

ПРИБЛИЖЕННАЯ ТЕОРИЯ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ОБОЛОЧКИ

А. А. ИЛЬЮШИН

(Москва)

1. Безмоментная теория

Рассмотрим напряженное и деформированное состояние осесимметричной тонкой оболочки, находящейся под действием внутреннего давления и осевой силы.

Срединной поверхностью оболочки будем называть поверхность, делящую всюду толщину стенки пополам (фиг. 1).

Примем следующие обозначения величин:

h — толщина стенки оболочки,

a — средний радиус в некотором сечении,

$R_1 = O'M$ и $R_2 = OM$ — главные радиусы кривизны срединной поверхности,

φ — угол между внешней нормалью и осью,

p — внутреннее давление в рассматриваемом сечении, приведенное к срединной поверхности,

Q — сжимающая сила в этом сечении и $q = \frac{Q}{2\pi ah}$,

σ_1^0 , σ_2^0 — продольное и тангенциальное напряжения.

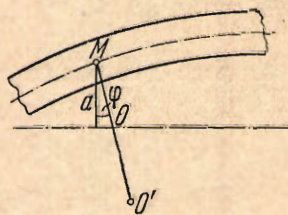
Мы предполагаем, что как нагрузки, так и геометрические характеристики оболочки изменяются вдоль оси плавно и без скачков. В таком случае можно, как известно из теории изгиба оболочек¹, пренебречь влиянием перерезывающих сил и изгибающих моментов и напряжения σ_1^0 , σ_2^0 считать постоянными по толщине.

Из известных уравнений равновесия

$$\frac{\sigma_1^0}{R_1} + \frac{\sigma_2^0}{R_2} = \frac{p}{h}, \quad \sigma_1^0 \sin \varphi = -q$$

находим возникающие в оболочке напряжения

$$\sigma_1^0 = -\frac{R_2}{a} q, \quad \sigma_2^0 = \frac{R_2}{h} p + \frac{R_2^2}{aR_1} q \quad (1.1)$$



Фиг. 1.

¹ См., например, Геккелер [4].

Третье главное напряжение σ_3^0 по абсолютной величине меньше p , и потому оно значительно меньше напряжений σ_1^0, σ_2^0 . Поэтому при подсчете интенсивности напряжений σ_i^0 им можно пренебречь¹. Таким образом

$$\begin{aligned} \sigma_i^0 &= \sqrt{\sigma_1^0{}^2 - \sigma_1^0\sigma_2^0 + \sigma_2^0{}^2} = \\ &= \sqrt{\frac{R_2^2}{h^2} p^2 + \frac{R_2^2}{ah} \left(1 + \frac{2R_2}{R_1}\right) pq + \frac{R_2^2}{a^2} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2^2}{R_1^2}\right) q^2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Из третьего основного закона

$$\sigma_i^0 = \Phi(\varepsilon_i^0)$$

находим интенсивность деформаций

$$\varepsilon_i^0 = \Phi^{-1}(\sigma_i^0) \quad (1.3)$$

Будем отсчитывать дугу s в сторону возрастания угла φ от какой-нибудь точки и обозначим перемещения точки M по нормали внутрь оболочки w и по дуге s через u . Тогда относительные удлинения вдоль меридиана и тангенциальное будут

$$\varepsilon_1^0 = \frac{du_0}{ds} - \frac{w_0}{R_1}, \quad \varepsilon_2^0 = \frac{u_0 \operatorname{ctg} \varphi}{R_2} - \frac{w_0}{R_2} \quad (1.4)$$

Воспользуемся теперь первым и вторым основными законами

$$\sigma_1^0 - \sigma^0 = \frac{2\sigma_2^0}{3\varepsilon_1^0}(\varepsilon_1^0 - \varepsilon^0), \quad \sigma_2^0 - \sigma^0 = \frac{2\sigma_1^0}{3\varepsilon_2^0}(\varepsilon_2^0 - \varepsilon^0), \quad \sigma^0 = \frac{1}{3}(\sigma_1^0 + \sigma_2^0) = 3k\varepsilon^0$$

Отсюда для величин деформаций получим

$$\varepsilon_1^0 = \frac{\varepsilon_2^0}{\sigma_2^0} \left(\sigma_1^0 - \frac{1}{2} \sigma_2^0 \right) + \frac{1}{9k} (\sigma_1^0 + \sigma_2^0), \quad \varepsilon_2^0 = \frac{\varepsilon_1^0}{\sigma_1^0} \left(\sigma_2^0 - \frac{1}{2} \sigma_1^0 \right) + \frac{1}{9k} (\sigma_1^0 + \sigma_2^0) \quad (1.5)$$

Перемещения u_0, w_0 оболочки получаются теперь путем интегрирования уравнений (1.4).

Так как $ds = R d\varphi$, то, исключая перемещение w , имеем

$$\frac{du_0}{d\varphi} - u_0 \operatorname{ctg} \varphi = R_1 \varepsilon_1^0 - R_2 \varepsilon_2^0$$

Отсюда для перемещения получаем

$$u_0 = \sin \varphi \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\varphi} \frac{R_1 \varepsilon_1^0 - R_2 \varepsilon_2^0}{\sin \varphi} d\varphi \quad (1.6)$$

и, следовательно,

$$w^0 = \cos \varphi \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\varphi} \frac{R_1 \varepsilon_1^0 - R_2 \varepsilon_2^0}{\sin \varphi} d\varphi - R_2 \varepsilon_2^0 \quad (1.7)$$

причем положено, что перемещение u_0 обращается в ноль в точке $\varphi = \frac{1}{2} \pi$.

На основании теоремы о разгрузении для нахождения остаточных деформаций оболочки после снятия нагрузки необходимо подсчитать деформации

¹ Далее мы пользуемся результатами нашей работы^[2].

которые она получала бы от действующих нагрузок в предположении справедливости закона Гука. В этом случае $\sigma_i^0 = 3G\varepsilon_i^0$ и формулы (1.5) дают

$$\varepsilon_{10}' = \frac{4}{3G} \left(\sigma_1^0 - \frac{1}{2} \sigma_2^0 \right) + \frac{4}{9k} (\sigma_1^0 + \sigma_2^0), \quad \varepsilon_{20}' = \frac{4}{3G} \left(\sigma_2^0 - \frac{1}{2} \sigma_1^0 \right) + \frac{4}{9k} (\sigma_1^0 + \sigma_2^0)$$

Заменяя в формулах (1.6), (1.7) величины $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0$ на $\varepsilon_{10}', \varepsilon_{20}'$ и вычитая получающиеся таким образом выражения u_0', w_0' из u_0, w_0 , получаем остаточные деформации

$$u_0^* = \sin \varphi \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \frac{3G\varepsilon_i^0 - \sigma_i^0}{3G\sigma_i^0 \sin \varphi} \left[\sigma_1^0 \left(R_1 + \frac{4}{2} R_2 \right) - \sigma_2^0 \left(R_2 + \frac{4}{2} R_1 \right) \right] d\varphi$$

$$w_0^* = \cos \varphi \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \frac{3G\varepsilon_i^0 - \sigma_i^0}{3G\sigma_i^0 \sin \varphi} \left[\sigma_1^0 \left(R_1 + \frac{4}{2} R_2 \right) - \sigma_2^0 \left(R_2 + \frac{4}{2} R_1 \right) \right] d\varphi -$$

$$- \frac{3G\varepsilon_i^0 - \sigma_i^0}{3G\sigma_i^0} R_2 \left(\sigma_2^0 - \frac{4}{2} \sigma_1^0 \right)$$
(1.8)

В частности, для цилиндрической оболочки остаточная радиальная деформация (расширение) будет ($R_1 = \infty, R_2 = a$)

$$w_0^* = - \frac{3G\varepsilon_i^0 - \sigma_i^0}{3G\sigma_i^0} \left(\frac{a}{h} p + \frac{4}{2} q \right) a$$
(1.9)

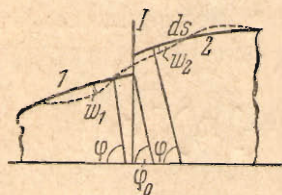
Таким образом вопрос о расчете осесимметричной оболочки по безмоментной теории решается просто и до конца как при упругих, так и пластических деформациях при произвольной характеристике материала $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$. Однако, как видно из формулы (1.7) и других, приведенное решение вопроса пригодно лишь для тех областей оболочки, где все механические и геометрические характеристики меняются плавно и непрерывно, и, наоборот, в областях, где геометрические размеры и механические данные задачи (нагрузки) меняются скачком, это решение приводит к разрывным результатам. Всегда в точках скачка нормальное перемещение w_0 будет претерпевать разрыв. Эти зоны оболочки требуют особого исследования, к которому мы переходим.

2. Расчет оболочки в зонах слабых разрывов

Будем называть зонами слабых разрывов окрестности тех сечений оболочки, где либо геометрические ее размеры (a, h, R_1), либо нагрузки (p, q), либо механические свойства материала, либо все эти данные одновременно меняют свои значения скачком, причем: а) если материал в этих зонах работает в пределах упругости (или немного выходит за пределы упругости), скачки величин могут быть соизмеримыми с величинами, б) если материал в этих зонах значительно выходит за пределы упругости, дополнительные напряжения и деформации будут меньше основных величин, получающихся из элементарного решения¹.

¹ Вопрос о сильных разрывах, при которых деформация значительно выходит за пределы упругости за счет скачкообразного изменения перерезывающих сил и других факторов, здесь не рассматривается

Пусть в сечении 1 (фиг. 2) имеется слабый разрыв, причем перемещение w_0 , деформации $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0$ и напряжения σ_1^0, σ_2^0 при переходе через это сечение изменяются скачкообразно. Зона слабого разрыва состоит из двух частей — в первой $\varphi < \varphi_0$, во второй $\varphi > \varphi_0$. Рассмотрим одну из этих частей и обозначим дополнительные перемещения, которые нужно добавить к u_0, w_0 , чтобы ликвидировать разрыв, через u, w . На основании (1.4) определяем деформации срединной поверхности



Фиг. 2.

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \varepsilon_1^0 + \Delta\varepsilon_1', & \Delta\varepsilon_1' &= \frac{du}{ds} - \frac{w}{R_1} \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_2^0 + \Delta\varepsilon_2', & \Delta\varepsilon_2' &= \frac{u \operatorname{ctg} \varphi - w}{R_2}\end{aligned}\quad (2.1)$$

Вследствие плавности изменения величин u_0, w_0 на каждом из участков зоны слабого разрыва искривления поверхности, характеризующие изгиб оболочки, будут получаться лишь за счет величин u, w , которые, напротив, в зоне разрыва изменяются очень сильно. Если обозначить угол поворота элемента ds за счет перемещений u, w через ϑ , то (см [1]).

$$\vartheta = \frac{dw}{ds} + \frac{u}{R_1}\quad (2.2)$$

и искривления оболочки, т. е. изменения главных ее кривизн (меридианальной и тангенциальной), вследствие перемещений u, w будут

$$\kappa_1 = \frac{d\vartheta}{ds}, \quad \kappa_2 = \frac{\vartheta \operatorname{ctg} \varphi}{R_2}\quad (2.3)$$

Волокна, расположенные на расстоянии z (внутри оболочки $z > 0$) от срединной поверхности, за счет искривлений κ_1, κ_2 [получат еще дополнительные деформации $-z\kappa_1, -z\kappa_2$, так что общая деформация этих волокон будет

$$\begin{aligned}\varepsilon_{1z} &= \varepsilon_1^0 + \Delta\varepsilon_1, & \Delta\varepsilon_1 &= \Delta\varepsilon_1' - z\kappa_1 \\ \varepsilon_{2z} &= \varepsilon_2^0 + \Delta\varepsilon_2, & \Delta\varepsilon_2 &= \Delta\varepsilon_2' - z\kappa_2\end{aligned}\quad (2.4)$$

Пользуясь попережно условием $\sigma_3 \ll \sigma_1, \sigma_2$ и соотношением $\varepsilon_{1z} + \varepsilon_{2z} + \varepsilon_{3z} \approx 0$, можно найти выражения интенсивностей деформаций и напряжений:

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= \varepsilon_i^0 + \Delta\varepsilon_i, & \Delta\varepsilon_i &= \frac{\partial \varepsilon_i^0}{\partial \varepsilon_1^0} \Delta\varepsilon_1 + \frac{\partial \varepsilon_i^0}{\partial \varepsilon_2^0} \Delta\varepsilon_2 + \dots \\ \sigma_i &= \Phi(\varepsilon_i) = \sigma_i^0 + \Delta\sigma_i, & \Delta\sigma_i &= \frac{d\sigma_i^0}{d\varepsilon_i^0} \Delta\varepsilon_i + \dots\end{aligned}\quad (2.5)$$

причем

$$\varepsilon_i^0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_1^0{}^2 + \varepsilon_1^0 \varepsilon_2^0 + \varepsilon_2^0{}^2}$$

и на основании (1.5)

$$\frac{\partial \varepsilon_i^0}{\partial \varepsilon_1^0} = \frac{\sigma_1^0}{\sigma_i^0}, \quad \frac{\partial \varepsilon_i^0}{\partial \varepsilon_2^0} = \frac{\sigma_2^0}{\sigma_i^0}\quad (2.6)$$

Для напряжений при принятых условиях на основании (1.6), (2.5) имеем выражения

$$\sigma_1 - \frac{1}{2} \sigma_2 = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \varepsilon_{1z}, \quad \sigma_2 - \frac{1}{2} \sigma_1 = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \varepsilon_{2z}$$

Откуда

$$\sigma_1 = \frac{4}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \left(\varepsilon_{1z} + \frac{1}{2} \varepsilon_{2z} \right), \quad \sigma_2 = \frac{4}{3} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \left(\varepsilon_{2z} + \frac{1}{2} \varepsilon_{1z} \right) \quad (2.7)$$

Вводя обозначение

$$E' = \frac{\sigma_i^0}{\varepsilon_i^0} - \frac{d\sigma_i^0}{d\varepsilon_i^0} \quad (2.8)$$

и разлагая выражение σ_i/ε_i в ряд, получим

$$\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} = \frac{\sigma_i^0}{\varepsilon_i^0} \left(1 - E' \frac{\Delta\varepsilon_i}{\sigma_i^0} \right)$$

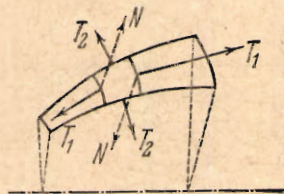
Принимая во внимание выражения (2.7), (2.5), (2.6), находим с принятой степенью точности

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_1^0 + A\Delta\varepsilon_1 + B\Delta\varepsilon_2 = \sigma_1^0 + A\Delta\varepsilon_1' + B\Delta\varepsilon_2' - Z(Ax_1 + Bx_2) \\ \sigma_2 &= \sigma_2^0 + B\Delta\varepsilon_1 + C\Delta\varepsilon_2 = \sigma_2^0 + B\Delta\varepsilon_1' + C\Delta\varepsilon_2' - Z(Bx_1 + Cx_2) \end{aligned} \quad (2.9)$$

где основные параметры A, B, C , имеющие размерность напряжения и величины порядка модуля E' , таковы:

$$A = \frac{4}{3} \frac{\sigma_i^0}{\varepsilon_i^0} - E' \left(\frac{\sigma_i^0}{\varepsilon_i^0} \right)^2, \quad B = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i^0}{\varepsilon_i^0} - E' \frac{\sigma_1^0 \sigma_2^0}{\sigma_i^{02}}, \quad C = \frac{4}{3} \frac{\sigma_i^0}{\varepsilon_i^0} - E' \left(\frac{\sigma_2^0}{\sigma_i^0} \right)^2 \quad (2.10)$$

Обратим внимание на то, что для упругой деформации $\sigma_i^0 = 3C\varepsilon_i^0$ и потому $E' = 0$ и, вообще говоря, приближенные формулы (2.9) становятся в этом случае совершенно точными.



Фиг. 3.

На основании полученных формул можно подсчитать результирующие силы и моменты, действующие на элемент оболочки (фиг. 3):

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} \sigma_1 dz = T_1^0 + h(A\Delta\varepsilon_1' + B\Delta\varepsilon_2'), & M_1 &= \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} \sigma_1 z dz = -\frac{h^3}{12}(Ax_1 + Bx_2) \\ T_2 &= \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} \sigma_2 dz = T_2^0 + h(B\Delta\varepsilon_1' + C\Delta\varepsilon_2'), & M_2 &= \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} \sigma_2 z dz = -\frac{h^3}{12}(Bx_1 + Cx_2) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Ссылаясь опять на книгу Геккелера, приводим без вывода дифференциальные уравнения равновесия элемента оболочки:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} (T_1 R_2 \sin \varphi) - T_2 R_1 \cos \varphi - N R_2 \sin \varphi + p_s R_1 R_2 \sin \varphi &= 0 \\ \frac{d}{d\varphi} (N R_2 \sin \varphi) + T_1 R_2 \sin \varphi + T_2 R_1 \sin \varphi - p R_1 R_2 \sin \varphi &= 0 \\ \frac{d}{d\varphi} (M_1 R_2 \sin \varphi) - M_2 R_1 \cos \varphi - N R_1 R_2 \sin \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

где p_s — сила, приходящаяся на единицу площади срединной поверхности, действующая вдоль дуги s , p — внутреннее давление. Эти силы имеют то же значе-

ние, что и в элементарной теории, и потому, внося (2.11) в (2.12) и учитывая уравнения равновесия элементарного решения (1.2), которые могут быть приведены к виду

$$\frac{d}{d\varphi} (T_1^0 R_2 \sin \varphi) - T_2^0 R_1 \cos \varphi + p_s R_1 R_2 \sin \varphi = 0$$

$$T_1^0 R_2 \sin \varphi + T_2^0 R_1 \sin \varphi - p R_1 R_2 \sin \varphi = 0$$

мы получим дифференциальные уравнения

$$h \frac{d}{d\varphi} [(A\Delta\varepsilon_1' + B\Delta\varepsilon_2') R_2 \sin \varphi] - h (B\Delta\varepsilon_1' + C\Delta\varepsilon_2') R_1 \cos \varphi - N R_2 \sin \varphi = 0$$

$$\frac{d}{d\varphi} (N R_2 \sin \varphi) + h [(A\Delta\varepsilon_1' + B\Delta\varepsilon_2') R_2 \sin \varphi + (B\Delta\varepsilon_1' + C\Delta\varepsilon_2') R_1 \sin \varphi] = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{d}{d\varphi} (M_1 R_2 \sin \varphi) - M_2 R_1 \cos \varphi - N R_1 R_2 \sin \varphi = 0$$

Если учесть, что величины $\Delta\varepsilon_1'$, $\Delta\varepsilon_2'$, M_1 , M_2 выражены уже через два перемещения u , w , мы имеем три уравнения с тремя функциями u , w , N . Переходим к упрощению этих уравнений. Учитывая, что нас интересует их решение в узких зонах, примыкающих к сечению скачка, и имея в виду значительное изменение величин u , w , N по сравнению с малым изменением величин R_1 , R_2 , φ в зоне разрыва, мы делаем предположения, которые впоследствии без труда докажем:

(а) величина производной $du/d\varphi$ имеет порядок перемещения w , т. е.

$$\frac{du}{d\varphi} = 0 \quad (w) \quad (2.14)$$

(б) каждая следующая производная по φ от перемещения w значительно больше предшествующей производной, т. е.

$$\left| \frac{dw}{d\varphi} \right| \gg w, \quad \left| \frac{d^2 w}{d\varphi^2} \right| \gg \left| \frac{dw}{d\varphi} \right|, \quad \left| \frac{d^3 w}{d\varphi^3} \right| \gg \left| \frac{d^2 w}{d\varphi^2} \right|, \dots \quad (2.15)$$

В таком случае, отбрасывая малые высших порядков, находим из (2.1), (2.2) и т. д.

$$\vartheta = \frac{dw}{R_1 d\varphi}; \quad x_1 = \frac{d^2 w}{R_1^2 d\varphi^2}, \quad x_2 = 0; \quad \Delta\varepsilon_1' = \frac{du}{ds} - \frac{w}{R_1}, \quad \Delta\varepsilon_2' = -\frac{w}{R_2} \quad (2.16)$$

На основании второго уравнения (2.13) заключаем, что

$$\frac{dN}{d\varphi} = O[h(B\Delta\varepsilon_1' + C\Delta\varepsilon_2')], \quad \text{причем } |N| \ll \left| \frac{dN}{d\varphi} \right|$$

следовательно, в первом уравнении два последних слагаемых как, малые высшего порядка, должны быть отброшены, и мы получим

$$\frac{d}{d\varphi} \left[(A\Delta\varepsilon_1' + B\Delta\varepsilon_2') R_2 \sin \varphi \right] \approx R_2 \sin \varphi \frac{d}{d\varphi} (A\Delta\varepsilon_1' + B\Delta\varepsilon_2') = 0$$

Отсюда

$$A\Delta\varepsilon_1' + B\Delta\varepsilon_2' = \text{const.}$$

Так как сила T_1 согласно (2.11) на границе зоны разрыва должна принимать значение T_1^0 , то $\text{const} = 0$ и, следовательно,

$$\Delta\varepsilon_1' = -\frac{B}{A} \Delta\varepsilon_2' = \frac{B}{A} \frac{w}{R_2}, \quad A \frac{du}{R_1 d\varphi} = \left(\frac{A}{R_1} + \frac{B}{R_2} \right) w \quad (2.17)$$

Здесь попутно доказано предположение (а), т. е. что $du/d\varphi = 0 \quad (w)$.

Из второго уравнения (2.13) имеем

$$\frac{dN}{d\varphi} + \frac{hR_1}{R_2} (B\Delta\varepsilon_1' + C\Delta\varepsilon_2') = 0 \quad (2.18)$$

Из третьего уравнения (2.13), имея в виду, что $|dM_1/d\varphi| \gg |M_2|$, получаем

$$N = \frac{1}{R_1} \frac{dM_1}{d\varphi} \quad (2.19)$$

Формулы (2.11) преобразуются теперь к виду

$$T_1 = T_1^0, \quad M_1 = -\frac{Ah^3}{12R_1^2} \frac{d^3w}{d\varphi^2} \quad (2.20)$$

$$T_2 = T_2^0 - \frac{AC - B^2}{A} \frac{h}{R_2} w, \quad M_2 = -\frac{Bh^3}{12R_1^2} \frac{d^3w}{d\varphi^2}$$

Для напряжений σ_1 и σ_2 из (2.9) имеем

$$\sigma_1 = \sigma_1^0 - \frac{Az}{R_1^2} \frac{d^3w}{d\varphi^2}, \quad \sigma_2 = \sigma_2^0 - \frac{Bz}{B_1^2} \frac{d^3w}{d\varphi^2} - \frac{AC - B^2}{A} \frac{w}{R_2} \quad (2.21)$$

Соотношения (2.17), (2.18), (2.19) приводят к дифференциальным уравнениям

$$N = -\frac{Ah^3}{12R_1^2} \frac{d^3w}{d\varphi^2}, \quad \frac{d^4w}{d\varphi^4} + 4\lambda^4 w = 0 \quad (2.22)$$

Здесь λ — основной параметр, характеризующий степень быстроты затухания перемещений w , по мере удаления от места скачка:

$$\lambda = \frac{R_1 \sqrt[4]{3}}{\sqrt{R_2 h}} \sqrt[4]{\frac{AC - B^2}{A^2}}$$

Принимая во внимание выражения (2.10) и вводя обозначение

$$\delta = \frac{E'\varepsilon_i^0}{\sigma_i^0} \quad (2.23)$$

преобразуем величину

$$\sqrt[4]{3 \frac{AC - B^2}{A^2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt[4]{1 - \delta}}{\sqrt{1 - \frac{3}{4} \left(\frac{\sigma_1^0}{\sigma_i^0}\right)^2 \delta}}$$

и получим окончательно

$$\lambda = \frac{R_1 \sqrt{3}}{\sqrt{2R_2 h}} \frac{\sqrt[4]{1 - \delta}}{\sqrt{1 - \frac{3}{4} \left(\frac{\sigma_1^0}{\sigma_i^0}\right)^2 \delta}} \quad (2.24)$$

Так как для упругой деформации $E' = 0$, $\delta = 0$, то формулы (2.22), (2.24) совпадают с основными уравнениями теории упругого «краевого эффекта» Геккелера.

Теперь также можно считать доказанной правильность высказанного выше предположения (б), поскольку λ — большое число ($\lambda \gg 1$) и поскольку каждая следующая производная от w и u в λ раз больше предыдущей.

Попутно укажем на одно заблуждение Геккелера, высказанное в его теории «краевого эффекта». Он считает, что уравнение

$$\frac{d^4w}{d\varphi^4} + 4\lambda^4 w = 0$$

можно интегрировать, считая λ постоянным лишь в том случае, если оно действительно постоянно, т. е. если размеры оболочки удовлетворяют условию

$$\frac{R_1}{\sqrt{R_2 h}} = \text{const}$$

Однако вся теория «краевого эффекта» основана на том, что изменение величины ω в зоне края значительно больше, чем изменение величин R_1 , h , R_2 , φ , и потому при дифференцировании функций вида $\omega R_2 \sin \varphi$, $M_1 R_2 \sin \varphi$ имеют место равенства типа

$$\frac{d}{d\varphi} (\omega R_2 \sin \varphi) \approx \frac{d\omega}{d\varphi} R_2 \sin \varphi$$

т. е. при дифференцировании множители $R_2 \sin \varphi$ и т. п. считаются как бы постоянными. Но тогда, не уменьшая точности расчета и при интегрировании, их можно считать как бы постоянными, и потому условие

$$\frac{R_1}{\sqrt{hR_2}} = \text{const}$$

совершенно не обязательно, достаточно того, что эта величина изменяется во много раз меньше, чем перемещение ω .

Обратимся теперь вновь к фиг. 2. Пусть перемещение ω для первой части зоны

$$\omega = \varphi - \varphi_0 < 0$$

по элементарному решению будет ω_{10} (для $\omega = 0$), а для второй части зоны

$$\omega = \varphi - \varphi_0 > 0$$

в точке $\omega = 0$ будет ω_{20} .

Обозначим скачок величины ω_0 через

$$\Delta\omega^0 = \omega_{20} - \omega_{10} \quad (2.25)$$

Уравнение (2.22) имеет частное решение

$$\omega = \Delta\omega^0 (\alpha \cos \lambda\omega + \beta \sin \lambda\omega) e^{\pm\lambda\omega} \quad (2.26)$$

причем для $\omega < 0$ нужно взять знак плюс, для $\omega > 0$ знак минус и произвольные постоянные α , β и λ имеют на обоих участках различные значения. По определению зоны слабого разрыва перемещение ω должно ликвидировать скачок $\Delta\omega^0$, причем его первая производная, изгибающий момент M_1 и перерезывающая сила N должны быть непрерывны при переходе через сечение (I).

Имеем формулы

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta\omega_0} \frac{d\omega}{d\varphi} &= \lambda [(-\alpha \pm \beta) \sin \lambda\omega + (\beta \pm \alpha) \cos \lambda\omega] e^{\pm\lambda\omega} \\ \frac{1}{\Delta\omega_0} \frac{d^2\omega}{d\varphi^2} &= \pm 2\lambda^2 (\beta \cos \lambda\omega - \alpha \sin \lambda\omega) e^{\pm\lambda\omega} \\ \frac{1}{\Delta\omega_0} \frac{d^3\omega}{d\varphi^3} &= \pm 2\lambda^3 [(\alpha \pm \beta) \cos \lambda\omega + (\beta \pm \alpha) \sin \lambda\omega] e^{\pm\lambda\omega} \end{aligned} \quad (2.27)$$

В них верхний знак относится к первому участку ($\omega < 0$), нижний — ко второму ($\omega > 0$). Приписывая дополнительный индекс 1 внизу величины R_1, R_2, h, A и т. д. на первом участке ($\omega = -0$) и индекс 2 внизу этим же величинам на втором участке ($\omega = +0$) и принимая во внимание выражения момента (2.20) и перерезывающей силы (2.19), условия сопряжения участков в точке $\omega = 0$ представим в виде

$$\begin{aligned} \alpha_2 - \alpha_1 &= -1, & \frac{\lambda_1}{R_{11}} (\alpha_1 + \beta_1) + \frac{\lambda_2}{R_{12}} (\alpha_2 - \beta_2) &= 0 \\ \beta_2 \left(\lambda^2 \frac{Ah^3}{42R_1^2} \right)_2 + \beta_1 \left(\lambda^2 \frac{Ah^3}{42R_1^2} \right)_1 &= 0 \\ (\alpha_1 - \beta_1) \left(\lambda^3 \frac{Ah^3}{42R_1^3} \right)_1 + (\alpha_2 + \beta_2) \left(\lambda^3 \frac{Ah^3}{42R_1^3} \right)_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Вводя обозначения для известных величин

$$\rho_1 = \frac{\lambda_2 R_{11}}{\lambda_1 R_{12}} = \sqrt{\frac{h_1 R_{21}}{h_2 R_{22}}} \sqrt{\frac{1-\delta_2}{1-\delta_1}} \sqrt{\frac{1-\frac{3}{4} \left(\frac{\sigma_1^0}{\sigma_2^0}\right)_1^2 \delta_1}{1-\frac{3}{4} \left(\frac{\sigma_1^0}{\sigma_2^0}\right)_2^2 \delta_2}}$$

$$\rho_2 = \frac{1}{\rho_1^2} \frac{A_1 h_1^3}{A_2 h_2^3}, \quad \rho_3 = \frac{1}{\rho_1^3} \frac{A_1 h_1^3}{A_2 h_2^3}, \quad \rho_2 = \rho_1 \rho_3 \quad (2.29)$$

и решая систему уравнений (2.28), находим

$$\alpha_1 = \frac{1 + 2\rho_1 \rho_2 + \rho_2}{1 + 2\rho_2 + 2(1 + \rho_1) \rho_2 + \rho_2^2}, \quad \alpha_2 = \alpha_1 - 1$$

$$\beta_1 = \frac{-1 + \rho_2}{1 + 2\rho_2 + 2(1 + \rho_1) \rho_2 + \rho_2^2}, \quad \beta_2 = -\rho_2 \beta_1 \quad (2.30)$$

Теперь окончательно находим перемещения.

Для первой части зоны разрыва ($\omega < 0$)

$$w_1' = w_{10} + w_1, \quad w_1 = \Delta_1 w^0 (\alpha_1 \cos \lambda_1 \omega + \beta_1 \sin \lambda_1 \omega) e^{\lambda_1 \omega} \quad (2.31)$$

Максимум этого перемещения получается в точке, где

$$\operatorname{tg} \lambda_1 \omega = -\frac{\alpha_1 + \beta_1}{\alpha_2 - \beta_1} \quad (2.32)$$

Напряжения для $\omega < 0$ на основании (2.21) на наружной и внутренней поверхностях будут

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^0 \pm \lambda_1^2 \frac{A_1 h_1}{R_{11}^2} \Delta w^0 (\beta_1 \cos \lambda_1 \omega - \alpha_1 \sin \lambda_1 \omega) e^{\lambda_1 \omega}$$

$$\sigma_{21} = \sigma_{21}^0 + \lambda_1^2 \frac{A_2 h_2}{R_{11}^2} \Delta w^0 \left[\left(\pm \frac{B_1}{A_1} \beta_1 - \frac{1}{2} \alpha_1 \right) \cos \lambda_1 \omega - \right. \\ \left. - \left(\pm \frac{B_1}{A_1} \alpha_1 + \frac{1}{2} \beta_1 \right) \sin \lambda_1 \omega \right] e^{\lambda_1 \omega} \quad (2.33)$$

Для второй части зоны разрыва ($\omega > 0$)

$$w_2' = w_{20} + w_2, \quad w_2 = \Delta w_0 (\alpha_2 \cos \lambda_2 \omega + \beta_2 \sin \lambda_2 \omega) e^{-\lambda_2 \omega} \quad (2.34)$$

причем максимум будет в точке, где

$$\operatorname{tg} \lambda_2 \omega = \frac{\beta_2 - \alpha_2}{\beta_2 + \alpha_2} \quad (2.35)$$

Напряжения для $\omega > 0$ на наружной и внутренней поверхностях будут

$$\sigma_{12} = \sigma_{12}^0 \pm \lambda_2^2 \frac{A_1 h_1}{R_{12}^2} \Delta w^0 (\beta_2 \cos \lambda_2 \omega - \alpha_2 \sin \lambda_2 \omega) e^{-\lambda_2 \omega}$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{22}^0 - \lambda_2^2 \frac{A_2 h_2}{R_{12}^2} \Delta w^0 \left[\left(\pm \frac{B_2}{A_2} \beta_2 + \frac{1}{2} \alpha_2 \right) \cos \lambda_2 \omega - \right. \\ \left. - \left(\pm \frac{B_2}{A_2} \alpha_2 - \frac{1}{2} \beta_2 \right) \sin \lambda_2 \omega \right] e^{-\lambda_2 \omega} \quad (2.36)$$

В формулах (2.33) и (2.36) верхний знак берется для напряжений на наружной поверхности оболочек ($z = -\frac{1}{2}h$), нижний для внутренней поверхности ($z = +\frac{1}{2}h$). Напряжения в срединной поверхности получаются из этих формул, если отбросить двучленные члены.

Вопрос об остаточных деформациях оболочки после разгрузки решается применением теоремы о разгрузке. По формулам (2.31) и (2.34) находятся

перемещения, которые получила бы оболочка при условии справедливости закона Гука, т. е. полагают в них

$$\sigma_i^0 = 3G\varepsilon_i^0, \quad E_1' = E_2' = \delta_1 = \delta_2 = 0, \quad A_1 = A_2 = C_1 = C_2 = 2B_1 = 2B_2 = 4G$$

Тогда эти формулы дают «упругие перемещения»

$$(w_1')_e = (w_{10})_e + w_{1e}, \quad (w_2')_e = (w_{20})_e + w_{2e}$$

Остаточные прогибы оболочки получаются в результате вычитания этих величин из общих перемещений w_1' , w_2' , вычисляемых по формулам (2.31) и (2.34).

Замечание. Все выведенные формулы остаются справедливыми и для оболочек, имеющих прямолинейные образующие. В этом случае $R_1 \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow 0$, причем

$$R_1 \omega = x,$$

где $x = s - s_0$ — дуга, отсчитываемая от сечения I (фиг. 2). При подсчетах, например, получается

$$\lambda \omega = \frac{x \sqrt{3}}{\sqrt{2R_2 h}} \frac{\sqrt[4]{1-\delta}}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}(\sigma_1^0 / \sigma_i^0)^2 \delta}}$$

Поступила в редакцию
4.1.1944

Институт механики
Академии Наук СССР

A. A. ILLIUSHIN. APPROXIMATE THEORY OF THE ELASTICO-PLASTIC DEFORMATION OF SHELLS WITH THE AXIAL SYMMETRY

Using the results of his previous work [2] the author extends Hekeler's theory of the elastic deformation of shells with axial symmetry to the case of plastic deformations. To the zones of shells where the geometric forms and loads vary fluently is applied the momentless theory; formulae (1.1) — (1.8) in the Russian text gives the expressions for the stresses, deformations and displacements due to loading as well as for the residual ones after unloading.

The cross-sections where the form of shells and the loads vary by leaps but the moments and shearing forces remain continuous, the author calls zones of weak discontinuity. Employing the equations of plasticity for these zones a generalization of „boundary effect“ of Hekeler's theory is given. The differential equation for the bending displacements of shells and for the stresses in the zones of the weak discontinuity are expressed in form (27) — (30) correspondingly. Further it is shown that the boundary effect in the case of plastic deformations damps quickly as in case of the elastic ones. At the end of the paper all necessary formulae for calculation are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. Геккелер И. В. Статика упругого тела. 1934.
2. Ильющин А. А. Некоторые вопросы теории пластических деформаций. Прикладная математика и механика. 1943. Т. VII. Вып. 4, стр. 245;