

ТЕОРИЯ ТОНКИХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ, ОБЛАДАЮЩИХ В ПОПЕРЕЧНОМ СЕЧЕНИИ НЕДЕФОРМИРУЕМЫМ КОНТУРОМ

Г. Ю. ДЖАНЕЛИДЗЕ

(Самарканд)

Предложенная В. З. Власовым^[1, 2, 3] теория прямолинейных упругих тонкостенных стержней может быть обобщена и на случай криволинейных упругих тонкостенных стержней, обладающих в поперечном сечении недеформируемым контуром.

Подобное обобщение выполнено в 1941 г. в неопубликованной дипломной работе студента Ленинградского политехнического института Демидова.

В этой работе уравнения для определения перемещений отдельных точек стержня выведены обычным методом—из рассмотрения равновесия элемента стержня. Вопрос о постановке силовых граничных условий в работе Демидова для общего случая не рассматривается, а приводимые граничные условия для частной задачи об изгибе консольной криволинейной балки силой на конце не обосновываются.

В настоящей работе задача о равновесии криволинейных тонкостенных стержней изучается энергетическим методом (аналогичное исследование для прямолинейных тонкостенных стержней выполнено нами в другой работе^[4]). При этом разбирается детально вопрос об «естественных» граничных условиях соответствующей вариационной задачи.

1. Основные положения теории. Будем рассматривать криволинейный тонкостенный стержень незамкнутого профиля как часть оболочки вращения, срединная поверхность которой отнесена координатам φ (угол вращения) и s (длина дуги, отсчитанная по осевой линии профиля). Обозначим через $\rho(s)$ расстояние точек линии $s=\text{const}$ от оси вращения. Тогда уравнения срединной поверхности оболочки в декартовых координатах будут иметь вид (фиг. 1)

$$X = \rho(s) \cos \varphi, \quad Y = \rho(s) \sin \varphi, \quad Z = y(s)$$

Вычисляя коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности, найдем

$$E = \rho^2(s), \quad F = 0, \quad G = 1 \quad \text{и} \quad L = -\rho(s)y'(s), \quad M = 0, \quad N = y'(s)\rho''(s) - y''(s)\rho'(s)$$

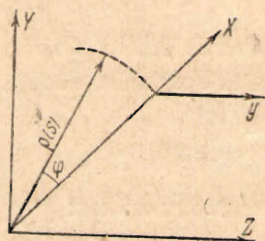
Равенства $F = M = 0$, как известно, являются необходимым и достаточным условием для того, чтобы выбранные координатные линии $\varphi = \text{const}$ и $s = \text{const}$ были одновременно и линиями кривизны. Заметим одновременно, что главные кривизны поверхности будут определяться формулами

$$\frac{1}{R_1} = \frac{L}{E} = -\frac{y'}{\rho}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{N}{G} = x'y'' - y'x'' = -\frac{x''}{y'} = \frac{y''}{x'}$$

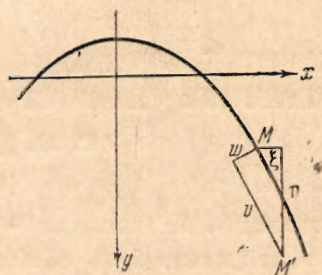
Из формулы общей теории оболочек (см., например, А. И. Лурье^[5]), следует, что деформации срединной поверхности будут определяться формулами

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{u}{\rho} \right) + \frac{v}{\rho} \frac{d\rho}{ds} - \frac{\cos \omega}{\rho} w, \quad \varepsilon_s = \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{w}{R}, \quad \gamma_{\varphi s} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{ds} u \quad (1.1)$$

в которых ds — дифференциал дуги срединной линии профиля, ω — угол между радиусом вращения $\rho(s)$ и нормалью к осевой линии профиля в точке s , а $R(s)$ — радиус кривизны осевой линии профиля в точке s .



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Параметры изменения кривизны κ_1 , κ_2 и τ определяются соотношениями (статья А. И. Лурье^[6] формулы 2.1, 17 и 2.1, 18)

$$\kappa_1 = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} + \cos \omega u \right) + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{ds} \left(\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{v}{R} \right), \quad \kappa_2 = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{v}{R} \right) \quad (1.2)$$

$$\tau = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial s} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{ds} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\rho R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\cos \omega}{\rho} \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{\cos \omega}{\rho^2} \frac{d\rho}{ds} u$$

Примем теперь в качестве первой основной гипотезы, что перемещения v и w соответствуют только деформации кручения и повороту сечения как целого относительно центра с координатами x_0 и y_0 . В этом случае смещения в направлениях декартовых осей координат x и y [ось x направлена параллельно $\rho(s)$ по направлению к оси вращения; ось y — перпендикуляр к оси x , направленный в сторону возрастания s] даются формулами кинематики плоского движения

$$\xi = \xi_0 - \Theta(y - y_0), \quad \eta = \eta_0 + \Theta(x - x_0) \quad (1.3)$$

в которых $\xi_0(\varphi)$ и $\eta_0(\varphi)$ — смещения по осям x и y точки $A(x_0, y_0)$, а $\Theta(\varphi)$ — угол поворота.

Перемещения v и w выражаются через смещения согласно фиг. 2 формулами

$$v = \xi \frac{dx}{ds} + \eta \frac{dy}{ds}, \quad w = -\xi \frac{dy}{ds} + \eta \frac{dx}{ds} \quad (1.4)$$

Вычислим теперь составляющие деформации срединной поверхности, соответствующие этим перемещениям и неизвестному перемещению u , подлежащему определению. Из (1.1), (1.3) и (1.4) имеем

$$\varepsilon_s = \xi_0 \left(\frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{1}{R} \frac{dy}{ds} \right) + \eta_0 \left(\frac{d^2 y}{ds^2} - \frac{1}{R} \frac{dx}{ds} \right) \quad (1.5)$$

Приведенные в начале параграфа соотношения

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 y}{ds^2} : \frac{dx}{ds} = - \frac{d^2 x}{ds^2} : \frac{dy}{ds}$$

показывают, что

$$\varepsilon_s = 0 \quad (1.6)$$

Для ε_φ найдем

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{u}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{ds} \left(\xi \frac{dx}{ds} + \eta \frac{dy}{ds} \right) - \frac{\cos \omega}{\rho} \left(-\xi \frac{dy}{ds} + \eta \frac{dx}{ds} \right) \quad (1.7)$$

Очевидные из чертежа формулы

$$x(s) = C - \rho(s), \quad \cos \omega = -\frac{dy}{ds}$$

позволяют упростить соотношение (1.7). Получим

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{u}{\rho} \right) - \frac{\xi}{\rho} \left[\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 \right] = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{u}{\rho} \right) - \frac{\xi}{\rho} \quad (1.8)$$

Сдвиг $\gamma_{\varphi s}$ также вычисляется из формул (1.1), (1.3) и (1.4).

$$\gamma_{\varphi s} = \rho \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \frac{dx}{ds} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \frac{dy}{ds}$$

или

$$\gamma_{\varphi s} = \rho \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \left\{ \dot{\xi}_0 \frac{dx}{ds} + \dot{\eta}_0 \frac{dy}{ds} + \dot{\Theta} \left[(x-x_0) \frac{dy}{ds} - (y-y_0) \frac{dx}{ds} \right] \right\} \quad (1.9)$$

Столь же просто вычисляются и параметры изменения кривизны:

$$\chi_1 = \frac{1}{\rho^2} \left\{ -\ddot{\xi}_0 \frac{dy}{ds} + \ddot{\eta}_0 \frac{dx}{ds} + \ddot{\Theta}_0 \left[(y-y_0) \frac{dy}{ds} + (x-x_0) \frac{dx}{ds} \right] - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{dy}{ds} \right\} - \frac{\Theta}{\rho} \frac{dx}{ds} \quad (1.10)$$

$$\chi_2 = \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \Theta \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \Theta \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \xi \left(\frac{1}{R} \frac{dx}{ds} - \frac{d^2 y}{ds^2} \right) + \eta \left(\frac{1}{R} \frac{dy}{ds} + \frac{d^2 x}{ds^2} \right) \right\} = \frac{\partial \Theta}{\partial s} = 0 \quad (1.11)$$

Третий параметр изменения кривизны выражается формулой (1.2), которая по использованию соотношения

$$\gamma_{\varphi s} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{ds} u$$

принимает вид

$$\tau = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial s} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{ds} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{R} - \frac{\cos \omega}{\rho} \right) \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\cos \omega}{\rho} \gamma_{\varphi s}$$

Подставляя значения w и v , приходим к формуле

$$\tau = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \Theta \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \Theta \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 \right\} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \left\{ \frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{1}{R} \frac{dy}{ds} \right\} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \left\{ \frac{1}{R} \frac{dx}{ds} - \frac{d^2 y}{ds^2} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{\rho^2} \left\{ \frac{\partial \eta_0}{\partial \varphi} + (x-x_0) \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} \right\} \left[\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 \right] + \frac{\cos \omega}{\rho} \gamma_{\varphi s}$$

или

$$\tau = \frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{x-x_0}{\rho} \right) \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \eta_0}{\partial \varphi} + \frac{\cos \omega}{\rho} \gamma_{\varphi s} \quad (1.12)$$

Примем в качестве второй основной гипотезы, что деформация сдвига срединной поверхности оболочки равна нулю:

$$\gamma_{\varphi s} = 0 \quad (1.13)$$

Из (1.9) и (1.13) следует (служящее для определения перемещения u) дифференциальное уравнение первого порядка в колых производных

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left\{ \dot{\xi}_0 \frac{dx}{ds} + \dot{\eta}_0 \frac{dy}{ds} + \dot{\Theta} \left[(x-x_0) \frac{dy}{ds} - (y-y_0) \frac{dx}{ds} \right] \right\} = 0 \quad (1.14)$$

Общий интеграл этого уравнения легко находится интегрированием по s :

$$\frac{u}{\rho} = \psi(\varphi) - \dot{\xi}_0 \int_0^s \frac{dx}{\rho^2} - \dot{\eta}_0 \int_0^s \frac{dy}{\rho^2} - \dot{\Theta} \int_0^s \frac{d\omega}{\rho^2} \quad (1.15)$$

Здесь $d\omega = (x - x_0)dy - (y - y_0)dx$ — дифференциал секториальной площади — так вслед за В. З. Власовым называют площадь сектора, заключенного между двумя радиусами-векторами и дугой s средней линии профиля, $\psi(\varphi)$ — произвольная функция интегрирования, зависящая только от φ .

Уравнения (1.3), (1.4), (1.15) показывают, что перемещения u , v и w любой точки стержня выражаются через четыре функции $\psi(\varphi)$, $\xi_0(\varphi)$, $\eta_0(\varphi)$, $\Theta(\varphi)$ угла φ , подлежащие определению из уравнений равновесия. (Для упрощения записи в дальнейшем опустим индексы при ξ_0 и η_0)

2. Энергетические соотношения. Для вывода уравнений равновесия в перемещениях будем исходить из принципа возможных перемещений, согласно которому функционал W , равный разности между упругим потенциалом системы Π и работой внешних сил A

$$W = \Pi - A \quad (2.1)$$

должен иметь стационарное значение.

Выразим теперь функционал W через перемещения ξ_0 , η_0 , ψ и угол закручивания Θ . Составим сначала выражение потенциала упругих сил Π , исходя из обычной формулы теории оболочек (см. Ляв [6], стр. 557, формула 38):

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \int_0^{s_1} \left\{ (\varepsilon_\varphi + \varepsilon_s)^2 - 2(1-\nu) \left(\varepsilon_\varphi \varepsilon_s - \frac{\gamma_{\varphi s}^2}{4} \right) \right\} \rho h ds d\varphi + \\ & + \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \int_0^{s_1} \frac{\rho h^3}{12} \{ (\chi_1 + \chi_2)^2 - 2(1-\nu)(\chi_1 \chi_2 - \tau^2) \} ds d\varphi \quad (2.2) \end{aligned}$$

Формула (2.2) носит приближенный характер — ряд членов порядка h^3 в ней уже опущен.

В нашем случае $\varepsilon_s = 0$, $\gamma_{\varphi s} = 0$, $\chi_2 = 0$, поэтому (2.2) упрощается и принимает вид

$$\Pi = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \int_0^{s_1} \left\{ \varepsilon_\varphi^2 + \frac{h^2}{12} \chi_1^2 + \frac{h^2(1-\nu)}{6} \tau^2 \right\} \rho h ds d\varphi \quad (2.3)$$

Здесь E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, φ_0 и φ_1 — значения угла φ , отвечающие концам стержня, s_1 — длина дуги срединной линии профиля, $h(s)$ — толщина профиля в точке s .

Так же, как и в обычной теории В. З. Власова для прямолинейных стержней [3], пренебрежем членом третьего порядка, содержащим χ_1 , и из членов третьего порядка сохраним только член, зависящий от деформации кручения, характеризуемой параметром τ (учет всех, в том числе и невыписанных, членов третьего порядка вполне возможен. Однако он, повидимому, излишен, так как основные положения теории справедливы только для тонких стержней).

Тогда

$$\Pi = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \int_0^{s_1} \left\{ \varepsilon_\varphi^2 + \frac{h^2}{6} (1-\nu) \tau^2 \right\} \rho h ds d\varphi \quad (2.4)$$

Заметим, что полученные в работе Демидова уравнения равновесия соответствуют отбрасыванию члена, содержащего τ^3 . Поэтому предельный переход к $\rho(s) \rightarrow \infty$ (т. е. к обычной теории В. З. Власова) не дает полного совпадения уравнений Демидова с обычными уравнениями В. З. Власова для прямо-

линейного стержня. Сохранение члена с τ^2 обеспечивает это соответствие для выводимых далее уравнений.

Определим теперь работу внешних сил. Предположим, что внешние силы сводятся к поверхностно распределенной по срединной поверхности силе $\mathbf{p}(\varphi, s)$, с компонентами $p_x(\varphi, s)$, $p_y(\varphi, s)$ по осям x и y и компонентой $p_\varphi(\varphi, s)$ по касательной к линии $s = \text{const}$. Кромки и концы стержня будем пока считать свободными от внешних усилий. Сила $\mathbf{p}(\varphi, s)$ работает на перемещении \mathbf{u} (с компонентами $\xi(\varphi, s)$ и $\eta(\varphi, s)$ — по осям x и y и компонентой u по касательной к линии $s = \text{const}$). Тогда работа внешних сил будет

$$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \int_0^{s_1} \mathbf{p}(\varphi, s) \cdot \mathbf{u}(\varphi, s) \rho h ds d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \int_0^{s_1} \{p_x \xi_0 + p_y \eta_0 + p_\varphi u\} \rho h ds d\varphi \quad (2.6)$$

Выразим функционал W через перемещения ξ_0, η_0, ψ и угол поворота Θ :

$$\begin{aligned} W = & \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \int_0^{s_1} \left\{ \dot{\psi} - \ddot{\xi}_0 \int_0^s \frac{dx}{\rho^2} - \ddot{\eta}_0 \int_0^s \frac{dy}{\rho^2} - \ddot{\Theta} \int_0^s \frac{d\omega}{\rho^2} - \frac{\xi_0}{\rho} + \frac{\Theta}{\rho} (y - y_0) \right\}^2 \rho h d\varphi ds + \\ & + \frac{G}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \int_0^{s_1} \left\{ \frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{x - x_0}{\rho} \right) \Theta + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \eta_0}{\partial \varphi} \right\}^2 h^2 \rho h d\varphi ds - \\ & - \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \int_0^{s_1} \{p_x \xi_0 + p_y \eta_0 + p_\varphi u\} \rho h d\varphi ds \end{aligned} \quad (2.7)$$

3. Вывод уравнений равновесия в перемещениях. Для получения дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях вычислим вариацию функционала W , приравняем ее нулю и преобразуем интегрированием по частям полученное выражение. Получим¹

$$\delta W = \int_0^{\varphi_1} \{ Q_\psi \delta \psi + Q_\xi \delta \xi_0 + Q_\eta \delta \eta_0 + Q_\Theta \delta \Theta + Q_h \delta h + Q_\psi \delta \psi + Q_\xi \delta \xi_0 + Q_\eta \delta \eta_0 + Q_\Theta \delta \Theta \} d\varphi \quad (3.1)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} Q_\psi = & \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \dot{\psi} \int_0^{s_1} \rho h ds - \ddot{\xi}_0 \int_0^{s_1} \rho h \int_0^s \frac{dx}{\rho^2} ds - \ddot{\eta}_0 \int_0^{s_1} \rho h \int_0^s \frac{dy}{\rho^2} ds - \right. \\ & \left. - \ddot{\Theta} \int_0^{s_1} \rho h \int_0^s \frac{d\omega}{\rho^2} ds - \xi_0 \int_0^{s_1} h ds + \Theta \int_0^{s_1} (y - y_0) h ds \right\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} Q_\xi = & -\frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \dot{\psi} \int_0^{s_1} \rho h \left[\int_0^s \frac{dx}{\rho^2} \right] ds - \ddot{\xi}_0 \int_0^{s_1} \rho h \left[\int_0^s \frac{dx}{\rho^2} \right]^2 ds - \ddot{\eta}_0 \int_0^{s_1} \rho h \left[\int_0^s \frac{dy}{\rho^2} \int_0^s \frac{dx}{\rho^2} \right] ds - \right. \\ & \left. - \ddot{\Theta} \int_0^{s_1} \rho h \left[\int_0^s \frac{d\omega}{\rho^2} \int_0^s \frac{dx}{\rho^2} \right] ds - \xi_0 \int_0^{s_1} h \int_0^s \frac{dx}{\rho^2} ds + \Theta \int_0^{s_1} (y - y_0) \int_0^s \frac{dx}{\rho^2} h ds \right\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} Q_\eta = & -\frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \dot{\psi} \int_0^{s_1} \rho h \left[\int_0^s \frac{dy}{\rho^2} \right] ds - \ddot{\xi}_0 \int_0^{s_1} \rho h \left[\int_0^s \frac{dx}{\rho^2} \int_0^s \frac{dy}{\rho^2} \right] ds - \ddot{\eta}_0 \int_0^{s_1} \rho h \left[\int_0^s \frac{dy}{\rho^2} \right]^2 ds - \right. \\ & \left. - \ddot{\Theta} \int_0^{s_1} \rho h \left[\int_0^s \frac{d\omega}{\rho^2} \int_0^s \frac{dy}{\rho^2} \right] ds - \xi_0 \int_0^{s_1} h \int_0^s \frac{dy}{\rho^2} ds + \Theta \int_0^{s_1} (y - y_0) \int_0^s \frac{dy}{\rho^2} h ds \right\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

¹ Для упрощения принято, что $p_\varphi = 0$.

$$Q_{\ddot{\omega}} = -\frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \dot{\psi} \int_0^{s_1} \rho h \left[\int_0^s \frac{d\omega}{\rho^2} \right] ds - \ddot{\xi}_0 \int_0^{s_1} \rho h \left[\int_0^s \frac{dx}{\rho^2} \int_0^s \frac{d\omega}{\rho^2} \right] ds - \ddot{\eta}_0 \int_0^{s_1} \rho h \left[\int_0^s \frac{dy}{\rho^2} \int_0^s \frac{d\omega}{\rho^2} \right] ds - \right. \\ \left. - \ddot{\Theta} \int_0^{s_1} \rho h \left[\int_0^s \frac{d\omega}{\rho^2} \right]^2 ds - \xi_0 \int_0^{s_1} h \int_0^s \frac{d\omega}{\rho^2} ds + \Theta \int_0^{s_1} (y - y_0) \int_0^s \frac{d\omega}{\rho^2} h ds \right\} \quad (3.5)$$

$$Q_{\Theta} = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \dot{\psi} \int_0^{s_1} (y - y_0) h ds - \ddot{\xi}_0 \int_0^{s_1} h (y - y_0) \int_0^s \frac{dx}{\rho^2} ds - \ddot{\eta}_0 \int_0^{s_1} h (y - y_0) \int_0^s \frac{dy}{\rho^2} ds - \right. \\ \left. - \ddot{\Theta} \int_0^{s_1} h (y - y_0) \int_0^s \frac{d\omega}{\rho^2} ds - \xi_0 \int_0^{s_1} \frac{h (y - y_0)}{\rho} ds + \Theta \int_0^{s_1} \frac{(y - y_0)^2}{\rho} h ds \right\} \quad (3.6)$$

$$Q_{\xi} = -\frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \dot{\psi} \int_0^{s_1} h ds - \ddot{\xi}_0 \int_0^{s_1} h \int_0^s \frac{dx}{\rho^2} ds - \ddot{\eta}_0 \int_0^{s_1} h \int_0^s \frac{dy}{\rho^2} ds - \ddot{\Theta} \int_0^{s_1} h \int_0^s \frac{d\omega}{\rho^2} ds - \right. \\ \left. - \xi_0 \int_0^{s_1} \frac{h ds}{\rho} + \Theta \int_0^{s_1} \frac{y - y_0}{\rho} h ds \right\} - \int_0^{s_1} \rho p_x h ds \quad (3.7)$$

$$Q_{\eta} = G \left\{ \dot{\Theta} \int_0^{s_1} \frac{h^3}{6\rho^2} \left(1 + \frac{x - x_0}{\rho} \right) ds + \dot{\eta}_0 \int_0^{s_1} \frac{h^3}{6\rho^2} ds \right\} - \int_0^{s_1} \rho p_y h ds \quad (3.8)$$

$$Q_{\dot{\Theta}} = G \left\{ \dot{\Theta} \int_0^{s_1} \frac{h^3}{6\rho^2} \left(1 + \frac{x - x_0}{\rho} \right)^2 \rho ds + \dot{\eta}_0 \int_0^{s_1} \frac{h^3}{6\rho^2} \left(1 + \frac{x - x_0}{\rho} \right) ds \right\} \quad (3.9)$$

$$Q_{\dot{\psi}} = 0 \quad (3.10)$$

Интегрируя в (3.1) отдельные члены по частям и собирая члены, содержащие интегралы по срединной поверхности и линейные интегралы по средней линии профиля поперечного сечения, представим δW в виде суммы

$$\delta W = \delta W_F + \delta W_s \quad (3.11)$$

Вариация δW_F не должна содержать производные от вариаций перемещений.

В силу произвольности вариаций перемещений раздельно $\delta W_F = 0$ и $\delta W_s = 0$. Из равенства $\delta W_F = 0$ следуют уравнения равновесия, а из соотношения $\delta W_s = 0$ — граничные условия. Вариации δW_F и δW_s могут быть легко выражены через введенные ранее величины Q . Имеем

$$\delta W_F = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \{ (Q_{\dot{\psi}} - \dot{Q}_{\dot{\psi}}) \delta \dot{\psi} + (Q_{\xi} + \dot{Q}_{\xi}) \delta \xi_0 + (Q_{\eta} + \dot{Q}_{\eta}) \delta \eta_0 + (Q_{\Theta} - \dot{Q}_{\Theta} + \dot{Q}_{\Theta}) \delta \Theta \} d\varphi = 0 \quad (3.12)$$

$$\delta W_s = [Q_{\dot{\psi}} \delta \dot{\psi} + Q_{\xi} \delta \xi_0 - \dot{Q}_{\xi} \delta \xi_0 + Q_{\eta} \delta \eta_0 - \dot{Q}_{\eta} \delta \eta_0 + Q_{\Theta} \delta \Theta + (Q_{\dot{\Theta}} - \dot{Q}_{\dot{\Theta}}) \delta \Theta]_{\varphi_0}^{\varphi_1} = 0 \quad (3.13)$$

Вариации $\delta \dot{\psi}$, $\delta \xi_0$, $\delta \eta_0$ и $\delta \Theta$ независимы, поэтому, приравнявая нулю выражения, стоящие при них в (3.12), получим систему уравнений

$$Q_{\dot{\psi}} - \dot{Q}_{\dot{\psi}} = 0, \quad Q_{\xi} + \dot{Q}_{\xi} = 0, \quad Q_{\eta} + \dot{Q}_{\eta} = 0, \quad Q_{\Theta} - \dot{Q}_{\Theta} + \dot{Q}_{\Theta} = 0$$

для определения перемещений $\xi_0, \eta_0, \psi, \theta$. Эту систему легко выписать в развернутом виде с помощью соответствующих выражений (3.2) — (3.7) для величин Q . Указанное в (3.14) дифференцирование величин Q сводится к повышению порядка производных переменных ξ, η, ψ и θ в выражениях (3.2) — (3.7).

Общий интеграл линейной системы дифференциальных уравнений (3.14) должен содержать 14 произвольных постоянных (3 уравнения содержат четвертые производные от ξ, η, θ и одну вторую производную от ψ). Таким образом для полного решения задачи нужно иметь по семь граничных условий на каждом конце стержня.

4. Граничные условия. Граничные условия могут быть получены из выведенного в § 3 соотношения (3.13). Поскольку в это соотношение входят значения вариаций на концах стержня, то все вариации, входящие в формулу, могут рассматриваться как независимые. Это замечание позволяет получить из (3.13) искомые граничные условия при $\varphi = \varphi_1$ (или $\varphi = \varphi_0$) приравниванием нулю выражений, стоящих в (3.13) при вариациях. Получим

$$Q_\psi = 0, \quad Q_\xi = 0, \quad Q_\eta = 0, \quad Q_\theta = 0, \quad Q_{\dot{\xi}} = 0, \quad Q_{\dot{\eta}} = 0, \quad Q_{\dot{\theta}} = 0, \quad Q_{\dot{\psi}} - \ddot{Q}_0 = 0. \quad (4.1)$$

Уравнения (4.1), если их выписать в развернутом виде, пользуясь выражением (3.2) — (3.7) для величин Q , будут иметь довольно громоздкий вид. Однако их можно значительно упростить с помощью соотношения

$$\sigma^* = \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon_\varphi \quad (4.2)$$

определяющего «физическую» компоненту тензора напряжений в направлении касательной к линии $s = \text{const}$.

Из (1.8) и (4.2) следует связь между перемещениями и напряжением σ :

$$\sigma = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \dot{\psi} - \ddot{\xi}_0 \int_0^s \frac{dx}{\rho^2} - \ddot{\eta}_0 \int_0^s \frac{dy}{\rho^2} - \ddot{\theta} \int_0^s \frac{d\omega}{\rho^2} - \frac{\xi_0}{\rho} + \frac{\theta}{\rho} (y - y_0) \right\} \quad (4.3)$$

Сопоставление развернутых формул (4.1) с соотношением (4.3) показывает, что они эквивалентны следующим зависимостям:

$$\begin{aligned} M_\psi &= \int_0^{s_1} \rho(s) \sigma(\varphi_1, s) h ds = 0 \\ M_y &= - \int_0^{s_1} \sigma \left[\int_0^s \frac{dx}{\rho^2} \right] \rho h ds = 0, \quad M_x = + \int_0^{s_1} \sigma \left[\int_0^s \frac{dy}{\rho^2} \right] \rho h ds = 0 \\ V_y &= \int_0^{s_1} \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} \left[\int_0^s \frac{dy}{\rho^2} \right] \rho h ds = 0, \quad V_x = \int_0^{s_1} \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} \left[\int_0^s \frac{dx}{\rho^2} \right] \rho h ds = 0 \\ M_\varphi &= G \Theta \int_0^{s_1} \frac{h^3}{6\rho} \left(1 + \frac{x-x_0}{\rho} \right)^2 ds + G \bar{\eta} \int_0^{s_1} \frac{h^3}{6\rho^2} \left(1 + \frac{x-x_0}{\rho} \right) ds + \\ &+ \int_0^{s_1} \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} \left[\int_0^s \frac{d\omega}{\rho^2} \right] \rho h ds = 0, \quad B_\varphi = - \int_0^{s_1} \sigma \left[\int_0^s \frac{d\omega}{\rho^2} \right] \rho h ds = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Выписанные формулы относятся к случаю стержня, имеющего свободные от внешних нагрузок торцы. Обобщение на случай иного нагружения концов не представляет затруднений, ибо введенные в формулах (4.4) величины M_ψ , M_x , M_y , V_x , V_y , M_φ и B_φ являются обобщенными силами, соответствующими перемещениям $\delta\psi$, $-\delta\eta_0$, $\delta\xi_0$, $\delta\eta_0$, $\delta\Theta$ и $-\delta\Theta$ (знаки выбраны для сохранения обычного правила знаков). Поэтому в общем случае к вариации функционала δW_s добавляются члены, соответствующие работе заданных внешних обобщенных сил на указанных перемещениях точки $A(x_0, y_0)$, т. е.

$$\delta W_s^* = - \{ (M_\psi \delta\psi + V_x \delta\xi_0 + V_y \delta\eta_0 - M_x \delta\eta_0 + M_y \delta\xi_0 + M_\varphi \delta\Theta - B_\varphi \delta\Theta) \}_{\varphi_0}^{\varphi_1}$$

Приравнивание нулю суммы вариаций $\delta W_s + \delta W_s^*$ позволяет получить любые «силовые» граничные условия.

Выведенные в предшествующем параграфе уравнения и полученные в настоящем параграфе граничные условия позволяют полностью решить задачу о деформациях тонкостенного криволинейного стержня, обладающего в поперечном сечении недеформируемым контуром.

Поступила в редакцию

10 VIII 1943.

G. J. DJANELIDZE. THE THEORY OF THIN-WALLED CURVILINEAR BARS HAVING AN UNCHANGEABLE CONTOUR OF THE CROSS-SECTION

The theory developed by V. Z. Vlasov^[1,2,3] for the rectilinear elastic thin-walled bars having unchangeable contour of cross-section in this paper is extended for the curvilinear bars.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. З. Новый метод расчета призматических балок из тонкостенных профилей на совместное действие осевой силы, изгиба и кручения. Вестник ВИА РККА. № 20. Проект и стандарт. 1936. № 8—9. Строительная промышленность. 1938. № 6 и 7.
2. Власов В. З. Кручение, устойчивость и колебание тонкостенных стержней. Прикладная математика и механика. 1939. Т. III. Вып. 1.
3. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. Монография. Госстройиздат. 1940. 275 стр.
4. Джанелидзе Г. Ю. Вариационная формулировка теории тонкостенных упругих стержней В. З. Власова. Прикладная математика и механика. 1943. Т. VII.
5. Лурье А. И. Общая теория упругих тонких оболочек. Прикладная математика и механика. 1940. Т. IV. Вып. 2.
6. Ляв. Математическая теория упругости. ГТТИ. 1935.
7. Вляшке В. Дифференциальная геометрия. ОНТИ. 1935. Ч. I.