

К АЭРОДИНАМИЧЕСКОМУ РАСЧЕТУ КРЫЛА КОНЕЧНОГО РАЗМАХА

Г. И. МАЙКАПАР

(Москва)

Приводим принятые обозначения.

l — размах крыла;

$b(\bar{z}) = \bar{b} 2l$ — хорда крыла;

$z = \frac{l}{2} \bar{z} = -\frac{l}{2} \cos \theta$ — расстояние от

плоскости симметрии крыла;

$\alpha(\bar{z})$ — угол атаки элемента крыла;

$\lambda = \frac{l^2}{S}$ — удлинение крыла;

$\eta = \frac{b(0)}{b(il)}$ — сужение крыла;

V — скорость основного потока;

$\Gamma(\bar{z}) = 2lV\bar{\Gamma}$ — циркуляция скорости;

$w(\bar{z})$ — составляющая индуктивной скорости, нормальная к скорости основного потока;

$C_y(\alpha)$ — коэффициент подъемной силы профиля;

$\Delta\alpha(\bar{z}) = -\frac{w(\bar{z})}{V}$ — индуктивный скос;

$a = \left(\frac{dC_y}{d\alpha} \right)_{\lambda=\infty}$

1. Почти все известные методы аэродинамического расчета крыла конечного размаха основаны на решении интегродифференциального уравнения Прандтля

$$2\Gamma(z) = C_y \left[\alpha(z) + \frac{1}{4\pi V} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{d\Gamma(z')}{z' - z} \right] b(z) V \quad (1)$$

с помощью представления искомой циркуляции $\Gamma(z)$ в виде какого-либо интерполяционного полинома. Расчет сводится к определению коэффициентов полинома из системы уравнений с многими неизвестными. Такие методы расчета весьма эффективны при линейной зависимости коэффициента подъемной силы профиля от угла атаки и при плавном изменении по размаху входящих в уравнение (1) величин.

В случаях же нелинейной зависимости $C_y(\alpha)$, — срыв потока, волновой «кризис», или резкого изменения входящих в уравнение (1) величин, — влияние фюзеляжа, обдувка винтом, — применение большинства известных методов расчета практически невозможно, так как оно сопряжено с большими затратами труда. В таких случаях наиболее целесообразен метод последовательных приближений. Все обычные методы последовательных приближений в приложении к уравнению (1) расходятся, поэтому необходимо изменить форму основного уравнения (1).

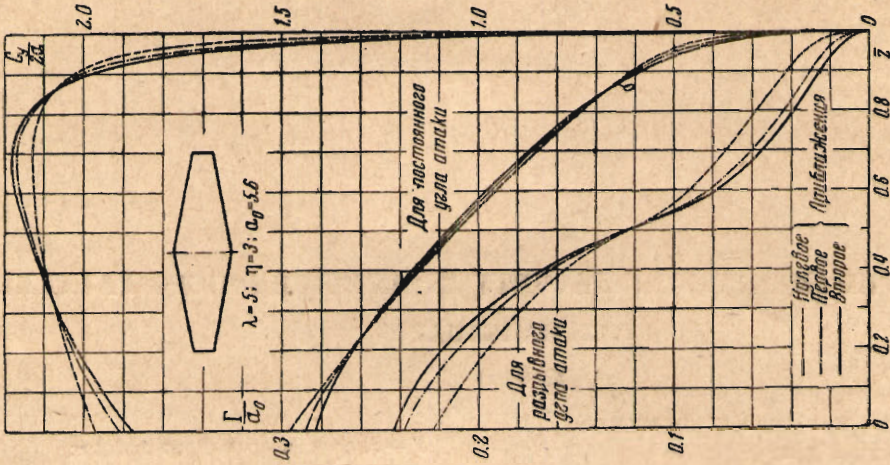
2. Желательное изменение формы уравнения (1) получается при подстановке в уравнение связи

$$2\Gamma = C_y(\alpha - \Delta\alpha) bV \quad (2)$$

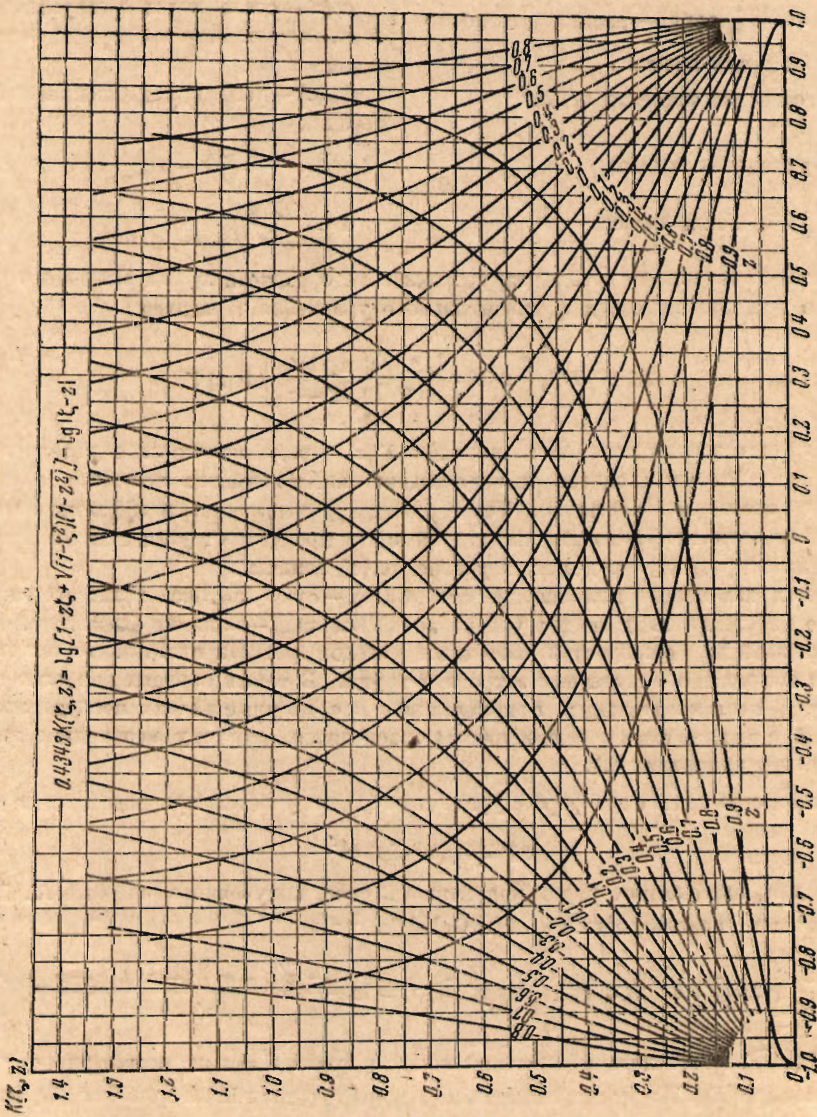
выражения для циркуляции через индуктивный скос, полученного впервые А. Betz [1] и впоследствии использованного Н. Gebelein [2]:

$$\bar{\Gamma}(\bar{z}) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \Delta\alpha(\bar{z}') K(\bar{z}', \bar{z}) d\bar{z}', \quad K(\bar{z}', \bar{z}) = \ln \frac{1 - \bar{z}'\bar{z} + \sqrt{(1 - \bar{z}'^2)(1 - \bar{z}^2)}}{|\bar{z}' - \bar{z}|} \quad (3)$$

Ядро $K(\bar{z}', \bar{z})$ имеет логарифмический полюс в точке $\bar{z}' = \bar{z}$ и симметрично относительно \bar{z}' и \bar{z} . Для $K(\bar{z}', \bar{z})$ составлены табл. 1 и приводятся графики на фиг. 1 (стр. 464).



Фиг. 2



Фиг. 4

Таблица 1

$$K(\bar{z}', \bar{z}) = \ln \left[1 - \bar{z}'\bar{z} + \sqrt{(1 - \bar{z}'^2)(1 - \bar{z}^2)} \right] - \ln |\bar{z}' - \bar{z}|$$

$\bar{z} \backslash \bar{z}'$	-1.0	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0
1	0										
0.9	0	0.106									
0.8	0	0.154	0.223								
0.7	0	0.193	0.283	0.357							
0.6	0	0.230	0.336	0.426	0.512						
0.5	0	0.267	0.394	0.495	0.594	0.693					
0.4	0	0.302	0.444	0.564	0.680	0.797	0.916				
0.3	0	0.341	0.500	0.638	0.769	0.905	1.047	1.205			
0.2	0	0.380	0.560	0.716	0.868	1.024	1.193	1.383	1.610		
0.1	0	0.422	0.622	0.801	0.977	1.158	1.360	1.598	1.894	2.302	
0.0	0	0.468	0.693	0.896	1.097	1.316	1.565	1.873	2.292	2.992	
-0.1	0	0.518	0.774	1.005	1.245	1.510	1.830	2.260	2.974		
-0.2	0	0.578	0.868	1.137	1.424	1.764	2.208	2.932			
-0.3	0	0.647	0.981	1.302	1.661	2.127	2.867				
-0.4	0	0.733	1.124	1.521	2.010	2.768					
-0.5	0	0.841	1.316	1.846	2.635						
-0.6	0	1.011	1.609	2.442							
-0.7	0	1.224	2.161								
-0.8	0	1.690									
-0.9	0										
-1.0	0										

3. При линейной зависимости $C_y(z) = az$ из уравнений (2), (3) для вычисления циркуляции получается интегральное уравнение

$$\bar{\Gamma}(\bar{z}) = \frac{1}{\Psi(\bar{z})} \left\{ \Phi(\bar{z}) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} [\alpha(\bar{z}') - \alpha(\bar{z})] K d\bar{z}' - \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \left[\frac{\bar{\Gamma}(\bar{z}')}{a(\bar{z}')\bar{b}(\bar{z}')} - \frac{\bar{\Gamma}(\bar{z})}{a(\bar{z})\bar{b}(\bar{z})} \right] K d\bar{z}' \right\} \tag{4}$$

где введены обозначения

$$\Phi(\bar{z}) = a\sqrt{1 - \bar{z}^2}, \quad \Psi(\bar{z}) = 1 + \frac{2\sqrt{1 - \bar{z}^2}}{a(\bar{z})\bar{b}(\bar{z})}$$

Уравнение (4) решается методом последовательных приближений, в нулевом приближении полагаем второй интеграл в правой части уравнения (4) равным нулю, а в $(n+1)$ -ом приближении

$$\bar{\Gamma}_{n+1}(\bar{z}) = \frac{1}{\Psi(\bar{z})} \left\{ \Phi(\bar{z}) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} [\alpha(\bar{z}') - \alpha(\bar{z})] K d\bar{z}' - \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \left[\frac{\bar{\Gamma}_n(\bar{z}')}{a(\bar{z}')\bar{b}(\bar{z}')} - \frac{\bar{\Gamma}_n(\bar{z})}{a(\bar{z})\bar{b}(\bar{z})} \right] K d\bar{z}' \right\} \tag{5}$$

Процесс приближений сходится быстро, обычно достаточно первого приближения.

В качестве примеров на фиг. 2 приведены результаты расчета для трапецевидного крыла $\lambda = 5$, $\eta = 3$ для постоянного по размаху угла атаки и для разрывного угла атаки

$$x = \begin{cases} x_0 & |\bar{z}| \leq 0.5 \\ 0 & |\bar{z}| > 0.5 \end{cases}$$

4. При нелинейной зависимости $C_y(z)$ из (2), (3) для определения $C_y(\bar{z})$ имеем

$$C_y[\alpha(\bar{z}) - \Delta\alpha(\bar{z})] = \frac{2\sqrt{1 - \bar{z}^2}}{\bar{b}(\bar{z})} \Delta\alpha(\bar{z}) + \frac{2}{\pi\bar{b}(\bar{z})} \int_{-1}^{+1} [\Delta\alpha(\bar{z}') - \Delta\alpha(\bar{z})] K d\bar{z}' \tag{6}$$

В нулевом приближении полагаем интеграл в уравнении (6) равным нулю, а в $n+1$ -ом

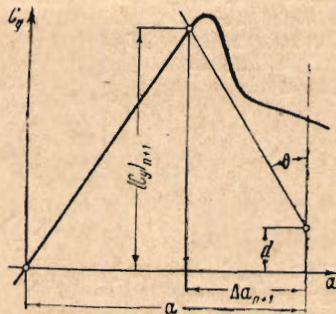
$$C_y[\bar{z}] - \Delta\alpha_{n+1}(\bar{z}) = \frac{2\sqrt{1-\bar{z}^2}}{b(\bar{z})} \Delta\alpha_{n+1}(\bar{z}) + \frac{2}{\pi b(\bar{z})} \int_{-1}^{+1} (\Delta z_n(\bar{z}') - \Delta z_n(\bar{z})) K d\bar{z}' \quad (7)$$

Так как $C_y(z)$ задается графически, то и уравнение (7) решаем графически (фиг. 8). В приведенном на фиг. 3 решении

$$\theta = \arctg \frac{2\sqrt{1-\bar{z}^2}}{b(\bar{z})}$$

$$d = \frac{2}{\pi b(\bar{z})} \int_{-1}^{+1} [\Delta z_n(\bar{z}') - \Delta z_n(\bar{z})] K dz'$$

Процесс приближений сходится достаточно быстро, обычно достаточно второго или



Фиг. 3

третьего приближения. В качестве иллюстраций на фиг. 4 и 5 приведены результаты расчета для трапецевидного крыла $\lambda=5$, $\eta=4$. На фиг. 4 кружками показаны значения $(C_y(\bar{z}))_n$.

5. Если подинтегральная функция $\varphi(\bar{z}')$ имеет конечные разрывы в точках $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots$, то для вычисления интеграла

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(\bar{z}') K d\bar{z}'$$

удобно представить $\varphi(\bar{z}')$ в виде суммы непрерывной функции и интегрируемой аналитически разрывной. Путем добавления и вычитания из $\varphi(\bar{z}')$ функции

$$f(\bar{z}') = \begin{cases} [\varphi] & -\bar{z}_1 \leq \bar{z}' \leq \bar{z}_1 \\ 0 & |\bar{z}'| > \bar{z}_1 \end{cases} \quad (8)$$

устраняется разрыв $[\varphi]$

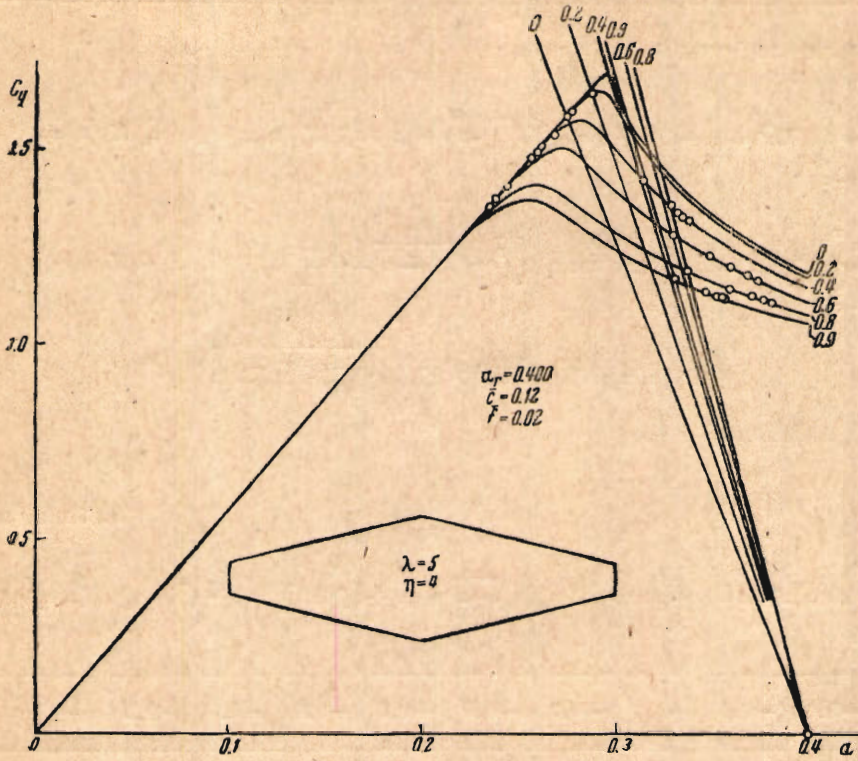
$$\varphi(\bar{z}_1+0) - \varphi(\bar{z}_1-0) = \varphi(-\bar{z}_1-0) - \varphi(-\bar{z}_1+0)$$

а путем добавления и вычитания функции

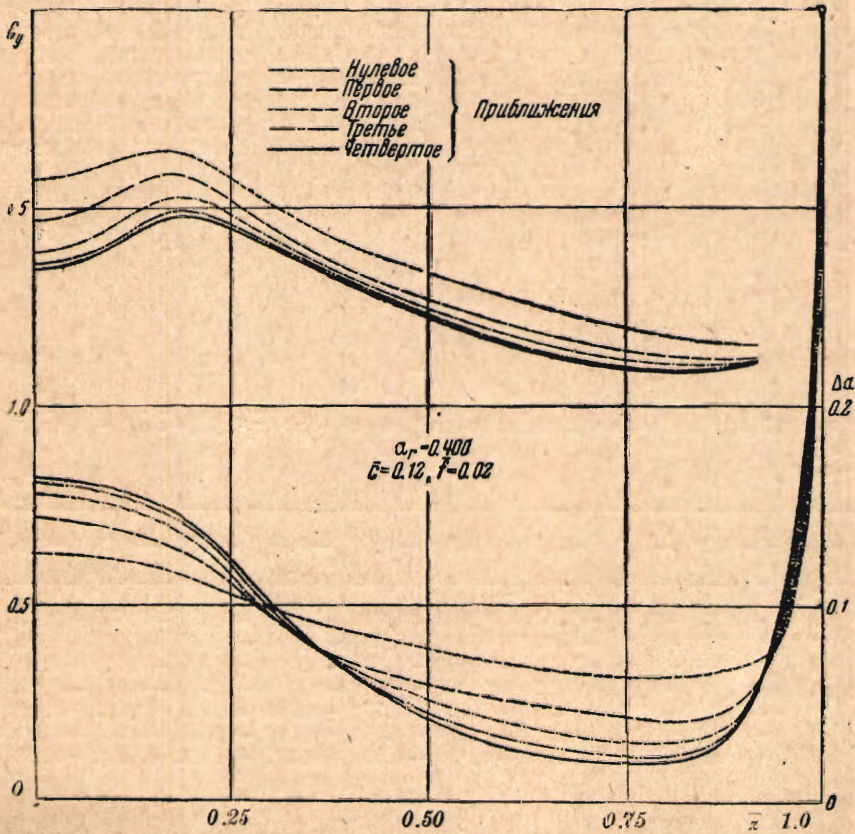
$$f(\bar{z}') = \begin{cases} [\varphi] \frac{\bar{z}'}{\bar{z}_1} & -\bar{z}_1 \leq \bar{z}' \leq \bar{z}_1 \\ 0 & |\bar{z}'| > \bar{z}_1 \end{cases} \quad (9)$$

устраняется разрыв

$$\begin{aligned} & \varphi(\bar{z}_1+0) - \varphi(\bar{z}_1-0) = \\ & = -[\varphi(-\bar{z}_1-0) - \varphi(-\bar{z}_1+0)] = [\varphi] \end{aligned}$$



Фиг. 4



Фиг. 5

Интегралы для функций (8), (9) равны

$$J_1 = \int_{-z_1}^{\bar{z}_1} K dz' = (\pi - 2 \arccos \bar{z}_1) \sqrt{1-z^2} + (\bar{z} + \bar{z}_1) K'(\bar{z}, \bar{z}_1) - (\bar{z} - \bar{z}_1) K(\bar{z}, \bar{z}_1) \quad (10)$$

$$J_2 = \int_{-z_1}^{\bar{z}_1} \bar{z}' K dz' = (\pi - 2 \arccos \bar{z}_1) \left[\frac{\bar{z}}{2} \sqrt{1-\bar{z}^2} - \frac{\bar{z}^2 - \bar{z}_1^2}{2} K'(\bar{z}, \bar{z}_1) - K(\bar{z}, \bar{z}_1) \right] \quad (11)$$

$$K'(\bar{z}, \bar{z}_1) = \ln \frac{1 + \bar{z} \bar{z}_1 + \sqrt{(1-\bar{z}_1^2)(1-\bar{z}^2)}}{\bar{z}_1 + \bar{z}}$$

Таблица 2

$$\int_{-z_1}^{\bar{z}_1} K(\bar{z}, z') dz' = (\pi - 2 \arccos \bar{z}_1) \sqrt{1-z^2} + (\bar{z} + \bar{z}_1) K'(\bar{z}, \bar{z}_1) - (\bar{z} - \bar{z}_1) K(\bar{z}, \bar{z}_1)$$

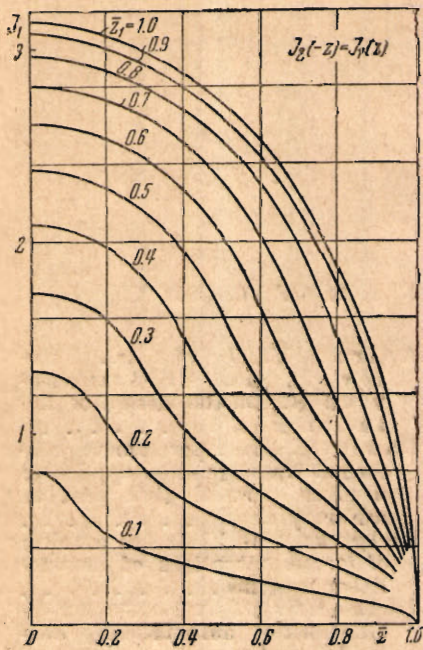
$\frac{z}{z_1}$	-1.0	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-	0
1.0	0	1.369	1.884	2.245	2.512	2.721	2.880	2.996	3.080	3.128	3.142
0.9	0	1.167	1.774	2.153	2.439	2.649	2.809	2.930	3.015	3.065	3.082
0.8	0	0.902	1.470	1.966	2.278	2.515	2.683	2.810	2.899	2.947	2.965
0.7	0	0.740	1.140	1.608	2.040	2.309	2.500	2.640	2.735	2.788	2.806
0.6	0	0.603	0.922	1.230	1.645	2.033	2.261	2.419	2.526	2.587	2.604
0.5	0	0.496	0.748	0.976	1.230	1.603	1.956	2.150	2.274	2.343	2.366
0.4	0	0.387	0.578	0.754	0.939	1.155	1.489	1.808	1.967	2.052	2.078
0.3	0	0.287	0.426	0.552	0.682	0.827	1.005	1.305	0.582	1.698	1.734
0.2	0	0.190	0.281	0.364	0.448	0.537	0.644	0.784	1.040	1.268	1.320
0.1	0	0.095	0.139	0.181	0.222	0.266	0.316	0.379	0.468	0.662	0.800
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 3

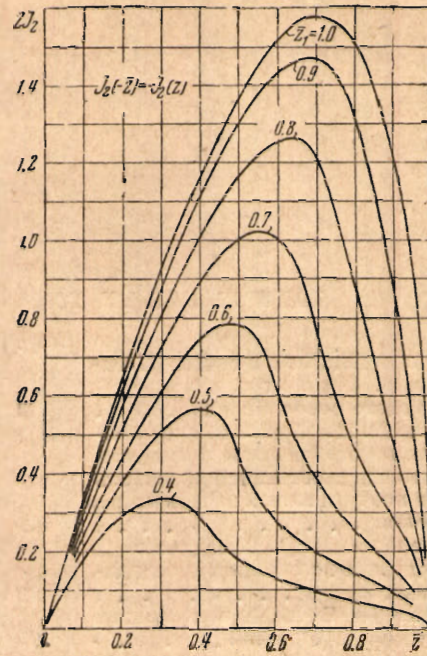
$$2 \int_{+z_1}^{-\bar{z}_1} \bar{z}' K(\bar{z}, z') dz' = (\pi - 2 \arccos \bar{z}_1) \bar{z} \sqrt{1-\bar{z}^2} - (\bar{z}^2 - \bar{z}_1^2) [K(\bar{z}, \bar{z}_1) - K(\bar{z}, \bar{z}_1)]$$

$\frac{z}{z_1}$	-1.0	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0
1.0	0	-1.232	-1.508	-1.570	-1.507	-1.360	-1.151	-0.900	-0.615	-0.313	0
0.9	0	-0.878	-1.135	-1.149	-1.126	-1.291	-1.101	-0.861	-0.591	-0.300	0
0.8	0	-0.467	-0.891	-1.210	-1.248	-1.163	-1.006	-0.795	-0.549	-0.281	0
0.7	0	-0.287	-0.463	-0.776	-1.007	-0.998	-0.885	-0.709	-0.493	-0.252	0
0.6	0	-0.153	-0.261	-0.382	-0.618	-0.773	-0.738	-0.592	-0.430	-0.222	0
0.5	0	-0.092	-0.144	-0.200	-0.279	-0.455	-0.562	-0.496	-0.360	-0.189	0
0.4	0	-0.044	-0.070	-0.097	-0.131	-0.181	-0.302	-0.328	-0.284	-0.153	0

Для интегралов (10), (11) на фиг. 6 и 7 приводятся соответствующие графики; вычи-



Фиг. 6



Фиг. 7

сленные значения этих интегралов даны в табл. 2 и 3, причем заметим, что $J_1(-z) = J_1(z)$ и $J_2(-z) = -J_2(z)$.

Поступила в редакцию
22 VI 1943

Центральный аэрогидродинамический
институт им. Жуковского

AERODYNAMIC CALCULATION OF AN AEROFOIL OF FINITE SPAN

G. I. MAIKAPAR

(Summary)

All known methods for aerodynamic calculation of an aerofoil of finite span are based on the solution of the Prandtl integro-differential equation (1).

For the case of non-linear relationship between the coefficient of lift C_y and incidence α the approximate procedures ordinarily used are divergent.

In this article by substituting the result (3) of Betz [1] into formula (2) the author obtains equation (4) in the case of linear relationship $C_y(\alpha)$ and equation (6) in the case of the non-linear one. In both cases the procedure of the consequent approximation may be used and gives rapid convergence, as is illustrated by numerical examples.

ЛИТЕРАТУРА

1. Betz A. Tragflügeltheorie. Ber. u. Abh. der WGLL. 1920. H. 2.
2. Gebelein H. Über die Integralgleichung der Prandtl'schen Tragflügeltheorie. Ing. Arch. Bd. VII. H. 5.