Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том VII, 1943

ЗАМЕТКИ

ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРИИ ТОНКОСТЕННЫХ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ В. З. ВЛАСОВА

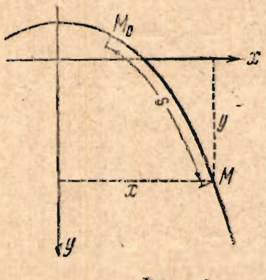
Г. Ю. ДЖАНЕЛИДЗЕ
(Самарканд)

Нашедшая широкое применение в расчетной практикике теория тонкостенных упругих стержней В. З. Власова основана на специальной гипотезе о характере деформаций.

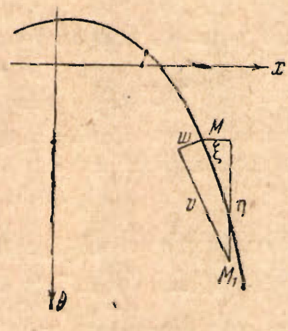
В работах В. З. Власова [1,2,3] вывод основных уравнений теории произведен обычным способом — из рассмотрения равновесия элемента стержня. При этом граничные условия написаны несколько произвольным образом.

В настоящей работе основные уравнения этой теории выводятся энергетическим методом, который позволяет автоматически получить «естественные» граничные условия. Приводимый далее вариационный расчет полностью подтверждает и обосновывает граничные условия, предложенные В. З. Власовым, и, как нам кажется, является удобной схемой изложения теории при преподавании.

§ 1. Основные положения[1]. Рассмотрим тонкостенный прямолинейный стержень незамкнутого профиля (фиг. 1) как цилиндрическую оболочку, срединная поверхность которой отнесена к координатам z и s (ось z направлена параллельно оси стержня, а s — длина дуги осевой линии профиля).



Фиг. 1



Фиг. 2

Обозначим перемещения точек срединной поверхности оболочки по касательной к оси стержня буквой u, по касательной к осевой линии профиля буквой v и по нормали к осевой линии профиля буквой w.

Согласно общей теории оболочек (фиг. 2) составляющие деформации поверхности определяются по формулам

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z}, \qquad \varepsilon_s = \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{w}{R}, \qquad \gamma_{zs} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z}$$
$$\chi_1 = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{v}{R}\right), \qquad \chi_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \qquad \tau = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{v}{R}\right) \tag{1.1}$$

[1] Этот параграф содержит переработанное изложение необходимых для дальнейшего результатов работ В. З. Власова.

Здесь ε_z и ε_s — относительные удлинения линейных элементов координатных линий, γ_{zs} — изменение прямого угла между координатными линиями, $z=\text{const}$ и $s=\text{const}$, величины χ_1, χ_2 и τ — параметры изменения кривизны, $R=R(s)$ — радиус кривизны дуги осевой линии профиля.

Составляющие деформации срединной поверхности связаны между собой тремя уравнениями совместности (см., например, работу Гольденвейзера [4], в которой уравнения совместности приведены в развернутой форме):

$$\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial s^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_s}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\gamma_{zs}}{\partial z.\partial s}+\frac{\chi_2}{R}=0,\qquad \frac{1}{R}\frac{\partial\varepsilon_z}{\partial s}-\frac{1}{R}\frac{\partial\gamma_{zs}}{\partial z}-\frac{\partial\chi_2}{\partial s}+\frac{\partial\tau}{\partial s}=0,\qquad \frac{\partial\chi_1}{\partial z}-\frac{\partial\tau}{\partial s}=0 \tag{1.2}$$

Примем теперь в качестве первой гипотезы, что перемещения v и w соответствуют только деформации кручения и повороту всего сечения как целого относительно мгновенного центра с координатами x_0, y_0.

При этом предположении смещения ξ и η в направлениях декартовых координат x и y даются обычными формулами кинематики плоского движения

$$\xi=\xi_0-\theta\,(y-y_0),\qquad \eta=\eta_0+\theta\,(x-x_0) \tag{1.3}$$

в которых угол поворота θ (так же как ξ_0 и η_0) зависит только от z.

Смещения v и w связаны с смещениями ξ и η (как легко видеть из чертежа фиг. 2) соотношениями

$$v=\xi\frac{dx}{ds}+\eta\frac{dy}{ds},\qquad w=-\xi\frac{dy}{ds}+\eta\frac{dx}{ds} \tag{1.4}$$

Из формул (1.1), (1.3) и (1.4) можно вычислить составляющие деформации срединной поверхности, соответствующие выбранным нами перемещениям.

Относительное удлинение ε_s будет

$$\varepsilon_s=\xi_0\left[\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{1}{R}\frac{dy}{ds}\right]+\eta_0\left[\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{1}{R}\frac{dx}{ds}\right]$$

или по использовании доказываемых в дифференциальной геометрии формул [5]

$$\frac{1}{R}=\frac{d^2y}{ds^2}:\frac{dx}{ds}=-\frac{d^2x}{ds^2}:\frac{dy}{ds},\qquad \varepsilon_s=0 \tag{1.5}$$

Сдвиг γ_{zs} также вычисляется из формул (1.1), (1.3) и (1.4)

$$\gamma_{zs}=\frac{\partial u}{\partial s}+\dot\xi_0\frac{dx}{ds}+\dot\eta_0\frac{dy}{ds}+\dot\theta\left[(x-x_0)\frac{dy}{ds}-(y-y_0)\frac{dx}{ds}\right] \tag{1.6}$$

Переходя к определению параметров изменения кривизны χ_1, τ и χ_2, имеем

$$\chi_0=\frac{\partial}{\partial s}\left[\theta^2\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\theta\left(\frac{dx}{ds}\right)^2\right]-\frac{\partial\theta}{\partial z}=0 \tag{1.7}$$

Так как выражение, стоящее в χ_1 под знаком дифференцирования по s, стоит в τ под знаком дифференцирования по z, то

$$\tau=\frac{\partial\theta}{\partial z}=\dot\theta \tag{1.8}$$

Величина χ_2 определяется по формуле

$$\chi_2=-\ddot\xi_0\frac{dy}{ds}+\ddot\eta_0\frac{dx}{ds}+\ddot\theta\left[(x-x_0)\frac{dy}{ds}-(y-y_0)\frac{dx}{ds}\right] \tag{1.9}$$

В качестве второй гипотезы В. З. Власов принимает, что деформация сдвига срединной поверхности равна нулю

$$\gamma_{zs}=\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial z}=0 \tag{1.10}$$

Подставляя сюда v по формуле (1.4), приходим к искомому дифференциальному уравнению, определяющему перемещение u

$$\frac{\partial u}{\partial s}+\dot\xi_0\frac{dx}{ds}+\dot\eta_0\frac{dy}{ds}+\dot\theta\frac{d\omega}{ds}=0 \tag{1.11}$$

Здесь введено обозначение

$$\frac{d\omega}{ds}=(x-x_0)\frac{dy}{ds}-(y-y_0)\frac{dx}{ds} \tag{1.12}$$

Общий интеграл уравнения (1.11) имеет вид.

$$u=\zeta(z)-\dot\xi_0(z)\,x-\dot\eta_0(z)\,y-\dot\theta(z)\,\omega \tag{1.13}$$

где $\zeta(z)$—произвольная функция интегрирования. Зная u, дифференцированием по z находим

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z} = \dot{\zeta} - \ddot{\xi}_0 x - \ddot{\eta}_0 y - \ddot{\theta}\,\omega \tag{1.14}$$

Функцию $\omega(s)$, представляющую собой удвоенную площадь сектора, заключенного между двумя радиусами-векторами и дугой s средней линии профиля, называют секториальной площадью. Секториальная площадь определяется интегралом

$$\omega(s) = \int_{s_0}^{s} \left\{ (x - x_0)\frac{dy}{ds} - (y - y_0)\frac{dx}{ds} \right\} ds \tag{1.15}$$

в котором точка x_0, y_0 называется полюсом секториальной площади, а точка s_0 — началом отсчета секториальной площади.

§ 2. Энергетические соотношения. Для вывода уравнений равновесия в перемещениях будем исходить из принципа возможных перемещений, согласно которому функционал W, равный разности между упругим потенциалом системы Π и работой внешних сил A

$$W = \Pi - A \tag{2.1}$$

должен иметь стационарное значение.

Выразим функционал W через перемещения ξ_0, η_0 (индекс 0 в дальнейшем для упрощения будем опускать), ξ и угол закручивания θ.

Составим выражение для потенциала упругих сил, пользуясь обычной формулой теории оболочек (как известно, эта формула носит *приближенный* характер—ряд членов порядка h^3 в ней уже опущен):

$$\Pi = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_0^L \int_0^{s_1} \left\{ (\varepsilon_z + \varepsilon_s)^2 - 2(1-\nu)\left(\varepsilon_z\varepsilon_s - \frac{1}{4}\gamma_{zs}^2\right) \right\} h\,dz\,ds +$$

$$+ \frac{E}{24(1-\nu^2)} \int_0^L \int_0^{s_1} \left\{ (\chi_1 + \chi_2)^2 - 2(1-\nu)(\chi_1\chi_2 - \tau^2) \right\} h^3\,dz\,ds \tag{2.2}$$

При сделанных нами предположениях $\varepsilon_s = \gamma_{zs} = \chi_1 = 0$ и формула (2.2) значительно упрощается:

$$\Pi = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_0^L \int_0^{s_1} \left\{ \varepsilon_z^2 + \frac{h^2}{12}\chi_2^2 + \frac{h^2(1-\nu)}{6}\tau^2 \right\} h\,ds\,dz \tag{2.3}$$

Здесь E—модуль Юнга, ν—коэффициент Пуассона, $h(s)$—толщина профиля в точке s, L—длина стержня, s_1—длина дуги срединной линии профиля.

Для получения основных уравнений теории В. З. Власова нужно еще отбросить член, содержащий χ_2^2. Следовательно, из членов третьего относительно h порядка необходимо сохранить только член, соответствующий кручению стержня[1] (в этом состоит третье основное положение теории). При этом выражение (2.3) еще упрощается и по использовании формул

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \qquad T = \int_0^{s_1} \frac{h^3(s)}{3} ds = \int_0^{s_1} dT \tag{2.4}$$

которыми определяются модуль сдвига G и геометрическая жесткость профиля на кручение T $\left(\text{формула для } T \text{ является обобщением приближенной формулы } T = \sum \frac{1}{3} h^3\delta\right)$, принимает вид

$$\Pi = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_0^L \int_0^{s_1} \varepsilon_z^2\,h\,ds\,dz + \frac{G}{2} \int_0^L \int_0^{s_1} \tau^2\,dT\,dz \tag{2.5}$$

[1] Учет всех членов третьего порядка не представляет особых затруднений—он приводит к несколько более сложным уравнениям, чем те, которые даны В. З. Власовым. Однако практическая ценность подобных расчетов сомнительна, поскольку основные положения теории справедливы лишь для тонких стержней.

Примем, что внешняя нагрузка, действующая на стержень в точке z, s, сводится к силе $P(z, s)$ с составляющими $P_x(z, s)$, $P_y(z, s)$ и $P_z(z, s)$ по осям координат x, y, z и крутящему моменту m_z (относительно центра изгиба; определение центра изгиба и способ вычисления его координат даны далее).

Эти предложения позволяют представить работу внешних сил A в виде [1]

$$A = \int_0^L \int_0^{s_1} (P_x\xi + P_y\eta + P_z u)\, dz\, ds + \int_0^L m_z\theta\, dz = \int_0^L \left(q_x\xi + q_y\eta + \int_0^{s_1} P_z u\, ds + m_z\theta \right) dz \qquad (2.6)$$

Здесь введены обозначения для «суммарных» компонент

$$q_x = \int_0^{s_1} P_x(z, s)\, ds, \qquad q_y = \int_0^{s_1} P_y(z, s)\, ds$$

Из формул (2.5) и (2.6) следует выражение для функции W

$$W = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_0^L \int_0^{s_1} \varepsilon_z^2 h\, ds\, dz + \frac{G}{2} \int_0^L \int_0^{s_1} \tau^2\, dT dz - \int_0^L \left\{ q_x\xi + q_y\eta + \int_0^{s_1} P_z u\, ds + m_z\theta \right\} dz \qquad (2.7)$$

Подставляя в (2.7) значения ε_z и τ из формул (1.14) и (1.8), получаем искомое выражение функционала W через перемещения:

$$W = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_0^L \int_0^{s_1} \left(\dot\zeta - \ddot\xi x - \ddot\eta y - \ddot\theta\, \omega \right)^2 h\, ds\, dz + \frac{GT}{2} \int_0^L \dot\theta^2 dz -$$
$$- \int_0^L \left\{ q_x\xi + q_y\eta + q_z\zeta - \dot\xi \int_0^{s_1} x P_z\, ds - \dot\eta \int_0^{s_1} y P_z\, ds - \dot\theta \int_0^{s_1} \omega P_z\, ds + m_z\theta \right\} dz \qquad (2.8)$$

§ 3. Вывод уравнений равновесия в перемещениях и граничных условий. Уравнения равновесия в перемещениях и граничные условия к ним могут быть получены преобразованием вариации функционала W интегрированием по частям. Однако удобнее прямо воспользоваться известными из вариационного исчисления уравнениями Эйлера-Лагранжа и формулами для «естественных» граничных условий [6], которые в случае изучаемого нами функционала

$$W = \int_0^L F(\zeta, \dot\zeta; \xi, \dot\xi, \ddot\xi; \eta, \dot\eta, \ddot\eta; \theta, \dot\theta, \ddot\theta)\, dz$$

принимают вид

$$\frac{\partial F}{\partial \zeta} - \frac{d}{dz}\frac{\partial F}{\partial \dot\zeta} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \eta} - \frac{d}{dz}\frac{\partial F}{\partial \dot\eta} + \frac{d^2}{dz^2}\frac{\partial F}{\partial \ddot\eta} = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial \xi} - \frac{d}{dz}\frac{\partial F}{\partial \dot\xi} + \frac{d^2}{dz^2}\frac{\partial F}{\partial \ddot\xi} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{d}{dz}\frac{\partial F}{\partial \dot\theta} + \frac{d^2}{dz^2}\frac{\partial F}{\partial \ddot\theta} = 0 \qquad (3.1)$$

и при $z = 0$ и $z = L$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot\zeta} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \ddot\xi} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \ddot\eta} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \ddot\theta} = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial \dot\xi} - \frac{d}{dz}\frac{dF}{\partial \ddot\xi} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial \dot\eta} - \frac{d}{dz}\frac{dF}{\partial \ddot\eta} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \dot\theta} - \frac{d}{dz}\frac{\partial F}{\partial \ddot\theta} = 0, \qquad (3.2)$$

Подставляя в (3.1) найденное ранее выражение (3.2) для $F(\zeta, \dot\zeta; \xi, \dot\xi, \ddot\xi; \eta, \dot\eta, \ddot\eta; \theta, \dot\theta, \ddot\theta)$,

---

[1] В отличие от ξ и η перемещение u зависит от z и s, поэтому оно не может быть вынесено за знак интегрирования по s.

получаем искомые уравнения равновесия в перемещениях $\left(\text{в них } E^* = \dfrac{E}{1-\nu^2} \text{ и } dF = h\,ds\right)$

$$E^*\ddot{\zeta}\int_0^{s_1} dF - E^*\dddot{\xi}\int_0^{s_1} x\,dF - E^*\dddot{\eta}\int_0^{s_1} y\,dF - E^*\dddot{\theta}\int_0^{s_1}\omega\,dF + q_z = 0$$

$$E^*\dddot{\zeta}\int_0^{s_1} x\,dF - E^*\ddddot{\xi}\int_0^{s_1} x^2\,dF - E^*\ddddot{\eta}\int_0^{s_1} xy\,dF - E^*\ddddot{\theta}\int_0^{s_1} x\omega\,dF + \int_0^{s_1} x\frac{\partial P_z}{\partial z}\,ds + q_x = 0$$

$$E^*\dddot{\zeta}\int_0^{s_1} y\,dF - E^*\ddddot{\xi}\int_0^{s_1} yx\,dF - E^*\ddddot{\eta}\int_0^{s_1} y^2\,dF - E^*\ddddot{\theta}\int_0^{s_1} y\omega\,dF + \int_0^{s_1} g\frac{\partial P_z}{\partial z}\,ds + q_y = 0$$

$$E^*\dddot{\zeta}\int_0^{s_1}\omega\,dF - E^*\ddddot{\xi}\int_0^{s_1}\omega x\,dF - E^*\ddddot{\eta}\int_0^{s_1} y\omega\,dE -$$

$$- E^*\ddddot{\theta}\int_0^{s_1}\omega^2\,dF + GT\ddot{\theta} + \int_0^{s_1}\omega\frac{\partial P_z}{\partial z}\,ds + m_z = 0 \qquad (3.3)$$

Эта система четырех дифференциальных уравнений в полных производных с четырьмя неизвестными функциями ζ, ξ, η, θ имеет симметричную матрицу коэффициентов. Ее вывод (другим методом) и подробное исследование приводятся в книге[3] В. З. Власова.

Общий интеграл системы (3.3) должен содержать четырнадцать произвольных постоянных интегрирования, которые должны быть определены из граничных условий (3.2) при $z=0$ и при $z=L$

$$E^*\dot{\zeta}\int_0^{s_1} dF - E^*\ddot{\xi}\int_0^{s_1} x\,dF - E^*\ddot{\eta}\int_0^{s_1} y\,dF - E^*\ddot{\theta}\int_0^{s_1}\omega\,dF = 0$$

$$-E^*\dot{\zeta}\int_0^{s_1} x\,dF + E^*\ddot{\xi}\int_0^{s_1} x^2\,dF + E^*\ddot{\eta}\int_0^{s_1} xy\,dF + E^*\ddot{\theta}\int_0^{s_1} x\omega\,dF = 0$$

$$E^*\ddot{\zeta}\int_0^{s_1} x\,dF - E^*\dddot{\xi}\int_0^{s_1} x^2\,dF - E^*\dddot{\eta}\int_0^{s_1} xy\,dF - E^*\dddot{\theta}\int_0^{s_1} x\omega\,dF + \int_0^{s_1} xP_z\,ds = 0$$

$$-E^*\dot{\zeta}\int y\,dF + E^*\ddot{\xi}\int_0^{s_1} yx\,dF + E^*\ddot{\eta}\int_0^{s_1} y^2\,dF + E^*\ddot{\theta}\int_0^{s_1} y\omega\,dF = 0 \qquad (3.4)$$

$$E^*\ddot{\zeta}\int_0^{s_1} y\,dF - E^*\dddot{\xi}\int_0^{s_1} yx\,dF - E^*\dddot{\eta}\int_0^{s_1} y^2\,dF - E^*\dddot{\theta}\int_0^{s_1} y\omega\,dF + \int_0^{s_1} yP_z\,ds = 0$$

$$-E^*\dot{\zeta}\int_0^{s_1}\omega\,dF + E^*\ddot{\xi}\int_0^{s_1} x\omega\,dF + E^*\ddot{\eta}\int_0^{s_1} y\omega\,dF + E^*\ddot{\theta}\int_0^{s_1}\omega^2\,dF = 0$$

$$GT\dot{\theta} + E^*\ddot{\zeta}\int_0^{s_1}\omega\,dF - E^*\dddot{\xi}\int_0^{s_1} x\omega\,dE - E^*\dddot{\eta}\int_0^{s_1} y\omega\,dF - E^*\dddot{\theta}\int_0^{s_1}\omega^2\,dF + \int_0^{s_1}\omega P_z\,ds = 0$$

Граничные условия (3.4) выписаны для случая стержня, имеющего свободные от внешних нагрузок концы. Не представляет затруднений обобщение на случай, когда к концу стержня приложены растягивающая сила V_z, перерезывающие силы V_x и V_y, изгибающие моменты M_x и M_y, крутящий момент M_z и величина B (соответствующая последнему граничному условию), смысл которой выясняется далее¹.

Действительно, при приложении на конце $z = L$ указанных сил и моментов к вариации функционала W добавляются члены, соответствующие работе сил V_x, V_y, V_z на

¹ В дальнейшем принято, что главный вектор **V** и главный момент **M** отнесены к точке x_0, y_0.

перемещениях $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta u\,(x_0, y_0)$, моментов M_x, M_y, M_z на вариациях $-\delta\dot\eta$, $\delta\dot\xi$, $\delta\theta$ и величины B на вариации $-\delta\dot\theta$

$$\delta W_L = -[V_x\delta\xi + V_y\delta\eta + V_z\delta u\,(x_0, y_0) - M_x\delta\dot\eta + M_y\delta\dot\xi + M_z\delta\theta - B\,\delta\dot\theta] \tag{3.5}$$

или

$$\delta W_L = -[V_x\delta\xi + V_y\delta\eta + V_z\delta\zeta + (M_y - x_0V_z)\,\delta\dot\xi - (M_x + y_0V_z)\,\delta\dot\eta + M_z\delta\theta - B\,\delta\dot\theta]$$

Наличие подобного члена в δW приводит к появлению в правых частях граничных условий (3.4) величин V_z, M_x, $-M_x$, V_y, M_z и $-B$. Выбор знаков в формуле для δW_L при M_x и B вызывается необходимостью сохранения обычного правила знаков (положительный момент M_x вращает от оси y к оси z и т. д.).

Из уравнений (3.4) и (3.5) следуют формулы, определяющие упругие усилия и моменты (не только на конце стержня, но и в любом сечении z, если вместо значений функций и производных при $z = L$ брать их значения в точке z):

$$V_z = E^*\dot\zeta\int_0^{s_1} dF - E^*\ddot\xi\int_0^{s_1} x\,dF - E^*\ddot\eta\int_0^{s_1} y\,dF - E^*\ddot\theta\int_0^{s_1}\omega\,dF$$

$$V_x = -E^*\dddot\xi\int_0^{s_1} x^2\,dF - E^*\dddot\eta\int_0^{s_1} xy\,dF - E^*\dddot\theta\int_0^{s_1} x\omega\,dF + E^*\ddot\zeta\int_0^{s_1} x\,dF + \int_0^{s_1} xP_z\,ds \tag{3.6}$$

$$V_y = -E^*\dddot\eta\int_0^{s_1} y^2\,dF - E^*\dddot\theta\int_0^{s_1} y\omega\,dF + E^*\ddot\zeta\int_0^{s_1} y\,dF - E^*\dddot\xi\int_0^{s_1} yx\,dF + \int_0^{s_1} yP_z\,ds$$

$$M_x + y_0V_z = -E^*\ddot\eta\int_0^{s_1} y^2\,dF - E^*\ddot\xi\int_0^{s_1} yx\,dF - E^*\ddot\theta\int_0^{s_1} y\omega\,dF + E^*\dot\zeta\int_0^{s_1} y\,dF$$

$$M_y - x_0V_z = E^*\ddot\xi\int_0^{s_1} x^2\,dF + E^*\ddot\eta\int_0^{s_1} xy\,dF + E^*\ddot\theta\int_0^{s_1} x\omega\,dF - E^*\dot\zeta\int_0^{s_1} x\,dF \tag{3.7}$$

$$M_z = GT\dot\theta - E^*\dddot\theta\int_0^{s_1}\omega^2\,dF + E^*\ddot\zeta\int_0^{s_1}\omega\,dF - E^*\dddot\xi\int_0^{s_1}\omega x\,dF - E^*\dddot\eta\int_0^{s_1}\omega y\,dF + \int_0^{s_1}\omega P_z\,ds$$

$$B = -E^*\ddot\theta\int_0^{s_1}\omega^2\,dF + E^*\dot\zeta\int_0^{s_1}\omega\,dF - E^*\ddot\xi\int_0^{s_1} x\omega\,dF - E^*\ddot\eta\int_0^{s_1} y\omega\,dF \tag{3.8}$$

Величину B В. З. Власов назвал изгибно-крутящим бимоментом. В случае стержня, нагруженного на торце, распределенном нагрузкой σ_z, изгибно-крутящий бимомент

$$B = \int_0^{s_1}\omega\sigma_z\,ds$$

Это вытекает из сопоставления формул (3.6) и (3.8), так как

$$V_z = \int_0^{s_1}\sigma_z\,dF$$

4. Упрощение уравнений равновесия и граничных условий. Выберем за оси x, y главные оси поперечного сечения стержня, начало координат поместим в центр тяжести сечения. Тогда

$$\int_0^{s_1} x\,dF = 0, \qquad \int_0^{s_1} y\,dF = 0, \qquad \int_0^{s_1} xy\,dF = 0$$

Полюс секториальной площади (x_0, y_0) определим так, чтобы,

$$\int_0^{s_1} x\omega\,dF = 0, \qquad \int_0^{s_1} y\omega\,dF = 0$$

(этими условиями определяются координаты центра изгиба), а начало отсчета секториальной площади s_0 выберем так, чтобы

$$\int_0^{s_1} \omega \, dF = 0$$

При выполнении этих условий все формулы предшествующего параграфа упрощаются и принимают вид (для простоты примем $P_z = 0$) уравнения равновесия

$$E_* \ddot{\xi} \int_0^{s_1} dF = 0, \qquad -E^* \ddddot{\xi} \int_0^{s_1} x^2 \, dF + q_x = 0$$

$$-E^* \ddddot{\eta} \int_0^{s_1} y^2 \, dF + q_y = 0, \qquad GT \ddot{\theta} - E^* \ddddot{\theta} \int_0^{s_1} \omega^2 \, dF = 0 \tag{4.1}$$

Уравнения для сил и моментов (они же играют роль «естественных» граничных условий)

$$V_z = E^* \dot{\zeta} \int_0^{s_1} dF, \qquad V_x = -E^* \dddot{\xi} \int_0^{s_1} x^2 dF, \qquad V_y = -E^* \dddot{\eta} \int_0^{s_1} y^2 \, dF \tag{4.2}$$

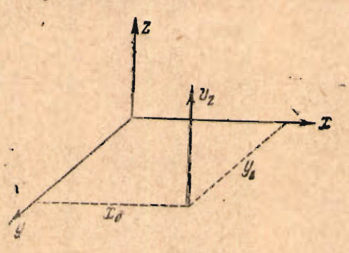
$$M_x^* = M_x + y_0 V_z = -E^* \ddot{\eta} \int_0^{s_1} y^2 \, dF,$$

$$M_y^* = M_y - x_0 V_z = E \ddot{\xi} \int_0^{s_1} x^2 \, dF \tag{4.3}$$

$$M_z^* = GT \dot{\theta} - E^* \dddot{\theta} \int_0^{s_1} \omega^2 \, dF$$

$$B = -E^* \ddot{\theta} \int_0^{s_1} \omega^2 \, dF \tag{4.4}$$

Величины M_x^* и M_y^* имеют простой смысл — это моменты относительно декартовых осей x, y [в отличие от M_x и M_y — моментов, отнесенных к точке $A(x_0, y_0)$]. Это об-



Фиг. 3

стоятельство ясно на чертеже (фиг. 3), из которого следует связь между M_x^*, M_y^* и M_x, M_y, V_z

$$M_x^* = M_x + y_0 V_z, \qquad M_y^* = M_y - x_0 V_z$$

В полученной в настоящем параграфе форме уравнения В. З. Власова обычно и применяются для решения частных задач.

Вышеприведенные расчеты показывают, что на свободном конце стержня все силовые факторы, в том числе и изгибно-крутящий бимомент, должны обращаться в нуль. Столь же просто можно из уравнения (4.2) — (4.4) получить и иные силовые граничные условия.

Поступила в редакцию
10 VIII 1943

Кафедра физики
Военно-медицинской академии
Красной Армии им. С. М. Кирова

APPLICATION OF THE VARIATION METHOD TO THE THEORY OF THIN-WALLED ELASTIC BARS DEVELOPED BY V. Z. VLASOV

G. J. DJANELIDZE

(Summary)

1. Expressions for the deformation of the central surface of a cylindrical shell are deduced, assuming its cross-section to be undeformable.

2. The expression for the potential energy of a curved and contorted cylindrical shell with an undeformable cross-section is constructed.

3. Differential equations are set up for equilibrium in displacements and for conditions at the ends of the bar similar to the equations of Euler-Lagrange and for so-called natural boundary conditions of the variation problem concerning the potential energy of the system.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. З. Новый метод расчета призматических балок из тонкостенных профилей на совместное действие осевой силы, изгиба и кручения. Вестник ВМА РККА. № 20. Проект и стандарт. 1936. № 8—9 и 10. Строительная промышленность. 1938. № 6 и 7.
2. Власов В. З. Кручение, устойчивость и колебания тонкостенных стержней. Прикладная математика и механика. 1939. Т. III; Вып. 1.
3. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. Монография. Госстройиздат 1940. [275 стр.]
4. Гольденвейзер А. Л. Дополнения и поправки к теории тонких оболочек Love. Сборник «Пластинки и оболочки». Госстройиздат. 1939.
5. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчислений. ГОНТИ. 1929. Ч. 1.
6. Гюнтер Н. М. Курс вариационного исчисления. ГТТИ. 1941.