Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика, том VIII, 1944

О ПРИМЕНИМОСТИ ОБЩИХ ТЕОРЕМ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ К ТОНКИМ ОБОЛОЧКАМ

А. Л. ГОЛЬДЕНВЕЙЗЕР

(Москва)

Целью настоящей работы является исследование вопроса о том, при каких обстоятельствах приложимы к полной системе дифференциальных уравнений тонких оболочек некоторые теоремы общей теории упругости. Имеются в виду теорема единственности Кирхгофа, принцип минимума работы деформации, закон взаимности Бетти и т. п.

При этом приходится принимать во внимание, что понятие о полной системе уравнений теории тонких оболочек не является таким определенным, как понятие о системе уравнений общей теории упругости.

Причина этого лежит в том, что в теории тонких оболочек соотношения, связывающие усилия и моменты с деформациями, могут быть выводимы различными способами.

Эти соотношения принимают существенно различную форму в зависимости от того, какие были приняты дополнительные допущения (гипотеза Кирхгофа и допущение, что $Z_z = 0$) и насколько точно производились выкладки, т. е. какие степени h / R_1, h / R_2 принимались во внимание (h — половина толщины оболочки; R_1 и R_2—главные радиусы кривизны ее срединной поверхности).

В настоящее время нет полной ясности и согласованности в вопросе о том, какой из многочисленных вариантов соотношений между усилиями и деформациями следует считать самым приемлемым.

В силу сказанного мы будем считать эти соотношения не заданными, а постулируем лишь, что между усилиями и моментами, с одной стороны, и компонентами деформации, с другой стороны, имеются некоторые линейные соотношения, и поставим вопрос: какими должны быть эти соотношения для того, чтобы вышеуказанные свойства уравнений общей теории упругости могли быть перенесены в теорию тонких оболочек?

Нам представляется существенным сохранение этих свойств уравнений общей теории упругости для составления методов интегрирования системы уравнений теории тонких оболочек.

Закон взаимности Бетти обеспечивает симметричность ядер, если будут использованы методы интегральных уравнений, принцип минимума работы деформации делает обоснованным применение метода Ритца и т. д.

1. Прежде чем переходить к поставленной задаче, приведем, не останавливаясь на доказательстве, основные соотношения теории тонких оболочек.

Полагая, что срединная поверхность оболочки задана в гауссовых координатах в линиях кривизны, будем пользоваться обозначениями: $\mathbf{M}$ — вектор произвольной точки срединной поверхности, α, β — параметры линий кривизны, $\mathbf{M}_\alpha$, $\mathbf{M}_\beta$, $\mathbf{M}_{\alpha\alpha}$, $\mathbf{M}_{\alpha\beta}$, $\mathbf{M}_{\beta\beta}$ — частные производные по переменным, указанным в индексах, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали, R_1, R_2 — главные радиусы кривизны.

Первую и вторую квадратичные формы срединной поверхности предположим заданными в виде

$$\mathrm{I} = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2, \qquad \mathrm{II} = L\, d\alpha^2 + N d\beta^2$$

Таким образом, единичные векторы касательных к линиям кривизны будут соответственно $\mathbf{M}_\alpha / A$ и $\mathbf{M}_\beta / B$.

Положительные направления тройки единичных векторов M_α / A M_β / B и $\mathbf{n}$ будем считать выбранными так, что

$$\frac{\mathbf{M}_\alpha}{A} \times \frac{\mathbf{M}_\beta}{B} = \mathbf{n}, \qquad \frac{\mathbf{M}_\alpha}{A} \times \mathbf{n} = -\frac{\mathbf{M}_\beta}{B}, \qquad \frac{\mathbf{M}_\beta}{B} \times \mathbf{n} = \frac{\mathbf{M}_\alpha}{A} \tag{1.1}$$

В принятых обозначениях деривационные формулы Гаусса-Вейнгартена могут быть представлены в виде

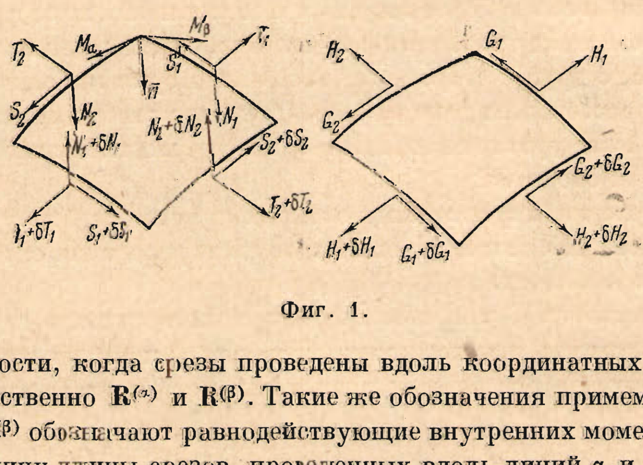
$$\begin{aligned} &\left(\frac{\mathbf{M}_\alpha}{A}\right)_\alpha = -\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta}\frac{\mathbf{M}_\beta}{B} - \frac{A}{R_1}\mathbf{n}, && \left(\frac{\mathbf{M}_\beta}{B}\right)_\alpha = \frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta}\frac{\mathbf{M}_\alpha}{A}, && \mathbf{n}_\alpha = \frac{A}{R_1}\frac{\mathbf{M}_\alpha}{A} \\ &\left(\frac{\mathbf{M}_\beta}{B}\right)_\beta = -\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\frac{\mathbf{M}_\alpha}{A} - \frac{B}{R_2}\mathbf{n}, && \left(\frac{\mathbf{M}_\alpha}{A}\right)_\beta = \frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\frac{\mathbf{M}_\beta}{B}, && \mathbf{n}_\beta = \frac{B}{R_2}\frac{\mathbf{M}_\beta}{B} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Будем, как обычно, точку $\mathbf{M}'$, в которую переходит после деформации точка $\mathbf{M}$, задавать такими же значениями параметров α и β, что и точку $\mathbf{M}$. Тогда срединная поверхность деформированной оболочки окажется заданной в гауссовых координатах, причем координатные линии не будут уже линиями кривизны. Первая и вторая квадратичные формы примут вид

$$\mathrm{I}' = A'^2 d\alpha^2 + 2A'B' \cos\chi' d\alpha\, d\beta + B'^2 d\beta^2, \qquad \mathrm{II}' = L' d\alpha^2 + 2\mathbf{M}' d\alpha\, d\beta + N' d\beta^2$$

Если не считать соотношений, связывающих усилия с деформациями, можно уравнения теории тонких оболочек разбить на две группы: статические уравнения и геометрические уравнения.

А. Статические уравнения. Будем обозначать через $\mathbf{R}$ равнодействующую всех внутренних сил оболочки, приходящихся на единицу длины произвольного



Фиг. 1.

среза. В частности, когда срезы проведены вдоль координатных линий, будем писать соответственно $\mathbf{R}^{(\alpha)}$ и $\mathbf{R}^{(\beta)}$. Такие же обозначения примем для моментов. Пусть $\mathbf{F}^{(\alpha)}$ и $\mathbf{F}^{(\beta)}$ обозначают равнодействующие внутренних моментов, приходящихся на единицу длины срезов, проведенных вдоль линий α и β.

Если принять, следуя Ляву, что на малый четырехугольник, выделенный из срединной поверхности оболочки, действуют внутренние силы и моменты, показанные на фиг. 1, то

$$\mathbf{R}^{(\alpha)} = S_2 \frac{\mathbf{M}_\alpha}{A} - T_2 \frac{\mathbf{M}_\beta}{B} + N_2 \mathbf{n}, \qquad \mathbf{R}^{(\beta)} = -T_1 \frac{\mathbf{M}_\alpha}{A} - S_1 \frac{\mathbf{M}_\beta}{B} + N_1 \mathbf{n}$$

Обозначим через $\mathbf{P}$ вектор внешних сил и через $\mathbf{Q}$—вектор внешних моментов. Уравнения равновесия можно представить в виде двух равенств

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left[A\,\mathbf{R}^{(\alpha)}\right] + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[B\,\mathbf{R}^{(\beta)}\right] = AB\,\mathbf{P} \tag{1.3}$$

$$AB\left[-N_2\frac{\mathbf{M}_\alpha}{A} + N_1\frac{\mathbf{M}_\beta}{B} + (S_1+S_2)\,\mathbf{n}\right] + \frac{\partial}{\partial\beta}\left[A\,\mathbf{F}^{(\alpha)}\right] + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[B\,\mathbf{F}^{(\beta)}\right] = AB\,\mathbf{Q} \tag{1.4}$$

Уравнения (1.3) и (1.4) представляют собой векторную запись известных уравнений равновесия, приводимых Лявом в его курсе [1].

Вывод этих соотношений можно найти в нашей статье [2] (в настоящей статье изменены обозначения, и вместо $\mathbf{P}$ пишется $AB\,\mathbf{P}$, кроме того, в цитированной статье предполагалось, что срединная поверхность оболочки не загружена моментами, в связи с чем в правой части равенства (1.4) отсутствовал член $AB\,\mathbf{Q}$).

B. Геометрические соотношения. В цитированной выше нашей статье деформация срединной поверхности характеризовалась шестью компонентами деформации, которые можно определить формулами

$$\varepsilon_1 = \frac{A'-A}{A}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{B'-B}{B}, \qquad \omega = \cos\chi'$$

$$\varkappa_1 = -\frac{L'}{A'^2} + \frac{L}{A^2}(1-\varepsilon_1), \qquad \varkappa_2 = -\frac{N'}{B'^2} + \frac{N}{B^2}(1-\varepsilon_2), \qquad \tau = -\frac{M'}{A'B'}$$

Эти величины удобно для дальнейшего выразить при помощи вектора бесконечно малого смещения и бесконечно малого вращения.

Если обозначить через u, v и w проекции смещения срединной поверхности оболочки соответственно на направления единичных векторов $\mathbf{M}_\alpha / A$, $\mathbf{M}_\beta / B$ и на отрицательное направление $\mathbf{n}$, то вектор бесконечно малого смещения

$$\mathbf{U} = u\frac{\mathbf{M}_\alpha}{A} + v\frac{\mathbf{M}_\beta}{B} - w\,\mathbf{n} \tag{1.5}$$

Обозначим через ω_1 проекцию угла между векторами $\mathbf{M}_\alpha$ и $\mathbf{M}_\alpha'$ на касательную плоскость, считая этот угол положительным, когда вращение происходит от $\mathbf{M}_\alpha$ к $\mathbf{M}_\beta$.

Аналогично введем ω_2, считая его положительным, когда вращение происходит от $\mathbf{M}_\beta$ к $\mathbf{M}_\alpha$. При этом $\omega_1 + \omega_2 = \omega$.

Далее пусть γ_1 обозначает проекцию угла между $\mathbf{M}_\alpha$ и $\mathbf{M}_\alpha'$ на нормальную плоскость, проходящую через M_α (положительным этот угол будет тогда, когда поворот происходит от $\mathbf{M}_\alpha$ к $\mathbf{n}$), а γ_2 — проекцию на нормальную плоскость, проходящую через $\mathbf{M}_\beta$ угла между $\mathbf{M}_\beta$ и $\mathbf{M}_\beta'$ (положительное направление от $\mathbf{M}_\beta$ к $\mathbf{n}$).

Тогда вектор бесконечно малого вращения Ω можно определить так:

$$\Omega = -\gamma_2\frac{\mathbf{M}_\alpha}{A} + \gamma_1\frac{\mathbf{M}_\beta}{B} + \frac{\omega_2-\omega_1}{2}\,\mathbf{n} \tag{1.6}$$

Производные от векторов $\mathbf{U}$ и Ω можно связать с компонентами деформации и углами поворота формулами

$$\frac{\mathbf{M}_\alpha}{A}\frac{\mathbf{U}_\alpha}{A}=\varepsilon_1,\qquad \frac{\mathbf{M}_\beta}{B}\frac{\mathbf{U}_\alpha}{A}=\omega_1,\qquad \mathbf{n}\frac{\mathbf{U}_\alpha}{A}=\gamma_1$$

$$\frac{\mathbf{M}_\alpha}{A}\frac{\mathbf{U}_\beta}{B}=\omega_2,\qquad \frac{\mathbf{M}_\beta}{B}\frac{\mathbf{U}_\beta}{B}=\varepsilon_2,\qquad \mathbf{n}\frac{\mathbf{U}_\beta}{B}=\gamma_2$$

$$\frac{\mathbf{M}_\alpha}{A}\frac{\Omega_\alpha}{A}=\left(\tau-\frac{\omega}{2R_1}\right),\qquad \frac{\mathbf{M}_\beta}{B}\frac{\Omega_\alpha}{A}=-\varkappa_1\qquad \frac{\mathbf{M}_\alpha}{A}\frac{\Omega_\beta}{B}=\varkappa_2,\qquad \frac{\mathbf{M}_\beta}{B}\frac{\Omega_\beta}{B}=-\left(\tau-\frac{\omega}{2R_2}\right)$$

$$\frac{\mathbf{M}_\alpha}{A}\Omega=-\gamma_2,\qquad \frac{\mathbf{M}_\beta}{B}\Omega=\gamma_1,\qquad \Omega\mathbf{n}=\frac{\omega_2-\omega_1}{2} \tag{1.7}$$

На выводе этих соотношений не будем останавливаться, их при желании можно проверить непосредственным дифференцированием векторов $\mathbf{U}$ и Ω, определенных формулами (1.5) и (1.6). Если при этом воспользоваться формулами (1.2), то компоненты деформаций и углы поворота выразятся через u, v и w и можно убедиться, что эти выражения совпадут с теми, которые подробно выведены в нашей статье [3].

2. Положим, что срединная поверхность интересующей нас оболочки задается при помощи совокупности значений параметров α, β, представляющих собой односвязную или многосвязную область G, ограниченную контуром g (в случае многосвязной области под g подразумевается совокупность ограничивающих контуров).

Выведем выражение работы внешних сил на упругих перемещениях для тонких оболочек, рассматривая их с точки зрения общей теории упругости и приняв гипотезу Кирхгофа о том, что прямолинейные отрезки, направленные нормально к срединной поверхности, остаются прямолинейными и нормальными к деформированной средней поверхности и не изменяют своей длины.

Если $\overline{\mathbf{M}}$ — вектор точки, отстоящей на расстоянии z, отсчитываемом по отрицательному направлению нормали от срединной поверхности оболочки, т. е.

$$\overline{\mathbf{M}}=\mathbf{M}-z\,\mathbf{n}$$

тогда согласно принятой гипотезе вектор $\overline{\mathbf{M}}'$ той же точки после деформации можно выразить так:

$$\overline{\mathbf{M}}'=\mathbf{M}'-z\,\mathbf{n}'$$

где $\mathbf{n}'$ — единичный вектор нормали к деформированной срединной поверхности.

Пусть $\overline{\mathbf{U}}$ — вектор бесконечно малого смещения произвольной точки оболочки, тогда

$$\overline{\mathbf{U}}=\overline{\mathbf{M}}'-\overline{\mathbf{M}}=\mathbf{M}'-\mathbf{M}-z\,(\mathbf{n}'-\mathbf{n})=\mathbf{U}-z\,(\mathbf{n}'-\mathbf{n}) \tag{2.1}$$

Обозначим далее через $\overline{\mathbf{P}}(\alpha,\beta,z)$ вектор внешней нагрузки, приходящейся на единицу объема, в произвольной точке тела оболочки. Тогда векторы внешней силы и внешнего момента, приходящихся на единицу срединной поверхности оболочки, можно вычислить по формулам

$$\int_{-h}^{+h}\overline{\mathbf{P}}\left(1-\frac{z}{R_1}\right)\left(1-\frac{z}{R_2}\right)dz=\mathbf{P} \tag{2.2}$$

$$\int_{-h}^{+h}\overline{\mathbf{P}}\times\mathbf{n}z\left(1-\frac{z}{R_1}\right)\left(1-\frac{z}{R_2}\right)dz=\mathbf{Q} \tag{2.3}$$

Умножая последнее равенство векторно на $\mathbf{n}$ и принимая во внимание, что $\mathbf{n}\times\overline{\mathbf{P}}\times\mathbf{n}=\overline{\mathbf{P}}_1$, где $\overline{\mathbf{P}}_1$ — проекция вектора $\overline{\mathbf{P}}$ на касательную плоскость к срединной поверхности, получим

$$\int\limits_{-h}^{+h}\overline{\mathbf{P}}_1 z\left(1-\frac{z}{R_1}\right)\left(1-\frac{z}{R_2}\right)dz=\mathbf{n}\times\mathbf{Q} \tag{2.4}$$

Работу внешних сил оболочки, рассматриваемой с точки зрения общей задачи теории упругости, можно написать так:

$$Z=\int\limits_{-h}^{+h}\left\{\iint\limits_{G}\overline{\mathbf{P}}\,\overline{\mathbf{U}}A\left(1-\frac{z}{R_1}\right)B\left(1-\frac{z}{R_2}\right)d\alpha\,d\beta\right\}dz+Z'$$

где Z' — работа внешних сил, приложенных к контуру оболочки.

Внося сюда $\overline{\mathbf{U}}$ из формулы (2.1), получим

$$Z=\int\limits_{-h}^{+h}\left\{\iint\limits_{G}\overline{\mathbf{P}}\mathbf{U}A\left(1-\frac{z}{R_1}\right)B\left(1-\frac{z}{R_2}\right)d\alpha\,d\beta\right\}dz+$$
$$+\int\limits_{-h}^{+h}\left\{\iint\limits_{G}\overline{\mathbf{P}}(\mathbf{n}'-\mathbf{n})zA\left(1-\frac{z}{R_1}\right)B\left(1-\frac{z}{R_2}\right)d\alpha\,d\beta\right\}dz+Z'$$

Первый интеграл правой части этого равенства можно при помощи (2.2) представить в виде

$$\iint\limits_{G}\mathbf{P}\mathbf{U}\,AB\,d\alpha\,d\beta.$$

Чтобы преобразовать второй интеграл, заметим, что

$$\mathbf{n}'-\mathbf{n}=-\gamma_1\frac{\mathbf{M}_\alpha}{A}-\gamma_2\frac{\mathbf{M}_\beta}{B}$$

Доказательство этого равенства элементарно, его можно найти в нашей статье [3].

Нетрудно проверить при помощи формул (1.1), что

$$(\mathbf{n}'-\mathbf{n})\times\mathbf{n}=-\gamma_2\frac{\mathbf{M}_\alpha}{A}+\gamma_1\frac{\mathbf{M}_\beta}{B}=\Omega_1,$$

где Ω_1 — проекция вектора бесконечно малого вращения Ω на касательную плоскость к срединной поверхности.

Заметим далее, что вектор $\mathbf{n}'-\mathbf{n}$ не имеет составляющей по нормали и поэтому вместо $\overline{\mathbf{P}}(\mathbf{n}'-\mathbf{n})$ можно писать $\overline{\mathbf{P}}_1(\mathbf{n}'-\mathbf{n})$, следовательно,

$$\int\limits_{-h}^{+h}\left\{\iint\limits_{G}\overline{\mathbf{P}}(\mathbf{n}'-\mathbf{n})zA\left(1-\frac{z}{R_1}\right)B\left(1-\frac{z}{R_2}\right)d\alpha\,d\beta\right\}dz=$$
$$=\int\limits_{+h}^{+h}\left\{\iint\limits_{G}\overline{\mathbf{P}}_1(\mathbf{n}'-\mathbf{n})zA\left(1-\frac{z}{R_1}\right)B\left(1-\frac{z}{R_2}\right)d\alpha\,d\beta\right\}dz=$$
$$=\iint\limits_{G}\mathbf{n}\times\mathbf{Q}(\mathbf{n}'-\mathbf{n})AB\,d\alpha\,d\beta=\iint\limits_{G}\Omega_1\mathbf{Q}AB\,d\alpha\,d\beta$$

Но вектор $\mathbf{Q}$ в рассматриваемом случае не имеет, как показывает (2.3), нормальной составляющей, поэтому вместо $\Omega_1 \mathbf{Q}$ можно писать $\Omega\mathbf{Q}$. Таким образом доказано, что при использовании гипотезы Кирхгофа

$$Z = \iint_G \mathbf{PU} AB\,d\alpha\,d\beta + \iint_G \Omega\mathbf{Q} AB\,d\alpha\,d\beta + Z' \tag{2.5}$$

Если принять какие-либо другие гипотезы, то выражение для Z примет иной вид, но мы в дальнейшем примем формулу (2.5) за определение работы внешних сил оболочки на ее упругих перемещениях, не заботясь о том, является ли при этом Z работой внешних сил оболочки, рассматриваемой с точки зрения общей задачи теории упругости, и будем пользоваться Z чисто формально.

Правую часть формулы (2.5) можно преобразовать, подставляя выражения P и Q из (1.3) и (1.4) и применяя формулу интегрирования по частям:

$$\iint \left(f\frac{\partial q}{\partial \alpha} - \varphi \frac{\partial p}{\partial \beta} \right) d\alpha\,d\beta = \int (\varphi p\,d\alpha + f q\,d\beta) - \iint \left(q\frac{\partial f}{\partial \alpha} - p\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \right) d\alpha\,d\beta$$

После несложных выкладок получится

$$\begin{aligned} Z = {} & \int_g \mathbf{U}\left[-\mathbf{R}^{(\alpha)} A\,d\alpha + \mathbf{R}^{(\beta)} B\,d\beta \right] + \int_g \Omega \left[-\mathbf{F}^{(\alpha)} A\,d\alpha + \mathbf{F}^{(\beta)} B\,d\beta \right] - \\ & - \iint_G \left\{ -T_1 \frac{\mathbf{M}_\alpha}{A}\frac{\mathbf{U}_\alpha}{A} - S_1 \frac{\mathbf{M}_\beta}{B}\frac{\mathbf{U}_\alpha}{A} + N_1 \mathbf{n}\frac{\mathbf{U}_\alpha}{A} + S_2 \frac{\mathbf{M}_\alpha}{A}\frac{\mathbf{U}_\beta}{B} - T_2 \frac{\mathbf{M}_\beta}{B}\frac{\mathbf{U}_\beta}{B} + \right. \\ & \left. + N_2 \mathbf{n}\frac{\mathbf{U}_\beta}{B} \right\} AB\,d\alpha\,d\beta - \iint_G \left\{ -H_1 \frac{\mathbf{M}_\alpha}{A}\frac{\Omega_\alpha}{A} - G_1 \frac{\mathbf{M}_\beta}{B}\frac{\Omega_\alpha}{A} + G_2 \frac{\mathbf{M}_\alpha}{A}\frac{\Omega_\beta}{B} - \right. \\ & \left. - H_2 \frac{\mathbf{M}_\beta}{B}\frac{\Omega_\beta}{B} \right\} AB\,d\alpha\,d\beta - \iint_G N_2 \Omega \frac{\mathbf{M}_\alpha}{A} AB\,d\alpha\,d\beta + \iint_G N_1 \Omega \frac{\mathbf{M}_\beta}{B} AB\,d\alpha\,d\beta + \\ & + \iint_G (S_1 + S_2)\,\Omega\mathbf{n}\,AB\,d\alpha\,d\beta + Z' \end{aligned} \tag{2.6}$$

Контурные интегралы в последнем равенстве можно принять за взятую с обратным знаком работу внешних сил, развивающихся на граничных срезах оболочки, т. е.

$$Z' = \int_g U\left[R^{(\alpha)} A\,d\alpha - R^{(\beta)} B\,d\beta \right] + \int_g \Omega \left[F^{(\alpha)} A\,d\alpha - F^{(\beta)} B\,d\beta \right] \tag{2.7}$$

Это определение такого же порядка, как и принятое раньше определение работы внешних сил, действующих на внутренние точки оболочки.

Можно буквальным повторением вышеприведенных выкладок показать, что если принять гипотезу Кирхгофа, то для оболочки, рассматриваемой с точки зрения общей задачи теории упругости, Z' будет равен работе внешних сил граничных срезов на упругих перемещениях.

Таким образом в формуле (2.6) контурные интегралы уничтожаются.

Для преобразования интегралов, распространенных на область G, воспользуемся формулами (1.7), после чего выражение (2.6) для Z принимает вид

$$Z = \iint_G \left\{ T_1 \varepsilon_1 + S_1 \omega^{(1)} + S_2 \omega^{(2)} + T_2 \varepsilon_2 - H_1 \tau^{(1)} - G_1 \varkappa_1 - G_2 \varkappa_2 - H_2 \tau^{(2)} \right\} AB\,d\alpha\,d\beta$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\omega^{(1)} = \frac{\mathbf{M}_\beta}{B}\frac{\mathbf{U}_\alpha}{A} + \Omega\mathbf{n} = \omega_1 + \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = \frac{\omega}{2} \qquad \tau^{(1)} = -\frac{\mathbf{M}_\alpha}{A}\frac{\Omega_\alpha}{A} = -\left(\tau - \frac{\omega}{2R_1}\right)$$
$$\omega^{(2)} = -\frac{\mathbf{M}_\alpha}{A}\frac{\mathbf{U}_\beta}{B} + \Omega\mathbf{n} = -\omega_2 + \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = -\frac{\omega}{2}, \quad \tau^{(2)} = -\frac{\mathbf{M}_\beta}{B}\frac{\Omega_\beta}{B} = \tau - \frac{\omega}{2R_2} \tag{2.8}$$

Естественно обозначить подинтегральную функцию через $2W$ и назвать W упругим потенциалом оболочки:

$$2W = T_1\varepsilon_1 + S_1\omega^{(1)} + S_2\omega^{(2)} + T_2\varepsilon_2 - H_1\tau^{(1)} - G_1\varkappa_1 - G_2\varkappa_2 - H_2\tau^{(2)} \tag{2.9}$$

Полученный результат дает возможность вывести условия, при которых будет выполняться закон взаимности Бетти.

Буквально повторяя рассуждения, применяемые при доказательстве этого положения в теории упругости, можно заключить, что при принятом выше определении работы внешних сил на упругих перемещениях *закон взаимности работ будет выполняться для оболочки, если соотношения между усилиями* $T_1, T_2, S_1, S_2, H_1, H_2, G_1, G_2$, *с одной стороны, и деформациями* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \varkappa_1, \varkappa_2$ — *с другой, будут иметь вид линейных соотношений с симметричной матрицей.*

3. Для того чтобы перейти к доказательству теоремы единственности Кирхгофа и принципа минимума работы внешних сил, преобразуем выражение (2.7) для Z'.

Положим для этого, что контур g, по которому происходит интегрирование в формуле (2.7), представляет собой одну из координатных линий системы ортогональных гауссовых координат, даваемых параметрами φ, ψ.

Пусть первая и вторая квадратичные формы в этой системе имеют вид

$$\mathrm{I} = \Phi^2 d\varphi^2 + \Psi^2 d\psi^2, \qquad \mathrm{II} = D\,d\varphi^2 + 2D'\,d\varphi\,d\psi + D''\,d\psi^2$$

Компоненты упругого смещения по осям основного подвижного трехгранника обозначим через ξ, η и $-\zeta$

Тогда Γ — вектор бесконечно малого смещения — будет иметь вид

$$\Gamma = \xi\frac{\mathbf{M}_\varphi}{\Phi} + \eta\frac{\mathbf{M}_\psi}{\Psi} - \zeta\mathbf{n} \tag{3.1}$$

Если λ — проекция угла поворота вектора $\mathbf{M}_\varphi$ на нормальную плоскость, проходящую через этот вектор (положительное направление вращения от $\mathbf{M}_\varphi$ к $\mathbf{n}$), и μ — проекция угла поворота вектора $\mathbf{M}_\psi$ на нормальную плоскость, проходящую через этот вектор (положительное направление вращения от $\mathbf{M}_\psi$ к $\mathbf{n}$), то Λ_1 — проекцию вектора вращения на касательную плоскость — можно представить в виде

$$\Lambda_1 = -\mu\frac{\mathbf{M}\varphi}{\Phi} + \lambda\frac{\mathbf{M}\psi}{\Psi} \tag{3.2}$$

Обозначив теперь через $\mathbf{R}$ и $\mathbf{F}$ векторы равнодействующих внутренних сил и моментов оболочки, приходящихся на единицу длины среза, проходящего через линию φ, можно записать вместо (2.7).

$$Z' = \int_G \Gamma\mathbf{R}\Phi\,d\varphi + \int_g \Lambda_1\mathbf{F}\Phi\,d\varphi$$

Приняв обозначения Лява, имеем

$$\mathbf{R} = -S\frac{\mathbf{M}\varphi}{\Phi} + T\frac{\mathbf{M}\psi}{\Psi} + N\mathbf{k}, \qquad \mathbf{F} = -G\frac{\mathbf{M}\varphi}{\Phi} + H\frac{\mathbf{M}\psi}{\Psi} \tag{3.3}$$

где S, T, N, G, и H — соответственно сдвигающее, нормальное и поперечное усилия и изгибающий и крутящий моменты, возникающие на срезе g. Раскрывая скалярные произведения, стоящие под интегралами, при помощи (3.1), (3,2) и (3.3), получим

$$Z' = \int\limits_{g} \left\{ -S\xi + T\eta - N\zeta + G\mu + H\lambda \right\} \Phi\, d\varphi \tag{3.4}$$

При помощи несложных выкладок можно угол поворота λ выразить через компоненты малого смещения Γ:

$$\lambda = -\frac{1}{\Phi}\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi} - \frac{\xi}{R} + \frac{\sin 2\chi}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\eta \tag{3.5}$$

где R—радиус кривизны контура g, а χ—угол, который этот контур составляет с линией кривизны α.

Внося (3.5) в (3.4), получим

$$Z' = \int\limits_{g} \left\{ -S\xi + T\eta - N\zeta + G\mu + H\left[-\frac{1}{\Phi}\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi} - \frac{\xi}{R} + \frac{\sin 2\chi}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\eta \right] \right\} \Phi\, d\varphi$$

При помощи интегрирования по частям можно избавиться от производной $\partial\zeta/\partial\varphi$, причем обинтегрированный член исчезнет, если g представляет собой замкнутый контур. После этого Z' можно представить в таком виде:

$$Z' = \int\limits_{g} \left\{ -\left[S + \frac{H}{R}\right]\xi + \left[T + \frac{\sin 2\chi}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)H\right]\eta - \right.$$
$$\left. -\left[N - \frac{1}{\Phi}\frac{\partial H}{\partial\varphi}\right]\zeta + G\mu \right\} \Phi\, d\varphi \tag{3.6}$$

Нетрудно проверить, что в квадратных скобках тут стоят проекции внутреннего усилия оболочки соответственно на касательную к контуру g нормаль к этому контуру и на нормаль к поверхности с учетом поправки, которую дает упругий момент H.

Последнее замечание позволяет утверждать, что если ограничивающий контур можно разбить на участки таким образом, что на части из них будут отсутствовать компоненты упругого усилия (с учетом влияния H) и упругий изгибающий момент, а на другой части будут обращаться в нули упругие перемещения и угол поворота нормали к контуру, то Z' будет обращаться в нуль.

Положим теперь, что система дифференциальных уравнений тонкой оболочки допускает не единственное решение при некоторой внешней нагрузке, характеризуемой векторами $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ и при граничных условиях, заключающихся в том, что на контутре g заданы либо компоненты упругого усилия и изгибающий момент, либо компоненты упругого смещения ξ, η, ζ и угол поворота нормали к контуру g — μ. Тогда, составляя разность из двух таких различных решений, получим интеграл дифференциальных уравнений оболочки, соответствующий случаю $\mathbf{P} = \mathbf{Q} = 0$ и таким граничным условиям, при которых $Z' = 0$. Но в этом случае получим

$$Z = \iint\limits_{G} PUAB\, d\alpha\, d\beta + \iint\limits_{G} \Omega QAB\, d\alpha\, d\beta = \iint\limits_{G} 2WAB\, d\alpha\, d\beta = 0$$

Это равенство будет заведомо противоречивым, если W представляет собой всегда положительную квадратичную форму от компонент упругого усилия и момента или от компонент деформации.

В этом случае метод, примененный Кирхгофом для доказательства единственности решения в общей теории упругости, будет вполне применим и к уравнениям теории тонких оболочек. При том же требовании, т. е. при W, всегда большем нуля, будет выполняться и принцип минимума работы внешних сил, так как рассуждения, применяемые при его доказательстве в общей теории упругости, могут быть перенесены теперь на теорию тонких оболочек.

4. В предыдущих разделах было доказано, что закон взаимности Бетти, теорема единственности Кирхгофа и принцип минимума работы деформации будут выполняться в теории тонких оболочек, если соотношения, связывающие упругие усилия и моменты с деформациями срединной поверхности подчинить двум условиям.

1. Восемь упругих усилий и моментов оболочки T_1, T_2, S_1, S_2, G_1, G_2, H_1, H_2 выражаются через восемь компонент деформации ε_1, ε_2, $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\tau^{(1)}$, $\tau^{(2)}$, при помощи линейных соотношений с симметричной матрицей; компоненты $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$, $\tau^{(1)}$, $\tau^{(2)}$, введенные при помощи формул (2.8), не являются, конечно, независимыми—из них произвольно можно задавать только две.

2. Упругий потенциал оболочки W, определенный формулой (2.9), после подстановки в него выражений усилий и моментов через компоненты деформации, превращается в однородный квадратичный полином, остающийся не отрицательным, какие бы значения ни принимали компоненты деформации.

При этом первое условие обеспечивает выполнение закона взаимности Бетти, а второе—теоремы единственности и принципа минимума.

Необходимо отметить, что в предыдущих параграфах мы пользовались двумя векторными уравнениями равновесия, которые заключают в себе, в частности, и уравнение

$$S_1+S_2+\frac{H_1}{R_1}+\frac{H_2}{R_2}=0 \tag{4.1}$$

шестое уравнение равновесия.

Поэтому, чтобы сделать законными предыдущие рассуждения, необходимо потребовать, чтобы формулы, связывающие усилия и деформации, не противоречили этому уравнению.

Переходя к оценке соотношений между усилиями и деформациями, даваемых различными авторами, отметим прежде всего, что ни один из трех вариантов этих соотношений, даваемых Лявом, не удовлетворяет первому условию и, следовательно, к теории тонких оболочек, в том виде, как она дается Лявом, закон взаимности работ не применим.

В. Новожилов [4] замечает, что из всех вариантов Лява следует пользоваться только простейшим, а именно

$$T_1=\frac{2Eh}{1-\sigma^2}(\varepsilon_1+\sigma\varepsilon_2),\quad T_2=\frac{2Eh}{1-\sigma^2}(\varepsilon_2+\sigma\varepsilon_1),\quad -S_2=S_1=\frac{Eh}{1+\sigma}\omega \tag{4.2}$$

$$G_1=-D(\varkappa_1+\sigma\varkappa_2),\quad G_2=-D(\varkappa_2+\sigma\varkappa_1),\quad -H_2=H_1=D(1-\sigma)\tau \tag{4.3}$$

где $D=\frac{2Eh^3}{3(1-\sigma^2)}$—цилиндрическая жесткость, так как дальнейшие уточнения не оправдывают себя, поскольку гипотеза Кирхгофа соответствует откидыванию членов того же порядка, какой принимается при уточнении.

Если все же ввести эти уточнения, то вместо (4.2) и (4.3) получим, например, данные Лурье [5] формулы

$$T_1=\frac{2Eh}{1-\sigma^2}\left[\varepsilon_1+\sigma\varepsilon_2-\frac{h^2}{3}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\left(\varkappa_1-\frac{\varepsilon_1}{R_1}\right)\right]$$

$$T_2=\frac{2Eh}{1-\sigma^2}\left[\varepsilon_2+\sigma\varepsilon_1+\frac{h^2}{3}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\left(\varkappa_2-\frac{\varepsilon_2}{R_2}\right)\right]$$

$$\begin{aligned}S_1&=\frac{2Eh}{1-\sigma^2}\left[\omega^{(1)}+\sigma\omega^{(2)}+\frac{1-\sigma}{2}\frac{h^2}{3}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\frac{\omega^{(1)}}{R_1}+\frac{1-\sigma}{2}\frac{h^2}{3}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\tau^{(1)}\right]=\\&=\frac{Eh}{1+\sigma}\left[\omega-\frac{h^2}{3}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\left(\tau-\frac{\omega}{R_1}\right)\right]\\S_2&=\frac{2Eh}{1-\sigma^2}\left[\omega^{(2)}+\sigma\omega^{(1)}+\frac{1-\sigma}{2}\frac{h^2}{3}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\frac{\omega^{(2)}}{R_2}+\frac{1-\sigma}{2}\frac{h^2}{3}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\tau^{(2)}\right]=\\&=\frac{Eh}{1+\sigma}\left[-\omega+\frac{h^2}{3}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\left(\tau-\frac{\omega}{R_2}\right)\right]\end{aligned}\tag{4,4}$$

$$\begin{aligned}&G_1=-D\left[\varkappa_1+\sigma\varkappa_2-\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\varepsilon_1\right],\quad G_2=-D\left[\varkappa_2+\sigma\varkappa_1-\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\varepsilon_2\right]\\&H_1=-D\frac{1-\sigma}{2}\left[\tau^{(1)}-\tau^{(2)}+\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\omega^{(1)}\right]=D\frac{1-\sigma}{2}\left(2\tau-\frac{\omega}{R_1}\right)\\&H_2=-D\frac{1-\sigma}{2}\left[\tau^{(2)}-\tau^{(1)}+\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\omega^{(2)}\right]=-D\frac{1-\sigma}{2}\left(2\tau-\frac{\omega}{R_2}\right)\end{aligned}\tag{4.5}$$

Следовательно, гипотеза Кирхгофа слишком груба, чтобы учесть влияние членов порядка ε_1/R_1, ε_1/R_2, ε_2/R_1, ε_2/R_2 в сравнении с $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ и членов порядка ω/R_1, ω/R_2 в сравнении с τ, и, не выходя из рамок точности гипотезы Кирхгофа, можно их отбрасывать или добавлять к τ, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ члены такого же порядка, если это почему-либо окажется удобным. Сохранение основных теорем общей теории упругости может часто оправдать такого рода поправки.

Обратимся к соотношениям (4.4) и (4.5). Эти формулы имеют симметричную структуру, и, кроме того, как отмечает Лурье, подстановка S_1, S_2, H_1 и H_2 в равенство (4.1) превращает последнее в тождество. Этим свойством не обладают формулы (4.2) и (4.3), и Новожилов впадает в противоречие, утверждая, что (4.1) является следствием соотношений между усилиями и деформациями, а потом предлагая пользоваться (4.2) и (4.3), которые не удовлетворяют уравнению (4.1).

Члены, на которые различаются величины T_1, T_2, G_1 и G_2, определяемые формулами (4.4) и (4.5), от тех же величин, определяемых посредством (4.2) и (4.3), малы и их можно отбросить, но аналогичными членами в формулах для S_1, S_2, H_1 и H_2 нельзя пренебрегать, не делая незаконным применение общих теорем теории упругости, так как при этом (4.1) не будет удовлетворяться.

Таким образом, придем к следующему варианту соотношений между усилиями и деформациями:

$$\begin{aligned}&T_1=\frac{2Eh}{1-\sigma^2}(\varepsilon_1+\sigma\varepsilon_2),\qquad S_1=\frac{Eh}{1+\sigma}\left[\omega-\frac{h^2}{3}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\left(\tau-\frac{\omega}{R_1}\right)\right]\\&T_2=\frac{2Eh}{1-\sigma^2}(\varepsilon_2+\sigma\varepsilon_1),\qquad S_2=\frac{Eh}{1+\sigma}\left[-\omega+\frac{h^2}{3}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\left(\tau-\frac{\omega}{R_2}\right)\right]\end{aligned}\tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}&G_1=-D(\varkappa_1+\sigma\varkappa_2),\qquad H_1=D\frac{1-\sigma}{2}\left(2\tau-\frac{\omega}{R_1}\right)\\&G_2=-D(\varkappa_2+\sigma\varkappa_1),\qquad H_2=-D\frac{1-\sigma}{2}\left(2\tau-\frac{\omega}{R_2}\right)\end{aligned}\tag{4.7}$$

Составляя по этим формулам $2W$, получим

$$2W = \frac{2Eh}{1-\sigma^2}\left\{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2 - 2(1-\sigma)\left(\varepsilon_1\varepsilon_2 - \frac{\omega^2}{4}\right) + (1-\sigma)\frac{h^2}{3}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)^2\frac{\omega^2}{4} + \right.$$

$$\left. + \frac{h^2}{3}(\varkappa_1+\varkappa_2)^2 - 2(1-\sigma)\frac{h^2}{3}\left[\varkappa_1\varkappa_2 - \frac{1}{2}\left\{\left(\tau - \frac{\omega}{2R_1}\right)^2 + \left(\tau - \frac{\omega}{2R_2}\right)^2\right\}\right]\right\}$$

Очевидно, что при любых значениях деформаций $2W \geqslant 0$, конечно, при $\sigma < 1$.

Таким образом, соотношения (4.6) и (4.7) удовлетворяют всем условиям, обеспечивающим выполнение основных теорем теории упругости.

Отметим в заключение, что если не ставить целью удовлетворение выведенных условий, а ограничиться выбором такого варианта соотношений между усилиями и деформациями, которые максимально упрощали бы уравнения теории оболочек, то соотношения (4.2) и (4.3) также нельзя признать наилучшими.

Если, например, считать, что лучшим будет такой вариант, при котором уравнения неразрывности деформаций в усилиях будут самыми простыми, то предпочтения заслуживают формулы

$$T_1 = \frac{2Eh}{1-\sigma^2}(\varepsilon_1 + \sigma\varepsilon_2), \qquad T_2 = \frac{2Eh}{1-\sigma^2}(\varepsilon_2 + \sigma\varepsilon_1), \qquad S_1 = -S_2 = \frac{Eh}{1+\sigma}\omega \tag{4.8}$$

$$G_1 = -D(\varkappa_1 + \sigma\varkappa_2), \qquad G_2 = -D(\varkappa_2 + \sigma\varkappa_1)$$

$$H_1 = D(1-\sigma)\tau^{(2)}; \qquad H_2 = D(1-\sigma)\tau^{(1)} \tag{4.9}$$

При этом уравнения неразрывности можно привести к виду

$$\frac{B}{R_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}(T_1+T_2) + \frac{3}{h^2}B\frac{\partial}{\partial\alpha}(G_1+G_2) - AB(1+\sigma)\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{3}{h^2}\right)N_1 + \frac{AB}{R_1}(1+\sigma)X = 0$$

$$(4.10)$$

$$\frac{A}{R_2}\frac{\partial}{\partial\beta}(T_1+T_2) + \frac{3}{h^2}A\frac{\partial}{\partial\beta}(G_1+G_2) - AB(1+\sigma)\left(\frac{1}{R_2^2}+\frac{3}{h^2}\right)N_2 + \frac{AB}{R_2}(1+\sigma)Y = 0$$

$$-\frac{3}{h^2}\left(\frac{G_1}{R_2}+\frac{G_2}{R_1}\right) + \frac{3}{h^2}\sigma\left(\frac{G_1}{R_1}+\frac{G_2}{R_2}\right) + \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{A}\frac{\partial(T_1+T_2)}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{B}\frac{\partial(T_1+T_2)}{\partial\beta}\right] -$$

$$-\frac{1+\sigma}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{B}\left[\frac{AB}{R_2}N_2 - ABY\right] - \frac{1+\sigma}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{A}\left[\frac{AB}{R_1}N_1 - ABX\right] = 0$$

Вывод этих соотношений занял бы слишком много места, он ничем не отличается от того, который подробно показан в нашей статье [3]. Отбрасывание членов $\omega/2R_1$, $\omega/2R_2$ в последних двух из формул (4.9), т. е. переход к формулам (4.2), (4.3), влечет появление в (4.10) дополнительных членов, содержащих S_1 и S_2, что может значительно осложнить операции с этими уравнениями. Отметим, что для сферы при $R_1 = R_2$ формулы (4.8), (4.9) совпадают с (4.6), (4.7).

Новожилов [6] предлагает заменить (4.10) более простыми приближенными уравнениями. Вместо двух первых уравнений (4.10) он предлагает

$$(1+\sigma)N_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial(G_1+G_2)}{\partial\alpha}, \qquad (1+\sigma)N_2 = \frac{1}{B}\frac{\partial(G_1+G_2)}{\partial\beta},$$

утверждая при этом, что они могут быть легко проверены, в частности, на примере сферической оболочки.

Однако, именно рассматривая общий интеграл уравнений сферической оболочки, можно показать, в каких случаях отбрасываемые Новожиловым члены могут быть и соизмеримыми, и даже больше, чем сохраненные.

Поступила в редакцию
3 XII 1943.

A. L. GOLDENVEISER. APPLICABILITY OF THE GENERAL THEOREMS OF ELASTICITY TO THIN SHELLS

The author deals with thin shells following Love and investigates the applicability to this theory the known theorems of the general theory of elasticity, namely: the Kirchhoff's theorem of uniqueness, the minimum principle the for work of deformations, the Betty's law of reciprocity of work and so on.

By means of formula (2.9) the author involves the formal notation of the elastic potential W of shell. Besides the usual values of stresses, moments and components of deformations this potential includes the values $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$, $\tau^{(1)}$ and $\tau^{(2)}$ given by formulae (2.8).

It is shown that the above-mentioned theorems take place in the theory of the thin shell if the formulae relating the stresses and moments with the values of deformations may be reduced to such a form, that:

1) the sixth equation of equilibrium will be satisfied identically;

2) the elastic stresses and moments of shell T_1, T_2, S_1, S_2, G_1, G_2, H_1, H_2 are expressed in terms of ε_1, ε_2, $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\tau^{(1)}$, $\tau^{(2)}$ by means of linear equations with a symmetrical matrix;

3) the elastic potential W of the shell remains non-negative for any values of the deformation components.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л я в. Математическая теория упругости.
2. Гольденвейзер А. Л. Прикладная математика и механика. 1940. Т. IV. Вып. 2.
3. Гольденвейзер А. Л. Поправки и дополнения к теории тонких оболочек Love Сборник «Пластинки и оболочки».
4. Новожилов В. В. О погрешности одной из гипотез теории оболочек. ДАН. 1943. XXXVIII. № 5—6.
5. Лурье А. И. Общая теория упругих тонких оболочек. Прикладная математика и механика. 1940. Т. IV. Вып. 2.
6. Новожилов В. В. К вопросу о решении задач теории тонких оболочек в усилиях и моментах. ДАН. 1943. XXXVIII. № 9.