всяком η в указанном интервале (т. е. исключая окрестность концов крыла) точку η можно заключить в интервал конечной длины $(\eta - \delta, \eta + \delta)$, причем δ не зависит от ε , так что внутри этого интервала

$$g(\eta') = g(\eta) + K(\eta')(\eta' - \eta)$$

где $K(\eta')$ — ограниченная функция: $|K(\eta')| < K$.

Разобьем интеграл I_2 на три части:

$$I_2 = -\frac{\cos \varphi}{4\pi} \left\{ \int_{-\frac{1+\eta}{\varepsilon}}^{-\frac{\delta}{\varepsilon}} \dots + \int_{-\frac{\delta}{\varepsilon}}^{\frac{\delta}{\varepsilon}} \dots + \int_{\frac{\delta}{\varepsilon}}^{\frac{1-\eta}{\varepsilon}} \dots \right\} = \frac{\cos \varphi}{4\pi} (I'_2 + I''_2 + I'''_2)$$

Легко видеть, что I'_2 и I'''_2 — величины порядка ε , например.

$$|I'_2| = \left| \int_{-\frac{1+\eta}{\varepsilon}}^{-\frac{\delta}{\varepsilon}} g(\mu + \varepsilon t) \frac{t dt}{(t^2 + \sin^2 \varphi) \sqrt{1+t^2}} \right| = \left| \varepsilon \frac{\partial G(\eta - \delta)}{(\delta^2 + \varepsilon^2 \sin^2 \varphi) \sqrt{\delta^2 + \varepsilon^2}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\frac{1+\eta}{\varepsilon}}^{-\frac{\delta}{\varepsilon}} G(\eta + \varepsilon t) d \left[\frac{t}{(t^2 + \sin^2 \varphi) \sqrt{1+t^2}} \right] \right| < \varepsilon \frac{2}{\delta^2} G_{\max}$$

и та же оценка получается для I'''_2 .

Для оценки I''_2 заменяем $g(\eta + \varepsilon t)$ из формулы (1.4):

$$|I''_2| = \left| \int_{-\frac{\delta}{\varepsilon}}^{\frac{\delta}{\varepsilon}} g(\eta) \frac{t dt}{(t^2 + \sin^2 \varphi) \sqrt{1+t^2}} + \varepsilon \int_{-\frac{\delta}{\varepsilon}}^{\frac{\delta}{\varepsilon}} K(\varepsilon t) \frac{t^2 dt}{(t^2 + \sin^2 \varphi) \sqrt{1+t^2}} \right| < \\ < 2\varepsilon K \ln \left(\frac{\delta}{\varepsilon} + \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\varepsilon^2}} \right)$$

Приведенные оценки показывают, что для крыла большого удлинения ($\lambda \gg 1$), исключая окрестности концов крыла (порядка длины хорды), интеграл I_2 на протяжении всей хорды остается малой величиной порядка $\frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{\lambda}$. Оценим теперь первый интеграл I_1 . При ε , стремящемся к нулю, этот интеграл стремится к конечному значению

$$I_0 = \text{v. пр.} \cdot \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 g(\eta') \frac{d\eta'}{\eta - \eta'}$$

Оценим разность

$$I_1 - I_0 = \frac{1}{4\pi} \text{v. пр.} \int_{-1}^1 g(\eta') \frac{\varepsilon^2 \sin^2 \varphi}{(\eta' - \eta) [\varepsilon^2 \sin^2 \varphi + (\eta' - \eta)^2]} d\eta'$$

Так же, как и в предыдущем случае, вводим переменную интегрирования t и разбиваем интеграл $I_1 - I_0$ на три части:

$$I_1 - I_0 = \frac{\sin^2 \varphi}{4\pi} \left\{ \int_{-\frac{1+\eta}{\varepsilon}}^{-\frac{\delta}{\varepsilon}} g(\eta + \varepsilon t) \frac{dt}{t(t^2 + \sin^2 \varphi)} + \text{v. pr.} \int_{-\frac{\delta}{\varepsilon}}^{\frac{\delta}{\varepsilon}} \dots + \int_{\frac{\delta}{\varepsilon}}^{\frac{1-\eta}{\varepsilon}} \dots \right\} =$$

$$= \frac{\sin^2 \varphi}{4\pi} \{I_1' + I_1'' + I_1'''\}$$

Легко убеждаемся, что для I_1' и I_1''' имеют место оценки

$$|I_1'| < 2 \frac{\varepsilon^2}{\delta^2} G_{\max}, \quad |I_1'''| < 2 \frac{\varepsilon^2}{\delta^2} G_{\max}$$

а

$$I_1'' = \text{v. pr.} \int_{-\frac{\delta}{\varepsilon}}^{\frac{\delta}{\varepsilon}} g(\eta) \frac{dt}{t(t^2 + \sin^2 \varphi)} + \varepsilon \int_{-\frac{\delta}{\varepsilon}}^{\frac{\delta}{\varepsilon}} K(\varepsilon t) \frac{dt}{t^2 + \sin^2 \varphi} = \varepsilon \int_{-\frac{\delta}{\varepsilon}}^{\frac{\delta}{\varepsilon}} K(\varepsilon t) \frac{dt}{t^2 + \sin^2 \varphi}$$

и, следовательно,

$$|I_1''| < \varepsilon K\pi / \sin \varphi$$

Отсюда

$$|I_1 - I_0| < M\varepsilon \sin \varphi = 0(\varepsilon) \quad \left(M \leq \frac{K}{4} + \frac{\sin \varphi}{\pi} \frac{\varepsilon}{\delta^2} G_{\max} \right)$$

Снова приходим к выводу, что для крыла большого удлинения разность $|I_1 - I_0|$ мала (порядка $1/\lambda$) на протяжении всей хорды для любого сечения крыла, исключая окрестность его концов.

Возвращаясь теперь к безразмерной скорости α_i , видим, что

$$\alpha_i = \text{v. pr.} \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 g(\eta') \frac{d\eta'}{\eta - \eta'} + O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

и, следовательно, поток, создаваемый вихревой пеленой, в окрестности сечения крыла с точностью до величин порядка $\frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{\lambda}$ есть поток постоянной скорости (т. е. поток плоско-потенциальный).

b. Поток, создаваемый несущей нитью. Несущая нить создает только окружные скорости v_φ , причем

$$v_\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \Gamma(z') \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{[x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}} dz'$$

или, вводя безразмерные величины,

$$\frac{v_\varphi}{V_0} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_{-1}^1 G(\eta') \frac{d\eta'}{[\varepsilon^2 + (\eta - \eta')^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\varepsilon G(\eta)}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{d\eta'}{[\varepsilon^2 + (\eta - \eta')^2]^{\frac{3}{2}}} +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_{-1}^1 [G(\eta') - G(\eta)] \frac{d\eta'}{[\varepsilon^2 + (\eta - \eta')^2]^{\frac{3}{2}}} = I_1 + I_2$$

Интеграл I_1 вычисляется точно:

$$I_1 = \frac{G(\eta)}{4\pi\varepsilon} \left[\frac{1-\eta}{\sqrt{(1-\eta)^2 + \varepsilon^2}} + \frac{1+\eta}{\sqrt{(1+\eta)^2 + \varepsilon^2}} \right] = \frac{G(\eta)}{2\pi\varepsilon} + 0(\varepsilon)$$

Для оценки I_2 разбиваем промежуток интегрирования на три части:

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{4\pi} \left\{ \int_{-1}^{\eta-\delta} \dots + \int_{\eta-\delta}^{\eta+\delta} \dots + \int_{\eta+\delta}^1 \dots \right\} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \{I_2' + I_2'' + I_2'''\}$$

Для интегралов I_2' и I_2''' получаем оценку:

$$|I_2'| \leq 2G_{\max} \int_{-1}^{\eta-\delta} \frac{d\eta'}{[\varepsilon^2 + (\eta' - \eta)^2]^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{G_{\max}}{\delta^2}$$

и аналогично для I_2''' .

В интеграле I_2'' полагаем

$$G(\eta') - G(\eta) = g(\eta)(\eta' - \eta) + K(\eta') \frac{(\eta - \eta')^2}{2} \quad (|K(\eta')| \leq K)$$

тогда

$$I_2'' = g(\eta) \int_{\eta-\delta}^{\eta+\delta} \frac{(\eta' - \eta) d\eta'}{[\varepsilon^2 + (\eta' - \eta)^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2} \int_{\eta-\delta}^{\eta+\delta} K(\eta') \frac{(\eta' - \eta)^2 d\eta'}{[\varepsilon^2 + (\eta' - \eta)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

и, следовательно,

$$|I_2''| \leq \frac{K}{2} \int_{\eta-\delta}^{\eta+\delta} \frac{(\eta' - \eta)^2 d\eta'}{[\varepsilon^2 + (\eta' - \eta)^2]^{\frac{3}{2}}} < K \left(1 + \ln \frac{\delta}{\varepsilon}\right)$$

Таким образом для всего интеграла I_2 имеем

$$|I_2| = \frac{\varepsilon}{4\pi} |I_2' + I_2'' + I_2'''| \leq M \varepsilon \ln \frac{\delta}{\varepsilon} \quad \left(M \leq \frac{K}{4\pi} \left(1 + \frac{1}{\ln \delta/\varepsilon}\right) + \frac{G_{\max}}{\pi \delta^2 \ln \delta/\varepsilon}\right)$$

Вычитая теперь из суммарного потока в окрестности сечения поток, создаваемый самим сечением, т. е. величину

$$v_\varphi = \frac{1}{2\pi\varepsilon} G(\eta) V_0$$

получим для скорости V потока, внешнего по отношению к рассматриваемому сечению, выражение

$$\bar{V} = V_0 - i \frac{V_0}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{dG}{d\eta'} \frac{d\eta'}{\eta - \eta'} + O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

где \bar{V} — комплексная скорость в полости $(x + iy)$.

Для крыла большого удлинения величиной $O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)$ можно пренебречь,

и, следовательно, внешний поток с точностью до величин порядка $\frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{\lambda}$ будет плоско-потенциальным потоком постоянной скорости, которая может быть получена вычислением индуктивной скорости в точках несущей линии.

Теперь мы можем точно формулировать способ определения «внешнего потока», который будет применяться в дальнейших выводах.

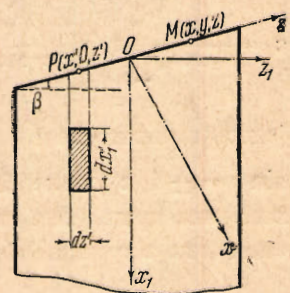
1. В плоскости сечения крыла (т. е. в плоскости, перпендикулярной несущей линии в данной точке) вычисляется суммарный поток, образованный всей вихревой системой крыла и потоком, набегающим на крыло.

2. Из этого суммарного потока вычитается поток, создаваемый самим сечением, т. е. величина $v_\varphi = \frac{1}{2\pi\varepsilon} V_0 G(\eta)$.

3. В остающемся, таким образом, потоке учитывается только главная его часть, слагаемые же порядка $\epsilon \ln \frac{1}{\epsilon}$ и более высокого отбрасываются.

При этом критерием допустимости гипотезы плоских сечений является условие, чтобы определенный таким образом внешний поток был плоскопотенциальным (это условие является, разумеется, необходимым, но недостаточным, так как для применимости гипотезы плоских сечений необходима еще малость отбрасываемых членов на протяжении хорды, что, как мы видим, не выполняется, например, в окрестности концов крыла).

2. Крыло с осью, не перпендикулярной потоку (крыло со скольжением). Обозначим через x_1 и z_1 оси, направленные вдоль основного потока и перпендикулярно потоку, через x и z оси, связанные неподвижно с крылом (фиг. 2). Для упрощения довольно громоздких выкладок будем вычислять скорости над (или под) несущей линией



Фиг. 2

Проводя через точку $M(x_1, y_1, z_1)$ плоскость, перпендикулярную несущей линии, будем вычислять скорости в этом сечении. Составляющая скорости основного потока в этом сечении будет равна $V_0 \cos \beta$, где β — угол скольжения. Составляющая скорости вдоль оси крыла $V_0 \sin \beta$ не будет оказывать влияния на величину циркуляции. (Конечно, последнее справедливо для крыла большого удлинения, когда угол между касательными к передней и задней кромке мал.)

Вообще составляющие скорости вдоль оси, с точки зрения гипотезы плоских сечений, играют роль некоторого постоянного переносного потока, направленного по оси, перпендикулярной плоскости профиля, и, следовательно, на картину обтекания профиля не влияют.

Далее отметим, что поток, создаваемый несущей линией, в рассматриваемом случае вычисляется совершенно так же, как в предыдущем случае Прандтля, поэтому он уничтожается (с точностью до величин порядка $\epsilon \ln \frac{1}{\epsilon}$) полем скоростей, создаваемым самим сечением. Нам остается, таким образом, исследовать лишь поток, создаваемый вихревой пеленой.

a. Вертикальные скорости, создаваемые вихревой пеленой. Скорость в точке $M(x_1, y, z_1)$, которую вызывает вихревой шнур, исходящий из точки $P(x_1', 0, z_1')$, по закону Био-Савара будет равна:

$$dv_y = \frac{\gamma(z_1')(z_1' - z_1) dz_1'}{4\pi} \int_{x_1'}^{\infty} \frac{dx_1'}{[(x_1' - x_1)^2 + y^2 + (z_1' - z_1)^2]^{3/2}} \quad \left(\gamma(z_1') = -\frac{d\Gamma}{dz_1'} \right)$$

Интегрируя, получим

$$dv_y = \frac{\gamma(z_1')(z_1' - z_1) dz_1'}{4\pi [y^2 + (z_1' - z_1)^2]} \left[1 - \frac{(z_1' - x_1)}{\sqrt{(x_1' - x_1)^2 + y^2 + (z_1' - z_1)^2}} \right]$$

Для точек, лежащих над или под несущей линией:

$$x_1' - x_1 = -\operatorname{tg} \beta (z_1' - z_1)$$

Подставляя вместо $x_1' - x_1$ его значение и интегрируя по z_1' от $-\frac{1}{2}l$ до $+\frac{1}{2}l_1$ ($l_1 = l \cos \beta$), будем иметь

$$v_y = \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{1}{2}l_1}^{\frac{1}{2}l_1} \gamma(z_1') \frac{(z_1' - z_1)}{y^2 + (z_1' - z_1)^2} dz_1' + \\ + \frac{\operatorname{tg} \beta}{4\pi} \int_{-\frac{1}{2}l_1}^{\frac{1}{2}l_1} \gamma(z_1') \frac{(z_1' - z_1)^2 dz_1'}{[y^2 + (z_1' - z_1)^2] \sqrt{y^2 + \sec^2 \beta (z_1' - z_1)^2}} \quad (2.1)$$

Вводя безразмерные величины по формулам (1.2), преобразуем это выражение к виду

$$\alpha_i = \frac{1}{4\pi \cos \beta} \int_{-1}^1 g(\eta') \frac{(\eta - \eta') d\eta'}{\varepsilon^2 \sec^2 \beta + (\eta - \eta')^2} - \frac{\operatorname{tg} \beta}{4\pi} \int_{-1}^1 g(\eta') \frac{(\eta' - \eta)^2 d\eta'}{[\varepsilon^2 \sec^2 \beta + (\eta' - \eta)^2] \sqrt{\varepsilon^2 + (\eta' - \eta)^2}} \quad (2.2)$$

(здесь принято во внимание, что $z_1 = z \cos \beta = \frac{l_1}{2} \eta$, и $\bar{y} = \varepsilon \sin \varphi = \pm \varepsilon$, так как $\sin \varphi = \pm 1$ в точке M_1 , находящейся под или над несущей линией). Первый интеграл, так же как и в предыдущем случае, стремится к главному значению в смысле Коши, и мы имеем оценку

$$\int_{-1}^1 g(\eta') \frac{(\eta - \eta') d\eta'}{\varepsilon^2 \sec^2 \beta + (\eta - \eta')^2} = \text{v. pr.} \int_{-1}^1 g(\eta') \frac{d\eta'}{\eta - \eta'} + O(\varepsilon)$$

Второй интеграл (2.2) представим в виде

$$\int_{-1}^1 g(\eta') \frac{(\eta' - \eta)^2 d\eta'}{[\varepsilon^2 \sec^2 \beta + (\eta' - \eta)^2] \sqrt{\varepsilon^2 + (\eta' - \eta)^2}} = \\ = g(\eta) \int_{-1}^1 \frac{(\eta' - \eta)^2 d\eta'}{[\varepsilon^2 \sec^2 \beta + (\eta' - \eta)^2] \sqrt{\varepsilon^2 + (\eta' - \eta)^2}} + \\ + \int_{-1}^1 [g(\eta') - g(\eta)] \frac{(\eta' - \eta)^2 d\eta'}{[\varepsilon^2 \sec^2 \beta + (\eta' - \eta)^2] \sqrt{\varepsilon^2 + (\eta' - \eta)^2}} = I_1 + I_2$$

Здесь при $\varepsilon \rightarrow 0$ интеграл I_2 стремится к конечному значению

$$I_0 = \int_{-1}^1 \frac{g(\eta') - g(\eta)}{|\eta' - \eta|} d\eta' \quad (2.3)$$

Оценим разность между этим предельным значением и значением интеграла I_2 :

$$I_2 - I_0 = \int_{-1}^1 \Delta g \frac{\varepsilon^2 (\eta' - \eta)^2 d\eta'}{[\varepsilon^2 \sec^2 \beta + (\eta' - \eta)^2] |\eta' - \eta| \sqrt{\varepsilon^2 + (\eta' - \eta)^2} [|\eta' - \eta| + \sqrt{\varepsilon^2 + (\eta' - \eta)^2}]} - \\ - \varepsilon^2 \sec^2 \beta \int_{-1}^1 \Delta g \frac{d\eta'}{|\eta - \eta'| [\varepsilon^2 \sec^2 \beta + (\eta' - \eta)^2]}$$

Здесь $\Delta g = g(\eta') - g(\eta)$.

Разбивая промежуток интегрирования на три части $(-1, \eta - \delta)$, $(\eta - \delta, \eta + \delta)$, $(\eta + \delta, 1)$, легко убеждаемся, что интегралы, распространенные по первому и третьему промежуткам, будут порядка ϵ^2 . Остается оценить интеграл по второму промежутку. Здесь полагаем

$$\Delta g = g(\eta') - g(\eta) = K(\eta')(\eta' - \eta), \quad |K(\eta')| \leq K$$

и, следовательно,

$$\left| \epsilon^2 \int_{\eta-\delta}^{\eta+\delta} \Delta g \frac{(\eta' - \eta)^2 d\eta'}{[\epsilon^2 \sec^2 \beta + (\eta' - \eta)^2] [|\eta' - \eta| + \sqrt{\epsilon^2 + (\eta' - \eta)^2}] |\eta' - \eta| \sqrt{\epsilon^2 + (\eta' - \eta)^2}} \right| \leq \\ \leq \frac{K\epsilon^2}{2} \int_{\eta-\delta}^{\eta+\delta} \frac{d\eta'}{\epsilon^2 \sec^2 \beta + (\eta' - \eta)^2} \leq \frac{1}{2} \pi K \epsilon \cos \beta = O(\epsilon)$$

Точно так же

$$\left| \epsilon^2 \sec^2 \beta \int_{-1}^1 \Delta g \frac{d\eta'}{|\eta' - \eta| [\epsilon^2 \sec^2 \beta + (\eta' - \eta)^2]} \right| \leq \pi K \epsilon \sec \beta = O(\epsilon)$$

Итак, с точностью до величин порядка $1/\lambda$ интеграл I_2 равен постоянному значению I_0 на протяжении хорды крыла.

Интеграл I_1 вычисляется точно; разлагая его по степеням ϵ , получим

$$I_1 = 2 \ln \frac{2}{\epsilon} + \ln(1 - \eta^2) - \frac{1}{\sin \beta} \ln \frac{1 + \sin \beta}{1 - \sin \beta} + O(\epsilon^2) \quad (2.4)$$

Заметим, что при стремлении к несущей линии по любому пути порядок погрешности в общем случае будет $\epsilon \ln \frac{1}{\epsilon}$, а не просто ϵ , как получено здесь.

Объединяя полученные результаты, приходим к следующему окончательному выражению для индуктивной (безразмерной) скорости, точному до величин порядка $\epsilon \ln \frac{1}{\epsilon}$

$$\alpha_i = \frac{1}{4\pi \cos \beta} \int_{-1}^1 g(\eta') \frac{d\eta'}{\eta' - \eta'} - \frac{\text{tg} \beta}{4\pi} \left\{ \int_{-1}^1 [g(\eta') - g(\eta)] \frac{d\eta'}{|\eta' - \eta|} + \right. \\ \left. + 2g(\eta) \left[\ln \frac{2}{\epsilon} + \ln \sqrt{1 - \eta^2} - \frac{1}{2 \sin \beta} \ln \frac{1 + \sin \beta}{1 - \sin \beta} \right] \right\} \quad (2.5)$$

В это выражение, помимо постоянных слагаемых, входит логарифмический член $-\frac{\text{tg} \beta}{2\pi} g(\eta) \ln \frac{2}{\epsilon}$, обращающийся в бесконечность на несущей линии. Наличие этого члена и являлось до сих пор препятствием для применения теории Прандтля к случаю скользящего крыла.

б. Горизонтальная скорость, создаваемая вихревой пеленой. Так как составляющие скорости, параллельные несущей линии (т. е. направленные вдоль размаха), не оказывают влияния на обтекание сечения, нам достаточно вычислить лишь составляющую v_x , направленную горизонтально и перпендикулярно несущей линии. Применяя закон Био-Савара, получим величину скорости dv_x в точке M , вызываемую вихревым шнуром, выходящим из точки P (фиг. 2):

$$dv_x = \frac{\gamma(z_1') \sin \beta}{4\pi [y^2 + (z_1' - z_1)^2]} \left[1 + \frac{(z_1' - z_1) \text{tg} \beta}{\sqrt{y^2 + \sec^2 \beta (z_1' - z_1)^2}} \right] dz_1'$$

Интегрируя по z_1' , найдем полную скорость в точке M в виде

$$v_x = \frac{y \sin \beta}{4\pi} \int_{-\frac{1}{2}l_1}^{\frac{1}{2}l_1} \gamma(z_1') \frac{dz_1'}{y^2 + (z_1' - z_1)^2} + \\ + \frac{y \sin \beta \operatorname{tg} \beta}{4\pi} \int_{-\frac{1}{2}l_1}^{\frac{1}{2}l_1} \gamma(z_1') \frac{(z_1' - z_1) dz_1'}{[y^2 + (z_1' - z_1)^2] \sqrt{y^2 + \sec^2 \beta (z_1 - z_1)^2}}$$

Вводя, безразмерные величины и обозначая

$$\alpha_x = v_x / V_0 \quad (2.6)$$

имеем

$$\alpha_x = -\frac{\varepsilon \operatorname{tg} \beta}{4\pi} \int_{-1}^1 g(\eta') \frac{d\eta'}{\varepsilon^2 + (\eta' - \eta)^2} + \\ + \frac{\varepsilon \operatorname{tg}^2 \beta}{4\pi} \int_{-1}^1 g(\eta') \frac{(\eta - \eta') d\eta'}{[\varepsilon^2 + (\eta - \eta')^2] \sqrt{\varepsilon^2 + \sec^2 \beta (\eta - \eta')^2}} = I_1 + I_2$$

(причем для отрицательного y следует писать $-\varepsilon$ вместо ε).

Разбивая в интеграле I_2 промежуток интегрирования на три части $(-1, \eta - \delta)$, $(\eta - \delta, \eta + \delta)$, $(\eta + \delta, 1)$ и заменяя во втором промежутке $g(\eta')$ через $g(\eta) + K(\eta')(\eta' - \eta)$, совершенно так же, как в предыдущих выводах, получим для I_2 оценку:

$$I_2 = O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Интеграл I_1 представляем в виде

$$I_1 = -g(\eta) \operatorname{tg} \beta \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{d\eta'}{\varepsilon^2 + (\eta' - \eta)^2} - \operatorname{tg} \beta \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_{-1}^1 \Delta g \frac{d\eta'}{\varepsilon^2 + (\eta' - \eta)^2} = I_1' + I_1''$$

Первый интеграл (I_1') вычисляется точно:

$$I_1' = -g(\eta) \frac{1}{4\pi} \operatorname{tg} \beta \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1 - \eta}{\varepsilon} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1 + \eta}{\varepsilon} \right] \operatorname{sign} y = -\frac{1}{4} g(\eta) \operatorname{tg} \beta \operatorname{sign} y + O(\varepsilon)$$

(Здесь $\operatorname{sign} y$ получается в результате указанной перемены знака ε при отрицательном y).

Для оценки I_1'' разбиваем промежуток интегрирования на три части, заменяя во втором интеграле Δg через $K(\eta')(\eta' - \eta)$, и, поступая, как и в предыдущих случаях, будем иметь

$$I_1'' = O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Таким образом окончательно для безразмерной скорости α_x с точностью до величин порядка $\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}$ имеем

$$\alpha_x = -\frac{1}{4} g(\eta) \operatorname{tg} \beta \operatorname{sign} y$$

Если приближаться к несущей линии вдоль луча, составляющего угол φ с осью x , то для α_x будем иметь общее выражение

$$\alpha_x = -\frac{1}{2\pi} g(\eta) (\pi - \varphi) \operatorname{tg} \beta \quad (2.7)$$

Выделяя из выражения (2.5) для α_i логарифмический член

$$\alpha_i'' = -\frac{1}{2\pi} g(\eta) \operatorname{tg} \beta \ln \frac{2}{\varepsilon} \quad (2.8)$$

видим, что α_x и α_i'' являются вещественной и мнимой частью комплексной скорости \bar{w} :

$$\bar{w} = \alpha_x - i\alpha_i'' = i \ln \left(-\frac{2}{\zeta} \right) \frac{1}{2\pi} g(\eta) \operatorname{tg} \beta \quad (2.9)$$

где ζ — комплексная переменная в плоскости сечения крыла:

$$\zeta = \varepsilon e^{i\varphi}$$

причем для однозначного определения логарифма в плоскости ζ проводим разрез вдоль положительной вещественной оси. Итак, получаем внешний относительно сечения крыла плоско-потенциальный поток, комплексная скорость которого (\bar{W}) представляется в виде

$$\frac{\bar{W}}{V_0} = (\cos \beta - i\alpha_i') + (\alpha_x - i\alpha_i'') \quad (2.10)$$

где α_i' получается из α_i вычитанием логарифмического члена, т. е.

$$\alpha_i' = \frac{1}{4\pi \cos \beta} \int_{-1}^1 g(\eta') \frac{d\eta'}{\eta - \eta'} - \frac{\operatorname{tg} \beta}{4\pi} \left\{ \int_{-1}^1 [g(\eta') - g(\eta)] \frac{d\eta'}{\eta' - \eta} + 2g(\eta) \left[\ln \sqrt{1 - \eta^2} - \frac{1}{2 \sin \beta} \ln \frac{1 + \sin \beta}{1 - \sin \beta} \right] \right\}$$

Первое слагаемое в этом выражении постоянно, таким образом соответствующая ему циркуляция G_1 находится обычным путем по характеристике профиля

$$a_0 = \left(\frac{dc_y}{dx} \right)_{x=\infty}$$

Для определения дополнительной циркуляции, вызванной вторым логарифмическим слагаемым, необходимо решить задачу об обтекании профиля потоком, скорость которого задана выражением (2.9).

Отметим здесь следующий важный для оценки области применимости теории несущей линии факт. При вычислении скоростей в окрестности сечения крыла в любой точке M , полярный угол которой φ произвольный, а не равный $\pm \frac{1}{2}\pi$, как мы приводили здесь, в выражения α_i и α_x , помимо приведенных членов, входят еще члены, не зависящие от ε , но зависящие от φ , и не являющиеся гармоническими функциями в плоскости сечения крыла.

Однако эти члены относительно угла скольжения β (или относительно угла стреловидности и кривизны в дальнейших наших приложениях теории несущей линии) имеют порядок β^3 .

Таким образом, для применимости теории несущей линии существенным является условие малости угла скольжения, — теория несущей линии справедлива до величин порядка β^3 . Этот результат учтем в дальнейшем.

Физический смысл указанного ограничения состоит, по видимому, в том, что, когда составляющие скорости вдоль размаха становятся большими, крыло под влиянием этой скорости начинает работать как крыло малого удлинения.

3. Обтекание сечения крыла логарифмическим потоком. Если известна функция, отображающая профиль на круг, задача об обтекании профиля потоком,

заданным выражением (2.9), не представляет никаких принципиальных трудностей. Однако точное решение этой задачи в применении к крылу конечного размаха не имеет смысла, так как вся теория крыла конечного размаха строится на предположении малости углов атаки и толщины профиля. А тогда, с точностью до величин порядка квадратов угла атаки и толщины, задача об обтекании профиля логарифмическим потоком (2.9) эквивалентна задаче обтекания плоской горизонтальной пластинки этим потоком. Эта же задача решается элементарно.

Скорости внешнего потока (2.9) соответствует потенциал

$$\Phi_0(\zeta) = \frac{i}{2\pi} g(\eta) \operatorname{tg} \beta \int \ln \left(-\frac{2}{\zeta} \right) d\zeta = \frac{i}{2\pi} g(\eta) \operatorname{tg} \beta \left\{ \zeta \left[\ln \left(-\frac{2}{\zeta} \right) + 1 \right] \right\} \quad (3.1)$$

Рассмотрим пластинку шириной $2t$, находящуюся в поле этого потока (так как введенным нами безразмерным длинам соответствует единица длины $l/2$, то хорде длиной b соответствует безразмерная длина $2b/l = 2t$). Потенциал потока, обтекающего пластинку, ищем в виде

$$\Phi(\zeta) = \Phi_0(\zeta) + \Phi_1(\zeta) \quad (3.2)$$

причем потенциал $\Phi(\zeta)$ находится из условия обтекания пластинки, т. е. на пластинке функция тока должна равняться нулю:

$$\psi(\bar{x}, 0) = \operatorname{Im} \Phi(\zeta) \Big|_{y=0} = 0$$

Это условие дает

$$\frac{1}{2\pi} g(\eta) \operatorname{tg} \beta \left\{ \bar{x} \left[\ln \left(\frac{2}{|\bar{x}|} \right) + 1 \right] \right\} + \psi_1(\bar{x}, 0) = 0 \quad (3.3)$$

Таким образом мы приходим к задаче определения функции комплексной переменной ζ , регулярной вне отрезка вещественной оси $(-t, +t)$, по известной мнимой части этой функции $\psi_1(\bar{x}, 0)$ на указанном отрезке. Отображая отрезок $(-t, t)$ на круг единичного радиуса плоскости $Z = \rho \exp(i\vartheta)$ при помощи функции $\zeta = \frac{1}{2} t (Z + 1/Z)$, будем иметь

$$\psi_1(\vartheta) = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{tg} \beta g(\eta) t \left[\cos \vartheta \left(\ln \frac{2}{t |\cos \vartheta|} + 1 \right) \right] \quad (3.4)$$

и легко проверить непосредственно, что этому граничному значению функции тока соответствует потенциал

$$\Phi_1(Z) = -\frac{i}{2\pi} g(\eta) t \operatorname{tg} \beta \left[\frac{1}{Z} \left(\ln \frac{1}{t} + 1 \right) - \frac{1}{2} \left(Z + \frac{1}{Z} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{Z^2} \right) \right] \quad (3.5)$$

К этому потенциалу необходимо добавить чисто циркуляционный поток, $\frac{G_2}{2\pi i} \ln Z$, причем циркуляция G_2 найдется из условия плавного обтекания задней кромки пластинки, т. е. записывая потенциал Φ в виде

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \frac{G_2}{2\pi i} \ln Z \quad (3.6)$$

мы должны выбрать G_2 так, чтобы

$$d\Phi/dZ = 0 \quad \text{при } Z = 1$$

Так как

$$\left(\frac{d\Phi_0}{dZ} \right)_{Z=1} = \left(\frac{d\Phi_0}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dZ} \right)_{Z=1} = 0$$

получим

$$G_2 = -2\pi i \left[\frac{d\Phi_1}{dZ} \right]_{Z=1} = \operatorname{tg} \beta g(\eta) t \ln \frac{4}{t} \quad (3.7)$$

Таким образом мы определили ту долю циркуляции, которая вызывается логарифмическим потоком. Циркуляция G_1 , создаваемая потоком постоянной скорости $\cos \beta - i\alpha_i'$, определяется из обычного условия Прандтля

$$G_1 = \cos \beta a_0 t (\alpha - \alpha_i' / \cos \beta) \quad (3.8)$$

где α — геометрический угол атаки для данного сечения крыла.

Общая циркуляция в данном сечении G равна сумме G_1 и G_2 . Таким образом, объединяя формулы (3.7) и (3.8), приходим к интегро-дифференциальному уравнению для циркуляции

$$G(\eta) = \cos \beta a_0 t (\alpha - \alpha_i' / \cos \beta) + g(\eta) t \operatorname{tg} \beta \ln \frac{4}{t} \quad (3.9)$$

где α_i' дается формулой (2.11).

4. Решение интегро-дифференциального уравнения для циркуляции.

В полученном окончательном уравнении для циркуляции (3.9) не входит явно условие малости угла скольжения β и можно было бы говорить о «точном» решении этого уравнения. Однако, как указано выше, гипотеза плоских сечений законна только для малых углов скольжения. Поэтому точное решение уравнения (3.9) соответствует действительности только до величин порядка β^2 и, следовательно, имеет смысл лишь решение, точное до величин этого порядка. Представляя циркуляцию G в виде ряда по степеням β

$$G = G_0 + \beta \Delta G + \beta^2 \Delta^2 G + \dots \quad (4.1)$$

можем, исходя из теории несущей линии, получить точно только эти выписанные члены.

Приведем здесь лишь уравнение для ΔG . Помимо того, что $\beta \Delta G$ является главным членом в величине поправки к циркуляции, вызванной наличием скольжения, для случая симметричного крыла поправка второго порядка $\beta^2 \Delta^2 G$ не влияет на моментные характеристики крыла, и она поэтому не представляет большого практического интереса. Подставляя выражение (4.1) в уравнение (3.9) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях β , получим

$$G_0(\eta) = a_0 t \left[\alpha - \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 g_0(\eta') \frac{d\eta'}{\eta - \eta'} \right] \quad \left(g_0(\eta') = \frac{dG_0(\eta')}{d\eta'} \right) \quad (4.2)$$

$$\Delta G(\eta) = a_0 t \left[\Delta \alpha - \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{d\Delta G}{d\eta'} \frac{d\eta'}{\eta - \eta'} \right] \quad (4.3)$$

где

$$\Delta \alpha = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 [g_0(\eta') - g_0(\eta)] \frac{d\eta'}{|\eta - \eta'|} + \frac{g_0(\eta)}{2\pi} \left(\ln \frac{4}{t} + \ln \sqrt{1 - \eta^2} - 1 \right) \quad (4.4)$$

При выводе выражения для Δz мы приняли $a_0 = 2\pi$, считая, что эмпирическая поправка к теоретическому значению этого коэффициента 2π в равной мере применима и к циркуляции G_2 , создаваемой логарифмическим потоком.

Уравнение (4.3) есть обычное уравнение Прандтля с переменным углом атаки Δz , величина которого определяется через основную циркуляцию G_0 , соответствующую обтеканию крыла без скольжения.

Следует, однако, отметить, что угол Δz резко меняется вдоль размаха и обычные методы решения уравнения Прандтля (метод Лоц, метод Мультигоппа) дают недостаточную точность для величины ΔG .

5. Стреловидное крыло. Упрощенная схема. Под упрощенной схемой стреловидного крыла мы понимаем схему, в которой стреловидное крыло заменяется ломаной (с изломом в центре крыла) несущей линией. Недостаток этой схемы не только в ее грубости (так как присоединенные вихревые шнуры крыла в действительности плавно изгибаются в центральной области крыла), но и в том, что она является гидродинамически недопустимой (вихревые нити конечной интенсивности не могут иметь излома) и приводит к неоднозначности скорости внешнего потока в окрестности излома.

Однако, как будет выяснено в дальнейшем, если исключить окрестность излома (практически — исключить промежуток от $z = -\frac{1}{2}b$ до $z = \frac{1}{2}b$), то в остальной части крыла такая упрощенная схема позволяет вычислять скорости с достаточной точностью.

а. Скорость, вызываемая вихревой пеленой. Вычисление скорости, вызываемой вихревой пеленой, для вихревой нити, изображенной на фиг. 3, почти ничем не отличается от вычисления скорости для крыла со скольжением.

Чтобы воспользоваться готовым результатом § 2, продолжим луч OB несущей линии до точки A' пересечения с границей вихревой пелены (фиг. 3). Тогда эффект части $\infty A'OB \infty$ вихревой пелены будет такой же, как в случае крыла со скольжением. Если мы учтем, что при выборе осей x и z , изображенном на фиг. 3, интенсивность вихревого слоя $\gamma(z)$ равна $-\frac{d\Gamma}{dz} = -V_0 g(\eta)$ (а не $-\frac{V_0}{\cos \chi} g(\eta)$, как в случае скользящего крыла), то безразмерная скорость α_{il} , вызванная этой частью вихревой пелены, с точностью до величины порядка $\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}$ представится в виде

$$\begin{aligned} \alpha_{il} = & \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 g(\eta') \frac{d\eta'}{\eta - \eta'} - \frac{\sin \chi}{4\pi} \left[\int_{-1}^1 [g(\eta') - g(\eta)] \frac{d\eta'}{|\eta' - \eta|} + \right. \\ & \left. + g(\eta) \left(\ln(1 - \eta^2) - \frac{1}{\sin \chi} \ln \frac{1 + \sin \chi}{1 - \sin \chi} \right) - \frac{g(\eta) \sin \chi}{2\pi} \ln \frac{2}{\varepsilon \cos \chi} \right] \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь χ — угол стреловидности.

К этой скорости необходимо добавить скорость, которая вызывается вихревой пеленой в треугольнике AOA' .

Легко видеть, что эта скорость в окрестности сечения с точностью до величин порядка ε , равна скорости в точке $M_0(x, 0, z)$, расположенной на несущей

линии. Применяя закон Био-Савара, находим скорость, вызванную вихревым шнуром ширины dz' , исходящим из точки P :

$$dv_{y_2} = \gamma(z')(z' - z) dz' \frac{1}{4\pi} \int_{z' \operatorname{tg} \chi}^{-z' \operatorname{tg} \chi} \frac{dx'}{r^3} \quad (r = \sqrt{(x - x')^2 + (z - z')^2})$$

или, интегрируя по x' и заменяя x через $-z \operatorname{tg} \chi$, найдем

$$dv_{y_2} = \frac{1}{4\pi} \gamma(z') \frac{\sin \chi}{z' - z} \left[1 - \frac{z + z'}{\sqrt{(z + z')^2 - 4zz' \cos^2 \chi}} \right]$$

Откуда интегрированием по z' от $-\frac{l}{2}$ до 0 получим

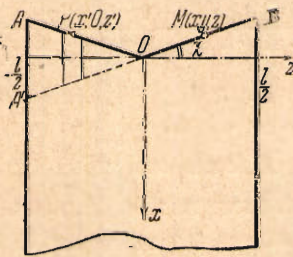
$$v_{y_2} = \frac{\sin \chi}{4\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^0 \gamma(z') \left[1 - \frac{z + z'}{\sqrt{(z + z')^2 - 4zz' \cos^2 \chi}} \right] \frac{dz'}{z' - z}$$

Вводя безразмерные величины по формулам (1.2) и обозначая

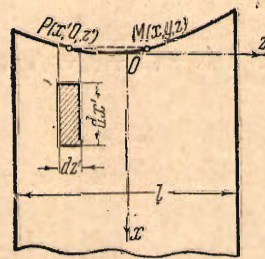
$$v_{y_2} = V_0 \alpha_{i_2}$$

получим

$$\alpha_{i_2} = \frac{\sin \chi}{4\pi} \int_{-1}^0 g(\eta') \left[1 - \frac{\eta + \eta'}{\sqrt{(\eta + \eta')^2 - 4\eta\eta' \cos^2 \chi}} \right] \frac{d\eta'}{\eta - \eta'} \quad (5.2)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

в. Скорость, вызываемая частью несущей линии AO . Прежде всего отметим, что скорость, вызываемая частью OB нити в точке $M_0(x, y, z)$ с точностью до величин порядка $\epsilon \ln \frac{1}{\epsilon}$, равна скорости, вызываемой самим сечением ($v_\varphi = \Gamma/2\pi\epsilon$), и, следовательно, не влияет на величину внешнего потока. Однако, разумеется, в окрестности центрального сечения (т. е. при малых η) пренебрегаемая величина порядка $\epsilon \ln \frac{1}{\epsilon}$ на протяжении всей хорды становится большой, и поэтому в окрестности центрального сечения крыла условия для применения гипотезы плоских сечений не выполняются.

Перейдем к вычислению скорости v_{y_2} , которая вызывается частью AO несущей нити. Для упрощения выкладок возьмем точку $M(x, y, z)$ на вертикали, проходящей через несущую нить (фиг. 4). Здесь $x = -z \operatorname{tg} \chi$, $x' = z' \operatorname{tg} \chi$, откуда следует

$$dv_{y_2} = \frac{\Gamma(z')}{4\pi r^3} [(z' - z) dx' - (x' - x) dz'] = -\frac{z\chi(z')}{2\pi r^3} \operatorname{tg} \chi dz'$$

где

$$r = \sqrt{(z - z')^2 + (x - x')^2 + y^2} = \sqrt{(z - z')^2 + (z + z')^2 \operatorname{tg}^2 \chi + y^2}$$

Вводя безразмерные величины и интегрируя, будем иметь.

$$\alpha_{i3} = \frac{v_{y3}}{V_0} = -\frac{\eta \operatorname{tg} \chi}{2\pi} \int_{-1}^0 G(\eta') \frac{d\eta'}{[(\eta - \eta')^2 + (\eta + \eta')^2 \operatorname{tg}^2 \chi + \varepsilon^2]^{3/2}} \quad (5.3)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ величина α_{i3} стремится к предельному значению

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha_{i3} = -\frac{\eta \operatorname{tg} \chi}{2\pi} \int_{-1}^0 G(\eta') \frac{d\eta'}{[(\eta - \eta')^2 + \operatorname{tg}^2 \chi (\eta + \eta')^2]^{3/2}} = A \quad (5.4)$$

Оценим разность между α_{i3} и предельным значением A :

$$\begin{aligned} & \alpha_{i3} - A = \\ & = \frac{\eta \operatorname{tg} \chi}{2\pi} \int_{-1}^0 \left\{ \frac{1}{[(\eta - \eta')^2 + (\eta + \eta')^2 \operatorname{tg}^2 \chi]^{3/2}} - \frac{1}{[(\eta - \eta')^2 + (\eta + \eta')^2 \operatorname{tg}^2 \chi + \varepsilon^2]^{3/2}} \right\} G(\eta') d\eta' \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} & |\alpha_{i3} - A| \leq \\ & \leq \frac{\eta \operatorname{tg} \chi}{2\pi} G_{\max} \int_{-1}^0 \left\{ \frac{1}{[(\eta - \eta')^2 + (\eta + \eta')^2 \operatorname{tg}^2 \chi]^{3/2}} - \frac{1}{[(\eta - \eta')^2 + (\eta + \eta')^2 \operatorname{tg}^2 \chi + \varepsilon^2]^{3/2}} \right\} d\eta' \leq M \frac{\varepsilon^2}{\eta^3} \end{aligned}$$

где M не зависит от η и ε .

Таким образом видим, что, исключая окрестность центрального сечения крыла (порядка $|\eta| \leq \chi^{-3/2}$), скорость, создаваемая вихревой нитью на расстояниях от нити порядка хорды, сохраняет постоянное значение.

Предельное выражение A скорости, создаваемой несущей линией, стремится, как легко видеть, к бесконечности при $\eta \rightarrow 0$. С другой стороны, если мы в выражении (5.3) устремим η к нулю, получим для скорости значение нуль. Эта неоднозначность обусловлена механической невозможностью существования ломаных вихревых нитей. Однако не следует думать, что при учете плавности искривления несущей нити гипотеза плоских сечений будет применима и к центральной области крыла. Неприемлемость гипотезы плоских сечений для центральной области стреловидного крыла вызывается тем, что поток в этой области не являлся даже приближенно плоско-потенциальным, т. е. величина $\partial^2 \Phi / \partial z^2 = \partial v_z / \partial z$ в этой области того же порядка, что и остальные члены полного уравнения Лапласа, и, следовательно, поток, набегающий на сечение крыла, близкое к центральной части, вместо того, чтобы обтекать это сечение как плоское, растекается в значительной своей доле вдоль размаха крыла. Но так как для крыла большого удлинения та часть крыла, где гипотеза плоских сечений не выполняется, мала по сравнению со всем размахом, то достаточно для этой части крыла получить лишь качественно соответствующее реальности соотношение для циркуляции, что и достигается введением плавного искривления несущей линии в центральной части, о чем мы будем говорить в следующих двух параграфах.

Складывая теперь выражения для α_{i1} , α_{i2} , α_{i3} (принимая для последнего его предельное значение A), получим полный внешний поток, обтекающий сечение крыла.

Выделяя из него логарифмический член

$$\alpha_{i1}'' = -\frac{1}{2\pi} g(\eta) \sin \chi \ln \frac{1}{s \cos \chi} \quad (5.5)$$

находим, как и в случае крыла со скольжением, соответствующую ему циркуляцию G_2 в виде

$$G_2 = g(\eta) \sin \chi t \ln \frac{4}{t \cos \chi} \quad (5.6)$$

и таким образом получим окончательное интегро-дифференциальное уравнение для циркуляции

$$G(\eta) = a_0 t \cos \chi \left(\alpha - \frac{\alpha'_{i1} + \alpha_{i2} + \alpha_{i3}}{\cos \chi} \right) + g(\eta) \sin \chi t \ln \frac{4}{t \cos \chi} \quad (5.7)$$

где $\alpha_{i1}' = \alpha_{i1} - \alpha_{i1}''$, а α_{i2} , α_{i3} даны формулами (5.2) и (5.4). Представляя, наконец, полную циркуляцию $G(\eta)$ в виде

$$G(\eta) = G_0(\eta) + \chi \Delta G(\eta) + \chi^2 \Delta^2 G(\eta) + \dots \quad (5.8)$$

получим, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях χ в уравнении (5.7), уравнения для поправочных членов ΔG , $\Delta^2 G$. (Разумеется, как и в случае скользящего крыла, гипотеза плоских сечений выполняется с точностью до величин порядка χ^3).

Для основной циркуляции и $G_0(\eta)$ получаем обычное уравнение Прандтля (4.2) и для первого поправочного члена

$$\Delta G(\eta) = a_0 t \left(\Delta \alpha - \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{d\Delta G}{d\eta'} \frac{d\eta'}{\eta - \eta'} \right) \quad (5.9)$$

где $\Delta \alpha$ определяется из равенства:

$$\begin{aligned} \Delta \alpha = & \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 [g(\eta') - g(\eta)] \frac{d\eta'}{|\eta' - \eta|} + \frac{1}{2\pi} g_0(\eta) \left[\ln \frac{4}{t} + \ln \sqrt{1 - \eta^2} - 1 \right] - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^0 g_0(\eta') \frac{\eta' d\eta'}{\eta - \eta'} + \frac{\eta}{2\pi} \int_{-1}^0 G_0(\eta') \frac{d\eta'}{(\eta - \eta')^2} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Как выяснится в дальнейшем, этим выражением для $\Delta \alpha$ в практических расчетах можно пользоваться для значений $|\eta| > t_0$ (t_0 — значение t при $\eta = 0$).

Такое же уравнение получается для $\Delta^2 G$ со значением угла атаки $\Delta^2 \alpha$, выражения для которого мы здесь приводить не будем.

6. Теория криволинейной несущей линии. Вычисление внешнего потока производим по установленным в конце § 1 правилам, т. е. рассчитываем поле скоростей, вызываемое вихревой системой крыла — вихревой пеленой и несущей нитью.

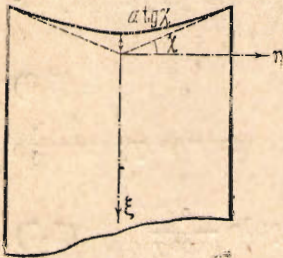
Пусть $x = x(z)$ — уравнение несущей линии или, в безразмерных величинах

$$\xi = \xi(\eta), \quad \xi = 2x/l \quad (6.1)$$

Обозначим далее через $k(\eta, \eta')$ величину

$$k(\eta, \eta') = -\frac{x' - x}{z' - z} = -\frac{\xi' - \xi}{\eta' - \eta}, \quad k(\eta) = k(\eta, \eta) \quad (6.2)$$

т. е. $k(\eta, \eta')$ есть тангенс угла между отрезком PM и осью z со знаком минус и $k(\eta)$ — тангенс угла наклона касательной к несущей линии в точке z к оси z с обратным знаком. Будем определять скорости в точке M , лежащей на вертикали, проходящей через несущую линию (фиг. 4).



Фиг. 5

а. Скорость, создаваемая вихревой петлей (v_{v1}). Применяя закон Био-Савара, без труда получим

$$v_{v1} = \frac{1}{4\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \gamma(z') \frac{z' - z}{y^2 + (z' - z)^2} dz' + \frac{1}{4\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \gamma(z') \frac{(z' - z)^2 k(\eta, \eta') dz'}{[y^2 + (z' - z)^2] \sqrt{y^2 + [1 + k^2(\eta - \eta')] (z' - z)^2}} \quad (6.3)$$

Вводя безразмерные величины по формулам (1.2) и обозначая $v_{v1} / V_0 = \alpha_{i1}$, будем иметь

$$\alpha_{i1} = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 g(\eta') \frac{\eta - \eta'}{\varepsilon^2 + (\eta - \eta')^2} d\eta' - \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 g(\eta') \frac{(\eta - \eta')^2 k(\eta, \eta') d\eta'}{[\varepsilon^2 + (\eta - \eta')^2] \sqrt{\varepsilon^2 + [1 + k^2(\eta, \eta')] (\eta - \eta')^2}}$$

Заменяя во втором интеграле выражение

$$g(\eta') \frac{k(\eta, \eta')}{\sqrt{\varepsilon^2 + [1 + k^2(\eta, \eta')] (\eta - \eta')^2}}$$

через

$$\frac{g(\eta) k(\eta)}{\sqrt{\varepsilon^2 + [1 + k^2(\eta)] (\eta - \eta')^2}} + \left[\frac{g(\eta') k(\eta, \eta')}{\sqrt{\varepsilon^2 + [1 + k^2(\eta, \eta')] (\eta - \eta')^2}} - \frac{g(\eta) k(\eta)}{\sqrt{\varepsilon^2 + [1 + k^2(\eta)] (\eta - \eta')^2}} \right]$$

и предполагая, что, помимо условия Липшица для функции $g(\eta)$, выполняется аналогичное условие для функции $k(\eta, \eta')$

$$|k(\eta, \eta_1') - k(\eta, \eta_2')| < M |\eta_1' - \eta_2'| \quad (6.5)$$

приходим к выражению для скорости α_{i1} , точному до величин порядка $\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}$,

$$\alpha_{i1} = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 g(\eta') \frac{d\eta'}{\eta - \eta'} - \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \left[g(\eta') \frac{k(\eta, \eta')}{\sqrt{1 + k^2(\eta, \eta')}} - g(\eta) \frac{k(\eta)}{\sqrt{1 + k^2(\eta)}} \right] \frac{d\eta'}{|\eta - \eta'|} + \frac{1}{4\pi} g(\eta) \frac{k(\eta)}{\sqrt{1 + k^2(\eta)}} \left\{ \frac{\sqrt{1 + k^2(\eta)}}{k(\eta)} \ln \frac{\sqrt{1 + k^2(\eta)} + k(\eta)}{\sqrt{1 + k^2(\eta)} - k(\eta)} - \ln(1 - \eta^2) \right\} - \frac{1}{2\pi} g(\eta) \frac{k(\eta)}{\sqrt{1 + k^2(\eta)}} \ln \frac{2\sqrt{1 + k^2(\eta)}}{\varepsilon} \quad (6.6)$$

При этом требованию малости угла скольжения (или стреловидности) соответствует здесь требование малости функции $k(\eta, \eta')$, а значит, и $k(\eta)$.

Оценки отдельных членов выражения (6.4) являются здесь почти буквальным повторением оценок §2, поэтому не приводим соответствующих выкладок.

Следует несколько остановиться на условии (6.5) для $k(\eta, \eta')$. Это условие означает ограниченность кривизны несущей линии, и для того, чтобы пренебрегаемые члены порядка $\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}$ были действительно малы на расстояниях порядка длины хорды от несущей линии, необходимо, чтобы константа M была порядка единицы, т. е. для применимости теории несущей линии радиус кривизны несущей линии должен быть порядка длины размаха.

b. Скорость, создаваемая несущей линией. Обозначим эту скорость через v_{y2} и соответствующую безразмерную скорость через α_{i2} . Тогда по закону Био-Савара будем иметь

$$v_{y2} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l} \Gamma(z') \frac{[k(\eta') - k(\eta, \eta')](z - z')}{r^3} dz'$$

где

$$r = \sqrt{y^2 + [1 + k^2(\eta, \eta')](z - z')^2}$$

Вводя безразмерные величины, получим

$$\alpha_{i2} = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 G(\eta') \frac{[k(\eta') - k(\eta, \eta')](\eta - \eta')}{\{\varepsilon^2 + [1 + k^2(\eta, \eta')](\eta - \eta')^2\}^{3/2}} d\eta' \quad (6.7)$$

Представим α_{i2} в виде

$$\begin{aligned} \alpha_{i2} = & \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^2 [G(\eta') - G(\eta)] \frac{[k(\eta') - k(\eta, \eta')](\eta - \eta') d\eta'}{\{\varepsilon^2 + [1 + k^2(\eta, \eta')](\eta - \eta')^2\}^{3/2}} + \\ & + \frac{G(\eta)}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{[k(\eta') - k(\eta, \eta')](\eta - \eta') d\eta'}{\{\varepsilon^2 + [1 + k^2(\eta, \eta')](\eta - \eta')^2\}^{3/2}} = I_1 + I_2 \end{aligned}$$

При ε , стремящемся к нулю, I_1 стремится к конечному предельному значению

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 [G(\eta') - G(\eta)] \frac{k(\eta') - k(\eta, \eta') d\eta'}{[1 + k^2(\eta, \eta')]^{3/2} |\eta - \eta'| (\eta - \eta')} \quad (6.8)$$

Для разности между I_1 и предельным его значением обычным методом разбиения промежутка интегрирования на три части $(-1, \eta - \delta)$, $(\eta - \delta, \eta + \delta)$, $(\eta + \delta, 1)$ получим оценку

$$|I_1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1| \leq \frac{1}{2\pi} M g_{\max} \frac{\varepsilon^2}{\delta} + \frac{1}{2\pi} M G_{\max} \frac{\varepsilon^2}{\delta^2} = O(\varepsilon^2)$$

где g_{\max} — максимальное значение $|g(\eta')|$ в промежутке $(\eta - \delta, \eta + \delta)$ и, следовательно, за исключением окрестности концов крыла, эта величина пренебрежимо мала для расстояний (ε) порядка хорды. Для выделения особенности интеграла I_2 введем функцию

$$F(\eta, \eta') = \frac{k(\eta') - k(\eta, \eta')}{\eta - \eta'} - \frac{1}{2} \frac{d^2 \xi}{d\eta^2} \quad (6.9)$$

Легко видеть, что

$$\lim_{\eta' \rightarrow \eta} \frac{k(\eta') - k(\eta, \eta')}{\eta - \eta'} = \frac{1}{2} \frac{d^2 \xi}{d\eta^2}$$

Таким образом в предположении непрерывности кривизны несущей линии $F(\eta, \eta')$ имеет нуль по крайней мере первого порядка в точке $\eta' = \eta$.

Отсюда получаем

$$I_2 = \frac{1}{8\pi} G(\eta) \frac{d^2 \xi}{d\eta^2} \int_{-1}^1 \frac{(\eta - \eta')^2}{\rho^3} d\eta' + \frac{G(\eta)}{4\pi} \int_{-1}^1 F(\eta, \eta') \frac{(\eta - \eta')^2}{\rho^3} d\eta'$$

где

$$\rho^2 = \varepsilon^2 + [1 + k^2(\eta, \eta')] (\eta - \eta')^2$$

Наконец, обозначая через ρ_0 величину

$$\rho_0 = \sqrt{\varepsilon^2 + [1 + k^2(\eta)] (\eta - \eta')^2}$$

получим

$$I_2 = \frac{G(\eta)}{8\pi} \frac{d^2 \xi}{d\eta^2} \int_{-1}^1 \frac{(\eta - \eta')^2}{\rho_0^3} d\eta' + \frac{G(\eta)}{8\pi} \frac{d^2 \xi}{d\eta^2} \int_{-1}^1 (\eta - \eta')^2 \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{\rho_0^3} \right) d\eta' + \\ + \frac{G(\eta)}{4\pi} \int_{-1}^1 F(\eta, \eta') \frac{(\eta - \eta')^2}{\rho^3} d\eta' = I_2' + I_2'' + I_2'''$$

Последние два интеграла стремятся к конечным пределам при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2'' = \frac{G(\eta)}{8\pi} \frac{d^2 \xi}{d\eta^2} \int_{-1}^1 \left[(1 + k^2(\eta, \eta'))^{-\frac{3}{2}} - (1 + k^2(\eta))^{-\frac{3}{2}} \right] \frac{d\eta'}{|\eta - \eta'|}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2''' = \frac{G(\eta)}{4\pi} \int_{-1}^1 F(\eta, \eta') \frac{d\eta'}{|\eta - \eta'|}$$

Порядки разностей между интегралами и их предельными значениями будут $O(\varepsilon)$.

Интеграл I_2' вычисляется точно:

$$I_2' = \frac{G(\eta)}{4\pi} \frac{d^2 \xi}{d\eta^2} [1 + k^2(\eta)]^{-\frac{3}{2}} \left\{ \ln \frac{2\sqrt{1+k^2(\eta)}}{\varepsilon} - 1 + \ln \sqrt{1-\eta^2} \right\} + O(\varepsilon)$$

Итак, окончательно с точностью до величин порядка ε имеем

$$\alpha_{i2} = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 [G(\eta') - G(\eta)] \frac{k(\eta') - k(\eta, \eta')}{[1 + k^2(\eta, \eta')]^{3/2}} \frac{d\eta'}{|\eta - \eta'| (\eta - \eta')} + \\ + \frac{G(\eta)}{4\pi} \int_{-1}^1 F(\eta, \eta') \frac{d\eta'}{|\eta - \eta'|} + \frac{G(\eta)}{8\pi} \frac{d^2 \xi}{d\eta^2} \int_{-1}^1 \left\{ [1 + k^2(\eta, \eta')]^{-\frac{3}{2}} - [1 + k^2(\eta)]^{-\frac{3}{2}} \right\} \frac{d\eta'}{|\eta - \eta'|} + \\ + \frac{G(\eta)}{4\pi} \frac{d^2 \xi}{d\eta^2} [1 + k^2(\eta)]^{-\frac{3}{2}} \left(\ln \frac{2\sqrt{1+k^2(\eta)}}{\varepsilon} - 1 + \ln \sqrt{1-\eta^2} \right) \quad (6.40)$$

Чтобы составить теперь уравнение для циркуляции G , выделяем из выражений α_{i1} и α_{i2} члены с $\ln \frac{2\sqrt{1+k^2(\eta)}}{\varepsilon}$ и находим соответствующую им цир-

куляцию G_2 , циркуляция же G_1 , обусловленная постоянными слагаемыми, определится из обычного соотношения Прандтля.

Не выписывая полного уравнения для циркуляции, приведем лишь окончательное уравнение для поправки первого порядка относительно величины ξ и ее производных.

Представляя $G(\eta)$ в виде

$$G_0(\eta) + \Delta G(\eta) + \Delta^2 G(\eta) + \dots$$

будем относить к $\Delta^N G$ все величины порядка ξ^N

Для ΔG будем иметь обычное уравнение Прандтля

$$\Delta G(\eta) = a_0 t \left(\Delta \alpha - \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{d\Delta G}{d\eta'} \frac{d\eta'}{\eta - \eta'} \right) \quad (6.11)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta \alpha = & \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 [g_0(\eta') k(\eta - \eta') - g_0(\eta) k(\eta)] \frac{d\eta'}{|\eta - \eta'|} + \\ & + \frac{1}{2\pi} g_0(\eta) k(\eta) \left[\ln \frac{4}{t} + \ln \sqrt{1 - \eta^2} - 1 \right] - \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 [G_0(\eta') - G_0(\eta)] [k(\eta') - k(\eta; \eta')] \frac{d\eta'}{|\eta - \eta'| (\eta - \eta')} - \\ & - \frac{G_0(\eta)}{4\pi} \int_{-1}^1 F(\eta; \eta') \frac{d\eta'}{|\eta - \eta'|} - \frac{G_0(\eta)}{4\pi} \frac{d^2 \xi}{d\eta^2} \left[\ln \frac{4}{t} + \ln \sqrt{1 - \eta^2} - 1 \right] \end{aligned} \quad (6.12)$$

где $G_0(\eta)$ — решение уравнения Прандтля без учета искривленности несущей линии.

7. Стреловидное крыло. Схема плавно изогнутой несущей линии. В качестве примера на приложение результатов предыдущего параграфа рассмотрим стреловидное крыло, которое схематизируем как несущую линию, имеющую форму гиперболы, асимптоты которой совпадают с прямыми $x = \pm z \operatorname{tg} \chi$, т. е. с несущей линией упрощенной схемы § 5 (фиг. 5).

Уравнение такой гиперболы в безразмерных координатах ξ и η будет

$$\xi = -\operatorname{tg} \chi \sqrt{a^2 + \eta^2} \approx -\chi \sqrt{a^2 + \eta^2} \quad (7.1)$$

где a — полуось сопряженной гиперболы.

Относительно величины полуоси a подробнее будем говорить ниже. Здесь только отметим, что величина a должна зависеть от корневой хорды t_0 . Причем только из соображения, что несущая нить должна находиться на крыле, следует, что a тем меньше, чем меньше t_0 .

Вычислим величины, входящие в формулу (6.12):

$$k(\eta) = -\frac{d\xi}{d\eta} = \chi \frac{\eta}{\sqrt{a^2 + \eta^2}} \quad (7.2)$$

$$k(\eta; \eta') = -\frac{\xi' - \xi}{\eta' - \eta} = \chi \frac{\eta' + \eta}{\sqrt{a^2 + \eta'^2} + \sqrt{a^2 + \eta^2}} \quad (7.3)$$

$$\frac{d^2 \xi}{d\eta^2} = -\chi a^2 (a^2 + \eta^2)^{-\frac{3}{2}} \quad (7.4)$$

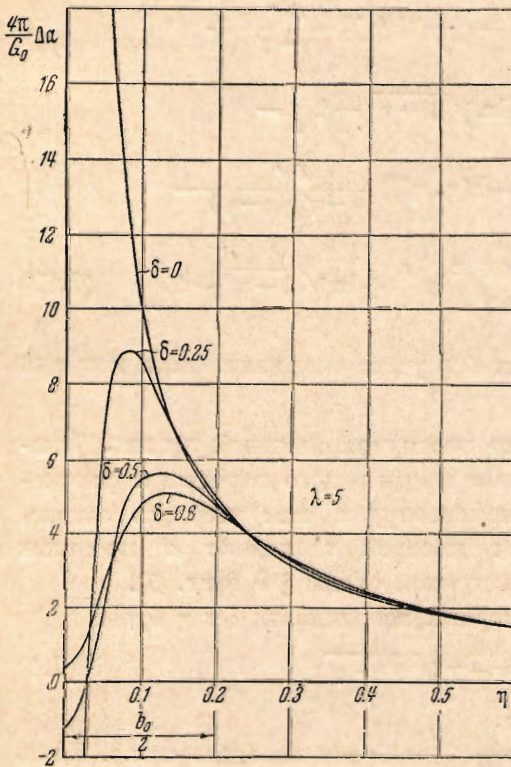
$$F(\eta, \eta') = \chi \left\{ \frac{\eta' \sqrt{a^2 + \eta^2} - \eta \sqrt{a^2 + \eta'^2}}{(\eta - \eta') \sqrt{a^2 + \eta^2} (\sqrt{a^2 + \eta^2} + \sqrt{a^2 + \eta'^2})} + \frac{1}{2} \frac{a^2}{(a^2 + \eta^2)^{3/2}} \right\} \quad (7.5)$$

Мы видим отсюда, что $\Delta\alpha$, а следовательно, и поправка первого порядка ΔG будут пропорциональны углу стреловидности χ в согласии с расчетом по упрощенной схеме.

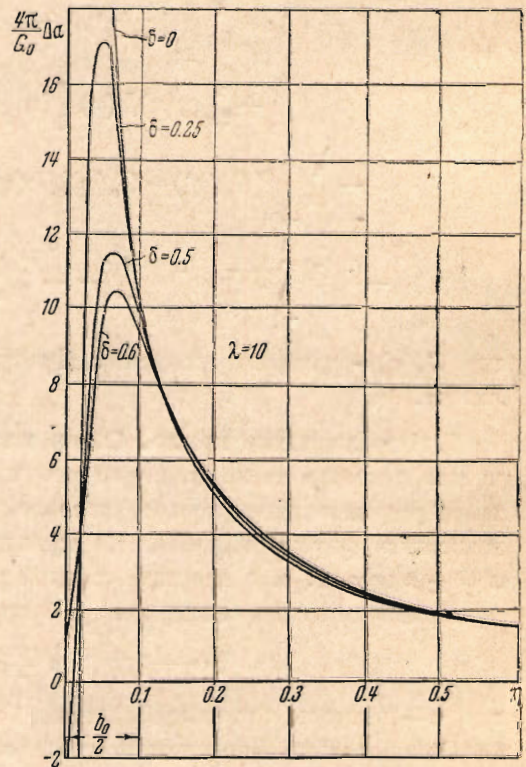
Вычисляя, будем иметь

$$\int_{-1}^1 F(\eta, \eta') \frac{d\eta'}{|\eta - \eta'|} = \chi \frac{a^2}{(a^2 + \eta^2)^{3/2}} \left[\ln \frac{1}{2a} + \ln \frac{a^2 (\sqrt{1+a^2} + \sqrt{a^2 + \eta^2})}{a^2 + \eta^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{a^2 + \sqrt{1+a^2} \sqrt{a^2 + \eta^2}}{[\sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+\eta^2}]^2} \left(1 + \frac{\eta^2}{a^2} \right) - \frac{\eta^2}{a^2} \frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+\eta^2}} \right] \quad (7.6)$$

Легко теперь непосредственно убедиться, что при $\eta \gg a$ выражение для



Фиг. 6



Фиг. 7

дополнительного угла атаки $\Delta\alpha$ гиперболической несущей линии стремится к значению этого угла, полученному по упрощенной схеме § 5. Для сравнения, насколько практически близки эти выражения, нами проведены были расчеты дополнительного угла атаки гиперболической несущей линии при различных отношениях $a/t_0 = \delta$ (от 0.25 до 0.6) для двух удлинений $\lambda = 5$ и $\lambda = 10$ и по упрощенной формуле (5.10). Результаты этих расчетов приведены на фиг. 6 и 7. Как видим, для значений $|\eta| > t_0$ все кривые практически совпадают. В то же время при $|\eta| < t_0$ ход этих кривых существенно зависит от величины δ .

Нельзя, конечно, оставаясь в рамках теории несущей линии, строго обосновать тот или иной выбор параметра a . Простейшим предположением является принять его вообще пропорциональным t_0 . Далее можно поставить условие конечности циркуляции в центре крыла при $\lambda \rightarrow \infty$. Обоснованием этому может служить то, что, хотя при очень больших удлинениях в центральной области стреловидного крыла возникают очень большие вертикальные скорости, эти скорости очень быстро уменьшаются при удалении от центрального сечения и поэтому этот потокне обтекает сечений в их плоскости, а устремляется вдоль размаха и, следовательно, не вызывает тех больших значений циркуляции, которые предписываются гипотезой плоских сечений. Если составить выражение для угла атаки $\Delta\alpha$ в точке $\eta = 0$, то увидим, что условием его конечности является

$$\lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{a}{t_0} = \frac{1}{8} e^{3/2} \tag{7.7}$$

Следовательно, если принять a пропорциональным t_0 , то тем самым a будет определено. Отметим, что условие

$$a = \frac{1}{8} e^{3/2}$$

приводят к нулевому предельному значению той части угла атаки в точке $\eta = 0$, которая обусловлена несущей линией.

Что касается угла атаки, создаваемого вихревой пеленой, то он остается конечным как в случае упрощенной схемы, так и в случае гиперболической схемы. Некоторые расхождения в центральной части крыла вообще не имеют никакого практического значения, так как здесь $g(\eta)$ очень мало, т. е. малы и дополнительные углы атаки, по какой бы схеме они ни вычислялись.

Эти соображения приводят нас к следующему практическому приему вычисления дополнительных углов атаки $\Delta\alpha$ для стреловидного крыла.

1. Для значений $|\eta| > t_0$ углы атаки $\Delta\alpha$ вычисляются по упрощенной схеме (формула 5.10).

2. Для $|\eta| < t_0$ та часть угла атаки, которая обусловлена вихревой пеленой $\Delta\alpha_1$, вычисляется по упрощенной схеме (три первых слагаемых в формуле 5.10).

3. Вместо интеграла $\frac{1}{2\pi} \eta \int_{-1}^0 G_0(\eta') \frac{d\eta'}{(\eta - \eta')^3}$ для вычисления угла атаки $\Delta\alpha_2$, обусловленного несущей нитью, применять следующую приближенную формулу, вытекающую из рассмотрения гиперболической нити

$$\Delta\alpha_2 = \frac{k\eta^2}{(a^2 + \eta^2)^{3/2}}$$

где $a = 0.57 t_0$, а коэффициент k выбирать так, чтобы при $\eta = t_0$ $\Delta\alpha_2$ получился равным величине

$$\frac{1}{2\pi} \eta \int_{-1}^0 G_0(\eta') \frac{d\eta'}{(\eta - \eta')^3}$$

8. Силы и моменты, действующие на крыло. Величину подъемной силы, индуктивного сопротивления и моментов проще всего вычислить, пользуясь теоремой количества движения и момента количества движения. Соответ-

ственно этому получим для всех величин обычные выражения через полную циркуляцию.

а. Подъемная сила

$$Q = \rho V_0 \int_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l} \Gamma dz = \frac{1}{4} \rho V_0^2 l^2 \int_{-1}^1 G(\eta) d\eta \quad (8.1)$$

Отсюда

$$c_y = Q : \left(\frac{1}{2} \rho V_0^2 S \right) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^1 G(\eta) d\eta \quad (8.2)$$

где c_y — коэффициент подъемной силы крыла, S — площадь крыла.

Для крыла со скольжением мы должны интегрировать по z_1 , и так как $z_1 = \frac{1}{2} l \cos \beta \eta$, то в формулах (8.1) и (8.2) появится множитель $\cos \beta$.

б. Индуктивное сопротивление

$$R = \frac{\rho}{2} \int_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l} \Gamma w_{i\infty} dz = \frac{1}{8} \rho V_0^2 l^2 \int_{-1}^1 G(\eta) \alpha_{i\infty} d\eta \quad (8.3)$$

Отсюда коэффициент индуктивного сопротивления c_{xi} будет равен

$$c_{xi} = R : \left(\frac{1}{2} \rho V_0^2 S \right) = \frac{\lambda}{4} \int_{-1}^1 \alpha_{i\infty} G(\eta) d\eta \quad (8.4)$$

Здесь $w_{i\infty}$ — индуктивная скорость на бесконечности, $\alpha_{i\infty}$ — индуктивная безразмерная скорость на бесконечности

$$\alpha_{i\infty} = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 g(\eta') \frac{d\eta'}{\eta - \eta'} \quad (8.5)$$

в. Момент крена

$$M_x = \rho V_0 \int_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l} \Gamma z dz = \frac{1}{8} \rho V_0^2 l^3 \int_{-1}^1 \eta G(\eta) d\eta \quad (8.6)$$

и коэффициент момента

$$c_{mx} = M_x : \left(\frac{1}{2} \rho V_0^2 S \frac{l}{2} \right) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^1 \eta G(\eta) d\eta \quad (8.7)$$

Из приведенных формул легко определить главные члены поправок, вызванные наличием косизны потока (β), стреловидности (χ) или искривленности несущей линии.

Обозначая эти поправки знаком Δ ; при соответствующих коэффициентах, будем иметь

$$\Delta c_y = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\beta}{\chi} \right) \int_{-1}^1 \Delta G d\eta \quad (8.8)$$

$$\Delta c_{xi} = \frac{\lambda}{4} \left(\frac{\beta}{\chi} \right) \int_{-1}^1 (G_0 \Delta \alpha_{i\infty} + \alpha_{i\infty 0} \Delta G) d\eta \quad (8.9)$$

$$\Delta c_{mx} = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\beta}{\chi} \right) \int_{-1}^1 \eta \Delta G d\eta \quad (8.10)$$

Здесь скобка $\begin{pmatrix} \beta \\ \chi \end{pmatrix}$ означает, что нужно брать множитель β или χ соответственно тому, рассматривается ли случай скольжения или стреловидности, а для крыла с искривленной несущей нитью этот множитель равен единице.

Величины $\alpha_{i\infty 0}$ и $\Delta\alpha_{i\infty}$ легко вычисляются при этом через значение циркуляции и угла атаки:

$$\alpha_{i\infty 0} = 2(\alpha - G_0 / a_0 t), \quad \Delta\alpha_{i\infty} = 2(\Delta\alpha - \Delta G / a_0 t) \quad (8.11)$$

где $\Delta\alpha$ — дополнительный угол атаки, определяющийся по формулам (4.4), (5.10) и (6.12), причем в случае стреловидного крыла пользоваться соответствующим исправлением этого угла (§ 7).

Применение теоремы количества движения и момента количества движения оставляет невыясненным вопрос о том, дает ли подинтегральное выражение в приведенных формулах значение местной подъемной силы, действующей на данное сечение крыла. Для выяснения этого вопроса мы должны рассчитать, пользуясь гипотезой плоских сечений, подъемную силу, которая действует на сечение крыла. Обозначив через β угол между направлением несущей линии в данном месте и осью z (z_1 в случае скольжения), будем иметь безразмерную скорость набегающего на сечение крыла внешнего потока в виде

$$(\cos \beta - i\dot{\alpha}_i') + (\alpha_x - i\alpha_i'')$$

где α_i' — постоянная слагающая индуктивной скорости и $\alpha_x - i\alpha_i''$ — комплексная скорость логарифмического потока. Для всех разобранных нами случаев эта скорость представляется в виде

$$\alpha_x - i\alpha_i'' = Ki \ln \left(-\frac{2}{\zeta} \right)$$

где K — различная для различных случаев вещественная константа. Отметим, что как K , так и α_i' пропорциональны геометрическому углу атаки сечения.

Заменяя профиль сечения эквивалентной пластинкой и вспоминая выражение потенциала обтекания пластинки логарифмическим потоком (§ 3), отображая далее пластинку на круг единичного радиуса в плоскости Z , будем иметь следующее полное выражение для потенциала потока, обтекающего сечение крыла:

$$\Phi = t \left\{ \frac{1}{2} \left(Z + \frac{1}{Z} \right) (\cos \beta - i\alpha_i') + \frac{\alpha \cos \beta - \alpha_i'}{iZ} + \right. \quad (8.12)$$

$$\left. + Ki \left[\frac{1}{2} \left(Z + \frac{1}{Z} \right) \ln \left(-\frac{1}{Z} \right) + \frac{1}{2} \left(Z - \frac{1}{Z} \right) \left(\ln \frac{4}{t} + 1 \right) \right] \right\} + \frac{G}{2\pi i} \ln Z$$

Подъемная сила, создаваемая этим потоком, может быть вычислена по формуле

$$q = -\frac{\rho V_0^2}{2} \frac{l}{2} \operatorname{Re} \int \left(\frac{d\Phi}{dZ} \right)^2 \frac{dZ}{d\zeta} dZ$$

причем интеграл берется здесь по пути, исходящему из точки $Z=1$, окружающему круг единичного радиуса в положительном направлении и возвращающемуся в точку $Z=1$. Такой выбор пути интегрирования здесь необходим вследствие неоднозначности потенциала, для которого отрезок вещественной оси от 0 до ∞ является разрезом. Дифференцируя выражение (8.12) и производя дальнейшие вычисления, увидим, что лишь два слагаемых подинтегрального выражения первого порядка относительно угла атаки дадут отличные от нуля слагаемые подъемной силы, именно

$$\frac{1}{\pi i Z} \cos \beta G + iKt \cos \beta \left(1 - \frac{1}{Z} \right) \ln \left(-\frac{1}{Z} \right)$$

Интеграл от первого члена вычисляется через вычет в нулевой точке и дает в выражении подъемной силы слагаемое

$$q_1 = -\frac{1}{2} \rho V_0^2 G = -\rho V_0 \Gamma$$

(Знак минус соответствует направлению по вертикали вверх). Интеграл от второго слагаемого вычисляется подстановкой $Z = \exp i\vartheta$, причем $\ln(-1/Z) = = i(\pi - \vartheta)$ и дает слагаемое в подъемной силе

$$q_2 = -\frac{1}{2} \rho V_0^2 l 2Kt\pi \cos \beta$$

Помимо этой части подъемной силы, нужно учесть наличие составляющей потока вдоль размаха. Основной поток V_0 имеет составляющую $-V_0 \sin \beta$, а обусловленная вихревой системой крыла скорость равна $V_x \operatorname{ctg} \beta = V_0 \alpha_x \operatorname{ctg} \beta$.

Подъемную силу, создаваемую этими скоростями, вычисляем по теореме Бернулли, т. е.

$$q_3 = \rho V_0^2 \cos \beta \int_{-b}^b (\alpha_{x_1} - \alpha_{x_2}) dx = \rho V_0^2 \frac{l}{2} \cos \beta \int_{-l}^l (\alpha_{x_1} - \alpha_{x_2}) d\bar{x}$$

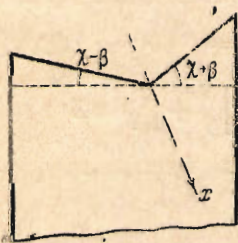
где α_{x_2} — скорость на нижней поверхности, α_{x_1} — скорость на верхней поверхности.

Так как $\alpha_x = \operatorname{Re} Ki \ln(-2/\zeta) = -K(\pi - \varphi)$, то $\alpha_{x_1} - \alpha_{x_2} = 2K\pi$ при $x > 0$ и $\alpha_{x_1} - \alpha_{x_2} = 0$ при $x < 0$. Отсюда

$$q_3 = \rho V_0^2 \frac{l}{2} \cos \beta 2\pi t K = -q_2$$

и таким образом подъемная сила сечения равна $\rho V_0 \Gamma \cos \beta$, т. е. равна подинтегральной функции в выражении суммарной подъемной силы крыла (следует учесть, что $dz = ds \cos \beta$, где ds — элемент длины несущей нити).

Остановимся, наконец, на вопросе совместного влияния стреловидности (или искривленности несущей нити) и скольжения на величину момента M_x .



Фиг. 8

Случай наличия стреловидности и скольжения охватывается, разумеется, теорией криволинейной несущей нити, но нам важно получить хотя и приближенную, но явную формулу для величины этого совместного влияния. Если пренебречь квадратами углов скольжения и стреловидности, то основная поправка пойдет за счет того, что при наличии скольжения одна часть крыла будет расположена по отношению к потоку под углом более близким к прямому углу, чем другая (фиг. 8).

Подъемная сила q на впереди идущем крыле будет иметь значение

$$q = \rho V_0 \Gamma \cos(\chi + \beta)$$

а на позади идущем

$$q = \rho V_0 \Gamma \cos(\chi - \beta)$$

Следовательно, в результате скольжения впереди идущее крыло получает приращение

$$\Delta q = -\rho V_0 \Gamma \beta \sin \chi$$

а позади идущее

$$\Delta q = +\rho V_0 \Gamma \beta \sin \chi$$

Отсюда найдется приращение момента

$$\Delta M_x = \rho V_0 \beta \sin \chi \left\{ - \int_0^{\frac{1}{2}l} z \Gamma dz + \int_{-\frac{1}{2}l}^0 z \Gamma dz \right\}$$

или

$$\Delta M_x = -\frac{1}{8} \rho V_0^2 l^3 \beta \sin \chi \left(\int_0^1 \eta G(\eta) d\eta - \int_{-1}^0 \eta G(\eta) d\eta \right) \quad (8.13)$$

Так как $z \sin \chi = -x \operatorname{sign} z$, то легко видеть, что ΔM_x может быть представлен также в виде

$$\Delta M_x = \beta M_z \quad (8.14)$$

(если, конечно, условиться проводить несущую линию через точки приложения подъемной силы сечений).

Формула (8.13) показывает, что стреловидность вперед уменьшает восстанавливающие моменты скользящего крыла и, наоборот, стреловидность назад их увеличивает.

Отметим, что с точностью до квадратов угла стреловидности под величиной G в формуле (8.13) можно понимать циркуляцию прямого крыла G_0 .

Аналогичное соотношение можно получить для крыла с изогнутой осью. Здесь угол χ переменный.

Понимая под углом χ угол между направлением касательной к нити и осью z скользящего крыла (т. е. с точностью до третьей степени этого угла функцию $k(\eta)$ § 6) будем иметь

$$\Delta M_x = -\frac{1}{8} \rho V_0^2 l^3 \beta \int_{-1}^1 \sin \chi G(\eta) \eta d\eta \approx \frac{1}{8} \rho V_0^2 l^3 \beta \int_{-1}^1 G_0(\eta) k(\eta) \eta d\eta \quad (8.15)$$

Качественно эффект искривленности тот же, что и стреловидности. Из формул (8.13) и (8.15) делением на $\frac{1}{2} \rho V_0^2 S_{\text{кр}} \frac{l}{2}$ получаем поправки к коэффициентам момента.

9. Крыло с эллиптическим законом распределения хорд. Рассмотрим в качестве примера задачу о скольжении крыла с эллиптическим законом распределения хорд по размаху. Эта задача решается в явном виде, и мы сможем проследить влияние отдельных слагаемых индуктивной скорости, а также сравнить наше решение с решением Krienes [1] для крыла в форме эллиптической пластинки, полученное им по теории несущей поверхности.

Начнем с рассмотрения случая крыла с прямой осью. Это соответствует примерно крылу, форма которого в плане представляется состоящей из двух полуэллипсов—переднего с малой полуосью, равной $\frac{1}{4} b_0$, и заднего с малой полуосью, равной $\frac{3}{4} b_0$, где b_0 —корневая хорда.

Далее введем поправку для момента крыла в форме эллипса по формуле (8.15). Итак, пусть хорда крыла задана уравнением

$$t = t_0 \sqrt{1 - \eta^2} \quad \left(t_0 = \frac{b_0}{l} \right) \quad (9.1)$$

Для коэффициента a_0 возьмем теоретическую величину $a_0 = 2\pi$ и, рассматривая аэродинамически плоское крыло, примем геометрический угол атаки $\alpha = 1$.

Уравнение для циркуляции $G_0(\eta)$ будет иметь вид

$$G_0(\eta) = 2\pi t_0 \sqrt{1-\eta^2} \left(1 - \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 g_0(\eta') \frac{d\eta'}{\eta-\eta'} \right) \quad (9.2)$$

Вводя переменную ϑ по формуле

$$\eta = \cos \vartheta \quad (9.3)$$

будем иметь известное для циркуляции $G_0(\vartheta)$ решение:

$$G_0(\vartheta) = \frac{2\pi t_0}{1 + \frac{1}{2}\pi t_0} \sin \vartheta \quad (9.3)$$

отсюда

$$g_0(\vartheta) = \frac{dG_0}{d\vartheta} / \frac{d\eta}{d\vartheta} = -\frac{2\pi t_0}{1 + \frac{1}{2}\pi t_0} \operatorname{ctg} \vartheta \quad (9.4)$$

Вычислим угол атаки $\Delta\alpha$ по формуле (4.4). Первый член вычисляется элементарно, и будем иметь

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \left[g_0(\eta') - g_0(\eta') \right] \frac{d\eta'}{|\eta-\eta'|} = \frac{t_0}{(1 + \frac{1}{2}\pi t_0) \sin \vartheta} \left[\cos \vartheta \ln \frac{1}{2 \sin \vartheta} + \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta \right) \sin \vartheta \right] \quad (9.5)$$

Формулы (9.4) и (9.5) дадут тогда

$$\Delta\alpha = -\frac{t_0}{(1 + \frac{1}{2}\pi t_0) \sin \vartheta} \left[\cos \vartheta \left(\ln \frac{4}{t} - 1 \right) - \left(\cos \vartheta \ln \frac{1}{2 \sin \vartheta} + \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta \right) \sin \vartheta \right) \right] \quad (9.6)$$

Представляя циркуляцию ΔG в виде тригонометрического ряда

$$\Delta G = \sum_1^{\infty} A_n \sin n\vartheta \quad (9.7)$$

получим известное для эллиптического крыла выражение коэффициентов A_n через коэффициенты разложения функции $\Delta\alpha \sin \vartheta$. Если

$$\Delta\alpha \sin \vartheta = \sum_1^{\infty} a_n \sin n\vartheta \quad \left(a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \Delta\alpha \sin \vartheta \sin n\vartheta d\vartheta \right)$$

то

$$A_n = \frac{2\pi t_0}{1 + n \frac{\pi t_0}{2}} a_n \quad (9.9)$$

Для a_n имеем выражение

$$a_n = -\frac{t_0}{1 + \frac{1}{2}\pi t_0} \frac{2}{\pi} \left\{ \left(\ln \frac{4}{t} - 1 \right) \int_0^{\pi} \cos \vartheta \sin n\vartheta d\vartheta - \int_0^{\pi} \left[\cos \vartheta \ln \frac{1}{2 \sin \vartheta} + \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta \right) \sin \vartheta \right] \sin n\vartheta d\vartheta \right\}$$

Легко видеть, что все нечетные коэффициенты равны нулю, а для четных вычисления дают

$$a_{2m} = -\frac{8t_0}{\pi(1+\frac{1}{2}\pi t_0)} \frac{m}{4m^2-4} \left\{ \ln \frac{4}{t_0} - \left[1 + 2 \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2m-1} - \ln 2 \right) \right] \right\} \quad (9.10)$$

и, следовательно,

$$A_{2m} = -\frac{16t_0^2}{(1+\frac{1}{2}\pi t_0)(1+m\pi t_0)} \frac{m}{4m^2-4} \left\{ \ln \frac{4}{t_0} - \left[1 + 2 \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2m-1} - \ln 2 \right) \right] \right\} \quad (9.11)$$

Таким образом циркуляция ΔG определена в виде тригонометрического ряда. Вычисляя по формуле (8.10) коэффициент момента крена, будем иметь

$$c_{mx} = \beta \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^1 \Delta G(\eta) \eta d\eta = \beta \frac{\lambda}{4} \int_0^\pi \Delta G(\vartheta) \sin 2\vartheta d\vartheta = \frac{\pi\lambda}{8} A_{2\beta} \quad (9.12)$$

Для эллиптического крыла

$$\lambda = \frac{l^2}{\frac{1}{4}\pi l b_0} = \frac{4}{\pi t_0} \quad (9.13)$$

Подставляя значение A_2 из (9.11) и λ из (9.13) в (9.12), получим окончательно следующее значение момента

$$c_{mx} = -\frac{8}{3} t_0 \frac{\ln 4/t_0 - 3 + 2 \ln 2}{(1+\frac{1}{2}\pi t_0)(1+\pi t_0)} \beta \quad (9.14)$$

причем положительный знак c_{mx} соответствует восстанавливающему моменту (подъем впереди идущего и опускание позади идущего полукрыла).

Для определения момента крена эллиптического крыла нужно учесть кривизну несущей линии. Принимая, что несущая линия проходит на расстоянии одной четверти хорды от передней кромки крыла, будем иметь ее уравнение в виде

$$\zeta = -\frac{t_0}{2} \sqrt{1-\eta^2} = -\frac{t_0}{2} \sin \vartheta \quad (9.15)$$

Пользуясь теперь формулой (8.15) и вспоминая, что

$$k(\eta) = -\frac{d\zeta}{d\eta} = -\frac{t_0}{2} \operatorname{ctg} \vartheta \quad (9.16)$$

найдем

$$\Delta c_{mx} = -\frac{\lambda}{2} \beta \int_{-1}^1 G_0(\eta) k(\eta) \eta d\eta = -\frac{4}{3} \frac{t_0}{1+\frac{1}{2}\pi t_0} \beta$$

отсюда для c_{mx} эллиптического крыла получаем

$$c_{mx} = -\frac{8}{3} t_0 \frac{\ln 4/t_0 - 7/2 + 2 \ln 2 - \frac{1}{2}\pi t_0}{(1+\frac{1}{2}\pi t_0)(1+\pi t_0)} \beta \quad (9.17)$$

По формуле Krienes с точностью до третьих степеней угла скольжения имеем

$$c_{mx} = -\frac{15\pi^2}{64} t_0 \frac{\ln \frac{4}{t_0} - \frac{5}{2}}{1 + \frac{243}{128} \pi t_0} \beta \quad (9.18)$$

Эта формула асимптотическая для больших удлинений, и поэтому сравнивать можно лишь главные члены.

Мы видим, таким образом, тождественность строения формул и численные величины, также близкие друг от друга, в формуле Krienes стоит коэффициент $\frac{15\pi^2}{64} \approx 2.31$ вместо $\frac{8}{3} \approx 2.67$ нашей формулы. Из главного логарифмического члена в формуле Krienes вычитается $\frac{5}{2} = 2.50$, в формуле, которая получена здесь, $\frac{7}{2} - 2 \ln 2 \approx 2.12$.

Малость порядка величины момента крена обуславливает имеющееся расхождение в коэффициентах, так как невыполняемость гипотезы плоских сечений на концах крыла (по площади порядка квадрата хорды) может дать погрешность как раз этого же порядка. Из формул (9.14), (9.17) следует, что фактором, приводящим к неустойчивости скользящего крыла, является логарифмический поток, и, наоборот, все возникающие вследствие скольжения потока постоянной скорости действуют стабилизирующе. Мы вернемся еще к этому выводу в заключении.

10. Заключение. Результаты, полученные в предыдущем параграфе, позволяют считать, что теория несущей линии является достаточно хорошим приближением к теории несущей поверхности. Конечно, когда мы переходим к случаю искривленной несущей нити, имеется практически некоторый произвол в деталях выбора формы несущей нити, которая бы наилучшим образом соответствовала точному решению.

Но если теория несущей линии дает хорошее совпадение с теорией несущей поверхности, то много хуже обстоит дело при сравнении теории с экспериментом. Правда, большинство экспериментов относится к крыльям прямоугольным с прямо обрезанными или лишь слегка закругленными концами.

Для изложенной нами теории такая форма крыла в плане является очень неблагоприятной, так как наличие даже бесконечно малого угла скольжения вызывает скачкообразное (конечное) изменение формы несущей линии. Немногие эксперименты, произведенные над прямоугольными крыльями с эллиптической законцовкой (см., например, [2]), обнаруживают чрезвычайно резкое отличие поведения таких крыльев от прямоугольных крыльев с прямо обрезанными краями: в то время как для первых при малых углах атаки c_{mx} в пределах погрешности опыта равен нулю, для последних имеется значительный по величине восстанавливающий момент.

Как для теории несущей линии, так и для теории несущей поверхности является в отношении сравнения с экспериментом очень неблагоприятным тот факт, что для практических удлинений $\lambda = 5 - 6$ главный член $\ln \frac{4}{t}$ в формуле для момента почти равен следующему постоянному члену, поэтому неточность теории легко приводит не только к ошибке в абсолютной величине момента, но и к неверному знаку.

Далее эксперимент обнаруживает, что для момента M_x значительно раньше, чем для подъемной силы, наступает область нелинейной зависимости от угла атаки (отклонение от линейности начинается уже при углах атаки порядка 6°). Этого явления, разумеется, не может объяснить ни теория несущей линии, ни теория несущей поверхности.

Сравнения с экспериментом наталкивают на мысль, что влияние логарифмического потока на величину подъемной силы меньше, чем влияние обычного

потока постоянной скорости. Это может произойти, повидимому, только за счет того, что логарифмический поток не вызывает на крыле полностью той циркуляции, которая должна иметь место для удовлетворения условию плавного обтекания задней кромки.

Это явление имеет место и для обычного потока (практически величина коэффициента a_0 процентов на 10 ÷ 15, а для некоторых профилей даже на 25% ниже теоретической).

Для логарифмического потока, который резко изменяется на протяжении хорды так, что его в известной степени можно представить в виде тонкой струйки, набегающей на крыло перпендикулярно его плоскости, всевозможные отрывные явления должны проявляться в еще большей степени и при меньших углах атаки, чем для обычного потока. Этим можно объяснить и то, что практически логарифмический поток имеет меньшее влияние на подъемную силу, чем ему полагается иметь согласно теории, и раннее наступление нелинейности в ходе кривой $c_{mx} = f(\alpha)$. Подтверждением вышесказанного является также то, что на позади идущем крыле, хотя оно по знаку экспериментального момента обладает меньшей подъемной силой, всегда раньше возникает срыв, чем на крыле, впереди идущем.

Можно надеяться, что введением эмпирического поправочного параметра в выражение циркуляции G_2 , вызываемой логарифмическим потоком, удастся получить удовлетворительное согласование теории и эксперимента.

Что касается работы стреловидных крыльев и крыла, скользящего при больших углах атаки, то хотя в этом случае теория не может принципиально дать количественную оценку величин сил и моментов, действующих на крыло, но учет перераспределения давлений, которое вызывается логарифмическим потоком, может по крайней мере качественно осветить вопрос о том, какого рода изменений характеристик сечений (например, $c_{y \max}$) можно ожидать под влиянием указанных факторов.

Поступила в редакцию
29 I 1944

Центральный аэрогидродинамический
институт.

A. A. DORODNICYN. GENERALIZATION OF THE LIFTING-LINE THEORY FOR CASES OF A WING WITH A CURVED AXIS AND A SLIPPING WING

(Summary)

The immediate application of the Prandtl's lifting-line theory to the cases of a slipping wing or a wing with a curved axis (swept wing) is impossible because the induced velocities calculated at the lifting-line are infinite. This investigation is based on the following determination method of circulation. The velocities are calculated not at the lifting-line itself, but in the neighbourhood of this line, and then represented in form of a series in terms of $\epsilon = r/l$, where r is the distance from the lifting-line in the plane of considered section of the wing and l —the span.

In general case this series contains, besides a constant term, a logarithmic one, which tends to infinity when $\epsilon \rightarrow 0$. The other terms of the series are of the

order $\varepsilon \ln \frac{4}{\varepsilon}$, hence they are negligible in the neighbourhood of the wing by a great aspect-ratio.

So the circulation in some section of the wing is determined by these two main terms in the expression for the velocity, — i. e. constant term and the logarithmic term. The part Γ_1 of full circulation, produced by the constant term is determined by the ordinary Prandtl's relation ($\Gamma_1 = \frac{4}{2} b a_0 V_0 (\alpha - \alpha_i)$, where b is the chord, $a_0 = \frac{dc_y}{d\alpha} \Big|_{\lambda=\infty}$ and α_i is induced angle of incidence). In order to determine the part of circulation produced by the logarithmic term it is necessary to solve the problem of flow with such logarithmic singularity near the section of wing.

To the third power of the angle β of roll (or sweep) the logarithmic flow is potential in the plane of the section of the wing, hence the problem in question can be solved by means of the conformal representation of the wing section considered on a circle. With the same precision as the coefficient a_0 is determined, this problem reduces to the conformal representation of a flat plate on a circle. This gives the formula (3.7) for the circulation G_2 (here the dimensionless quantities G , g , η etc. are determined by formula (1.2).

By substitution of the expressions for Γ_1 and Γ_2 the integro-differential equation for the circulation Γ is obtained. As the investigation shows, the lifting-line theory must be considered as correct only for the values of order β^3 . It is therefore required to obtain the solution of the integro-differential equation correct to the values of the same order. Representing the circulation as the sum $G_0 + \Delta G$, where G_0 is the circulation for the wing with a straight axis, for ΔG the ordinary Prandtl's equation is obtained, in which the geometrical angle of incidence α is replaced by an "additional angle" $\Delta\alpha$. The expressions for $\Delta\alpha$ are given in formulae (4.4), (5.10) and (6.12) for the cases of a slipping wing, a swept wing and wing with an arbitrary curved axis respectively.

In § 9 the application of the theory to the slipping elliptical wing is given. The formula for the rolling moment is deduced (9.17) and compared with the formula of Krienes (9.18), obtained by him on the basis of the theory of lifting surface. The comparison of these formulae shows that in this case the lifting-line theory gives sufficiently good approximation to the lifting-surface theory.

ЛИТЕРАТУРА

1. K r i e n e s. Die elliptische Tragfläche auf potentialtheoretischer Grundlage. ZAMM. 1940. H. 4.
2. S h o r t a l J. A. Effect of tip shape and dihedral on lateral-stability characteristics. NACA. 1935. Rep. No. 548.