

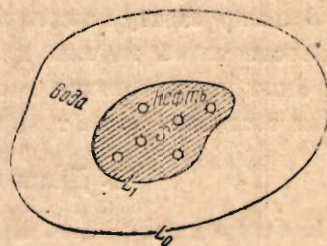
О ДВИЖЕНИИ ПОДОШВЕННЫХ ВОД В НЕФТЯНЫХ ПЛАСТАХ

Б. Э. КАЗАРНОВСКАЯ и П. Я. ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА

(Москва)

При изучении вопроса о движении нефти в пласте важную роль играет задача о перемещении поверхности раздела между нефтью и водой. Обычно эта задача рассматривается как плоская и ставится так: в плоскопараллельном потоке имеется n точечных стоков (скважин) в области S , занятой в начальный момент времени нефтью (фиг. 1). Вне области S имеем воду. Задается значение потенциала скорости на контурах скважин и на некотором контуре L_0 (контур области питания). Требуется определить характер перемещения линии раздела между водой и нефтью.

Основным вопросом здесь является вопрос о том, когда начнется обводнение скважин. Вообще говоря, первой начнет обводняться ближайшая к контуру скважина; в некоторый момент времени к ней подойдет язык воды, который в дальнейшем будет расширяться и скважина наряду с нефтью будет давать все большее количество воды.



Фиг. 1

Однако, если мы обратимся к вертикальному разрезу пласта, то будет ясно, что представленная предыдущей схемой картина явления отличается от действительной, так как нефтеносный слой не является ограниченным двумя параллельными горизонтальными плоскостями, а поверхность раздела между нефтью и



Фиг. 2

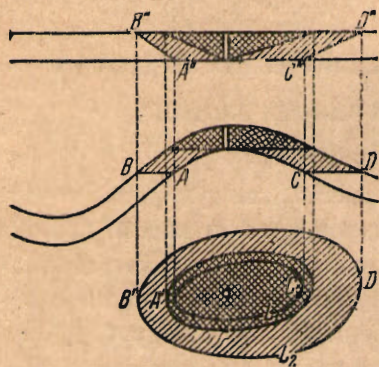


Фиг. 3

водой не является вертикальным цилиндром (фиг. 2). На самом деле пласт является изогнутым, а линия раздела между водой и нефтью в первоначальном состоянии (до открытия скважин) горизонтальна (фиг. 3). При движении нефти линия раздела будет перемещаться таким образом, что сначала в скважину вступит подошвенная вода, а затем уже, когда вода поднимается до верха скважины, будет образовываться «язык обводнения».

Целью настоящей статьи является изучение на простейших моделях вопроса о перемещении поверхности раздела между водой и нефтью в изогну-

тых пластах. Вследствие трудностей, связанных с решением действительной задачи, когда плотности воды и нефти, а также их вязкости, являются различными, мы предполагаем здесь, что вязкости и плотности обеих жидкостей настолько мало отличаются друг от друга, что их можно считать одинаковыми. Задачу о перемещении поверхности раздела между водой и нефтью в искривленном пласте можно приближенно заменить задачей о движении



Фиг. 4

в горизонтальном пласте следующим образом. Спроектируем на горизонтальную плоскость «внутренние» точки A и C поверхности раздела, т. е. точки, лежащие ближе к скважинам (фиг. 4), а также внешние точки B и D . Беря различные вертикальные сечения области движения и проделывая для них такое же построение в плане, получим два контура L_1 и L_2 , которые будем рассматривать как две жидкие линии плоского течения, заданные в некоторый определенный момент времени¹. Если мы проследим за перемещением этих двух жидких линий, то сможем составить некоторое представление

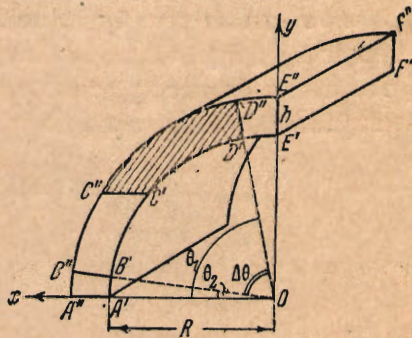
о характере перемещения поверхности раздела между водой и нефтью.

В нашу задачу входит выяснение на простейших примерах вопроса о возможности такой замены пространственного движения плоским. Кроме того, как было указано выше, с помощью простейших пространственных схем мы хотим составить более точное представление об отдельных деталях движения.

1. Движение в цилиндрическом пласте

1. Скорость и дебит. Предположим, что имеем сильно вытянутый пласт такой формы, что его можно приближенно заменить цилиндрическим слоем, ограниченным двумя concentрическими круговыми цилиндрами (фиг. 5). В сечении вертикальными плоскостями, перпендикулярными к направлению залегания пласта, границами являются дуги concentрических окружностей $A'E'$ и $A''E''$.

Допустим, что в вертикальной плоскости $E'E''F''F'$ имеем ряд скважин, который мы условно заменяем линейным стоком. Тогда движение можно считать плоскопараллельным, и для его изучения достаточно рассмотреть сечение $A'E'E''A''$. Заметим, что такая замена ряда скважин законна лишь при рассмотрении движения в области, удаленной от плоскости $E'E''F''F'$, вблизи же ее самой наша схема дает некоторое осредненное движение.



Фиг. 5

¹ Согласно замечанию К. А. Царевича, рассмотрение двух жидких линий L_1 и L_2 соответствует замене искривленного пласта плоским (верхняя часть фиг. 4) и действительной поверхности раздела конической поверхностью, образованной прямыми $A''B''$, $C''D''$ внутри горизонтального слоя грунта.

Считая, что движение подчиняется закону Дарси, положим

$$\bar{v} = -\frac{k}{\mu} \text{grad } \Phi \quad (1.1)$$

где потенциал скорости

$$\Phi = -(p + gpy) \quad (1.2)$$

причем p — давление, ρ — плотность, g — ускорение силы тяжести.

Установим граничные условия: будем считать, что потенциал скорости имеет заданные постоянные или зависящие от времени значения вдоль отрезков радиусов-векторов $B''O$ и $D''O$. Вдоль отрезка $B''B'$, который соответствует у нас контуру области питания и положение которого определяется углом θ_2 , пусть

$$\Phi = \Phi_2 \quad (1.3)$$

вдоль отрезка $D''D'$, условно соответствующего скважине и для которого $\theta = \theta_1$, пусть

$$\Phi = \Phi_1 \quad (1.4)$$

Так как вдоль дуг окружностей $B'D'$ и $B''D''$, как около твердых стенок, нормальная составляющая скорости должна равняться нулю, то

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \text{ на } B'D' \text{ и } B''D'' \quad (1.5)$$

Условия (1.3), (1.4) и (1.5) будут удовлетворены, если возьмем

$$\Phi = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\theta_1 - \theta_2} (\theta - \theta_2) + \Phi_2 \quad \text{или} \quad \Phi = \frac{\Delta \Phi}{\Delta \theta} (\theta - \theta_2) + \Phi_2 \quad (1.6)$$

где θ — полярный угол, отсчитываемый от оси x по часовой стрелке (фиг. 5), и для краткости положено

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \Delta \Phi, \quad \theta_1 - \theta_2 = \Delta \theta \quad (1.7)$$

Функция Φ представляет потенциал скорости точечного вихря, помещенного в начале координат O , и удовлетворяет уравнению Лапласа в полярных координатах

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1.8)$$

Если скорость в точке с координатами (r, θ) разложим на составляющие v_r по направлению радиуса-вектора и v_θ — вдоль окружности радиуса r , то будем иметь

$$v_r = 0, \quad v_\theta = -\frac{k}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{k}{\mu} \frac{\Delta \Phi}{\Delta \theta} \frac{1}{r} \quad (1.9)$$

Каждая частица жидкости движется вдоль окружности радиуса r со скоростью, не зависящей от угла θ .

Найдем дебит Q , т. е. количество нефти, протекающее в единицу времени через площадку, например $E'E''F'F''$ (фиг. 5); если принять $E'F' = 1$, то

$$Q = \int_R^{R+h} v_\theta dr = \frac{k}{\mu} \frac{\Delta \Phi}{\Delta \theta} \ln \frac{R+h}{R} \quad (1.10)$$

Если h/R мало, так что можно принять

$$\ln \left(1 + \frac{h}{R} \right) \approx \frac{h}{R} \quad (1.11)$$

то получим

$$Q = \frac{k}{\mu} \frac{\Delta \Phi}{R \Delta \theta} h \quad \text{или} \quad Q = \frac{k}{\mu} \frac{\Delta \Phi}{L} h \quad (1.12)$$

где L — длина дуги $A'D'$ и, следовательно, $L = R \Delta \theta$.

Таким образом получаем такую же формулу, как и для горизонтального пласта длины L . Если бы отношению h/R не было достаточно малым для применимости формулы (1.11), то можно было бы принять

$$\ln\left(1 + \frac{h}{R}\right) = \frac{h}{R} - \frac{1}{2} \frac{h^2}{R^2} = \frac{h}{R} \left(1 - \frac{h}{2R}\right) \quad (1.13)$$

и дебит в случае искривленного пласта получался бы несколько меньшим, чем для прямолинейного пласта при соответствующих значениях L

$$Q_{\text{н}} = \frac{kh \Delta\Phi}{\mu L} \left(1 - \frac{h}{2R}\right) = Q_{\text{п}} \left(1 - \frac{h}{2R}\right) \quad (1.14)$$

2. Перемещение внутреннего края линии раздела между водой и нефтью. Пусть в начальный момент времени горизонтальный отрезок $C'C'$ (фиг. 6) представляет линию раздела между водой и нефтью. Будем следить за перемещением частиц этой линии. Простоты ради будем считать, что $\Delta\Phi$ не зависит от времени. Принимая в начальный момент времени $t=0$, получим, что путь s , пройденный точкой M_0 за промежуток времени t , когда она займет положение M , равен

$$s = tv_0 = \frac{k \Delta\Phi t}{\mu \Delta\theta r} \quad (2.1)$$

Если же обозначить полярный угол точки M_0 через θ_0 , а точки M через θ , то угол $\theta - \theta_0$, пройденный точкой M_0 за промежуток времени t , равен

$$\theta - \theta_0 = \frac{s}{r} = \frac{k \Delta\Phi t}{\mu \Delta\theta r^2} \quad (2.2)$$

Отсюда промежуток времени, за который точка, находящаяся на расстоянии r от начала координат, пройдет дугу $\theta - \theta_0$, равняется

$$t = \frac{\mu \Delta\theta}{k \Delta\Phi} r^2 (\theta - \theta_0) \quad (2.3)$$

Проследим сначала за перемещением «внутренней» (т. е. ближайшей к скважине) точки C' линии раздела. Обозначим начальное значение полярного угла точки C' через θ' , конечное (точка D') — через θ_1 . Обозначим через T' промежуток времени, нужный для того, чтобы точка C' достигла основания скважины D' . Согласно формуле (2.3) получим

$$T' = \frac{\mu \Delta\theta}{k \Delta\Phi} R^2 (\theta_1 - \theta') \quad (2.4)$$

Если в формуле (2.4) ввести вместо дуг их длины из соотношений (фиг. 7)

$$R(\theta_1 - \theta_2) = L, \quad R(\theta_1 - \theta') = L_0 \quad (2.5)$$

то получим

$$T' = - \frac{\mu}{k \Delta\Phi} LL_0 \quad (2.6)$$

Легко показать, что для плоского течения в горизонтальном слое, для которого «область питания» определяется отрезком L , а область, занятая в начальный момент нефтью, имеет длину L_0 , промежуток времени T , за который нефть вытечет из пласта (при разности потенциалов $\Phi_1 - \Phi_2$), определится той же формулой (2.6)

$$T = - \frac{\mu}{k \Delta\Phi} LL_0 \quad (2.7)$$

Отметим, что Φ в (2.7) равняется давлению с обратным знаком, так что

$$\Delta\Phi = p_2 - p_1 \quad (2.8)$$

тогда как в формуле (2.6), если считать давление в точке D' равным p_1 , а в точке C' равным p' , будем иметь

$$\Delta\Phi = p' - p_1 + g\rho H_1$$

где H_1 — разность высот точек D' и C' .

3. Перемещение внешнего края линии раздела между водой и нефтью. Будем теперь следить за перемещением «внешнего» края, т. е. точки C'' . Прежде всего найдем положение точки D'' , в которую перейдет C'' в момент времени T'' , когда внутренний край линии раздела дойдет до скважины. Обозначим полярный угол $D''OA''$ точки D'' на фиг. 6 и 7 через θ_1'' . Тогда по (2.2)

$$\theta_1'' - \theta'' = \frac{k}{\mu} \frac{\Delta\Phi}{\Delta\theta} \frac{T'}{(R+h)^2} \quad (3.1)$$

Подставив сюда T' из формулы (2.4), получим

$$\theta_1'' - \theta'' = \left(\frac{R}{R+h} \right)^2 (\theta_1 - \theta') \quad (3.2)$$

Легко видеть из фиг. 6, что

$$\frac{\sin \theta'}{\sin \theta''} = \frac{R+h}{R} \quad \text{или} \quad \theta'' = \arcsin \left(\frac{R}{R+h} \sin \theta' \right) \quad (3.3)$$

Поэтому формулу (3.2) можно представить так:

$$\theta_1'' = \arcsin \frac{R \sin \theta'}{R+h} + \left(\frac{R}{R+h} \right)^2 (\theta_1 - \theta') \quad (3.4)$$

Отсюда нетрудно найти высоту y'' точки D'' , отсчитываемую от горизонтальной оси x ,

$$y'' = (R+h) \sin \theta_1'' = (R+h) \sin \left[\arcsin \frac{R \sin \theta'}{R+h} + \left(\frac{R}{R+h} \right)^2 (\theta_1 - \theta') \right] \quad (3.5)$$

Обозначим через y' высоту точки D' ; тогда

$$y' = R \sin \theta_1 \quad (3.6)$$

Тогда разность высот точек D'' и D'

$$\Delta y = y'' - y' = (R+h) \sin \left[\arcsin \frac{R \sin \theta'}{R+h} + \left(\frac{R}{R+h} \right)^2 (\theta_1 - \theta') \right] - R \sin \theta_1 \quad (3.7)$$

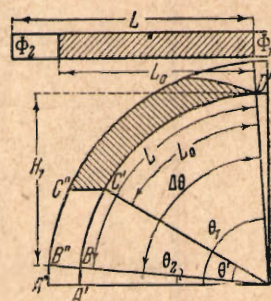
Точно также нетрудно найти разность абсцисс точек D'' и D' или, иначе, проекцию дуги кривой $D''D'$ на горизонтальную плоскость

$$\begin{aligned} \Delta x = x'' - x' &= (R+h) \cos \left[\arcsin \frac{R \sin \theta'}{R+h} + \left(\frac{R}{R+h} \right)^2 (\theta_1 - \theta') \right] - R \cos \theta_1 \approx \\ &\approx h (\operatorname{tg} \theta' + \pi - 2\theta') \end{aligned} \quad (3.8)$$

Наконец, найдем формулу для момента [времени T'' , когда вся нефть выйдет из пласта. Дело в том, что к моменту времени T' , когда внутренний край пласта достигнет скважины, в слое еще будет оставаться треугольник $D'DD''$, заполненный нефтью. Найдя величины T' и T'' , будем знать и промежуток времени $T'' - T'$ от начала обводнения галереи до полного ее обводнения.

Нетрудно видеть, пользуясь формулой (2.3), что

$$T'' = \frac{\mu}{k} \frac{\Delta\theta}{\Delta\Phi} (R+h)^2 (\theta_1 - \theta'')$$



Фиг. 7

или по формуле (3.3)

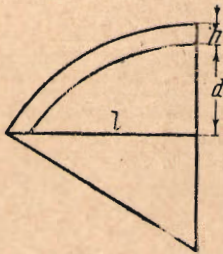
$$T'' = \frac{\mu}{k} \frac{\Delta\theta}{\Delta\Phi} (R+h)^2 \left[\theta_1 - \arcsin \frac{R \sin \theta'}{R+h} \right] \quad (3.9)$$

С помощью формулы (2.4) найдем

$$T'' - T' = \frac{\mu}{k} \frac{\Delta\theta}{\Delta\Phi} \left\{ (R+h)^2 \left[\theta_1 - \arcsin \frac{R \sin \theta'}{R+h} \right] - R^2 (\theta_1 - \theta') \right\} \quad (3.10)$$

$$\frac{T''}{T'} = \left(\frac{R+h}{R} \right)^2 \frac{1}{\theta_1 - \theta'} \left(\theta_1 - \arcsin \frac{R \sin \theta'}{R+h} \right) \quad (3.11)$$

Произведем теперь некоторое упрощение формул (3.7)–(3.10). Будем считать при этом, что угол $\theta_1 = \frac{1}{2}\pi$.



Фиг. 8

Заметим, что в схемах, отвечающих действительным формам пласта, отношение h/R обычно мало, порядка $10^{-2} - 10^{-3}$. Обозначая

$$\frac{h}{R} = \alpha \quad (3.12)$$

перепишем формулу (3.7) так:

$$\Delta y = R \left\{ (1+\alpha) \sin \left[\arcsin \frac{\sin \theta'}{1+\alpha} + \frac{1}{(1+\alpha)^2} \left(\frac{\pi}{2} - \theta' \right) \right] - 1 \right\} \quad (3.13)$$

Разложим Δy в ряд по степеням α и ограничимся первыми членами этого разложения. Получим

$$\Delta y = R \left[\alpha - \frac{1}{2} (\operatorname{tg} \theta' + \pi - 2\theta')^2 \alpha^2 + \dots \right] = h \left\{ 1 - \frac{1}{2} (\operatorname{tg} \theta' + \pi - 2\theta')^2 \alpha + \dots \right\}$$

Наибольшее значение принимает Δy при $\theta' = 0$. В этом случае

$$\Delta y = h \left(1 - \frac{\pi^2}{2} \alpha + \dots \right) \quad (3.15)$$

Из формул (3.9) и (3.11) видно, что при очень малых значениях α разность $\Delta y = y'' - y'$ положительна, т. е. $y'' > y'$ и, следовательно, внешний край линии раздела оказывается приподнятым над внутренним краем. Приподнятость эта при очень малых значениях h/R и при $\theta' = 0$ может оказаться порядка самой величины h . Однако в случаях, встречающихся в действительности, θ' следует брать порядка $30-60^\circ$ и больше. Тогда Δy уменьшается.

Так, для случая 1), изображенного на фиг. 8, при $h=20$ м, $d=400$ м, $l=800$ м имеем $h/R=0.02$, $\Delta y=18.6$ м; 2) если взять $h=20$, $d=190$, $l=1500$, то получим $h/R=0.00333$, $\Delta y=19.7$ м.

При увеличении α разность Δy уменьшается и при $\alpha > \frac{2}{\operatorname{tg} \theta' + \pi - 2\theta'}$ становится отрицательной.

Займемся теперь упрощением формулы (3.10). Ограничиваясь членами первой степени относительно α , найдем

$$\begin{aligned} \frac{T''}{T'} &= (1+\alpha)^2 \frac{\theta_1 - \theta' + \alpha \frac{\sin \theta' \cos \theta'}{\theta_1 - \theta'}}{\theta_1 - \theta'} \approx (1+2\alpha) \left(1 + \alpha \frac{\sin \theta' \cos \theta'}{\theta_1 - \theta'} \right) \approx \\ &\approx 1 + \left(2 + \frac{\sin \theta' \cos \theta'}{\theta_1 - \theta'} \right) \alpha \end{aligned} \quad (3.16)$$

Отсюда

$$\frac{T'' - T'}{T'} \approx \left(2 + \frac{\sin \theta' \cos \theta'}{\theta_1 - \theta'} \right) \alpha \quad (3.17)$$

При $\theta_1 = \frac{1}{2} \pi$ получим

$$\frac{T'' - T'}{T'} \approx \left(2 + \frac{\sin \theta' \cos \theta'}{\frac{1}{2}\pi - \theta'} \right) \alpha \quad (3.18)$$

Наконец, произведем оценку того, насколько сильно меняется величина Δx — проекция линии раздела на горизонтальную плоскость — при перемещении этой линии. В начальный момент времени $t = 0$ имеем

$$\begin{aligned} A'' A' = \Delta x &= (\Delta x)_0 = (R + h) \cos \arcsin \frac{R \sin \theta'}{R + h} - R \cos \theta' = \\ &= R \left[(1 + \alpha) \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta'}{(1 + \alpha)^2}} - \cos \theta' \right] = R \left[\sqrt{(1 + \alpha)^2 - \sin^2 \theta'} - \cos \theta' \right] \end{aligned}$$

Или, ограничиваясь членами второго порядка относительно α ,

$$A'' A' = (\Delta x)_{t=0} = \frac{h}{\cos \theta'} \left(1 - \frac{1}{2} \alpha \operatorname{tg}^2 \theta' \right) \quad (3.19)$$

В момент времени T' величина Δx определяется формулой (3.8), которая дает при $\theta_1 = \frac{1}{2} \pi$

$$\Delta x = R (1 + \alpha) \cos \left[\arcsin \frac{\sin \theta'}{1 + \alpha} + \frac{\frac{1}{2}\pi - \theta'}{(1 + \alpha)^2} \right]$$

С точностью до членов второй степени относительно α имеем

$$(\Delta x)_{t=T'} = h [\operatorname{tg} \theta' + \pi - 2\theta'] \quad (3.20)$$

Для случая 1) фиг. 8 имеем

$$(\Delta x)_{t=0} = 32.7 \text{ м}, \quad (\Delta x)_{t=T'} = 52.4 \text{ м}$$

Для случая 2)

$$(\Delta x)_{t=0} = 20.6 \text{ м}, \quad (\Delta x)_{t=T'} = 57.9 \text{ м}$$

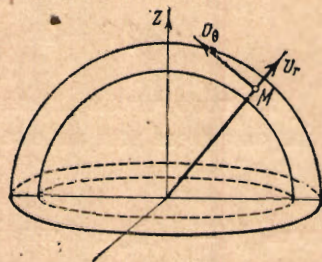
II. Движение в куполообразном пласте

4. Скорости и дебит в случае одной скважины. Рассмотрим движение в области, ограниченной двумя концентрическими сферами радиусов R и $R + h$. Предположим сначала, что имеем единственную скважину, расположенную вдоль оси z . Будем считать, что границей скважины является усеченный конус малого угла раствора θ_1 .

При больших значениях R и малых h/R , что имеет место в случаях, соответствующих действительным условиям, этот усеченный конус будет очень мало отличаться от цилиндра.

Принимая закон Дарси, будем иметь выражения скоростей в сферических координатах

$$v_r = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad v_\theta = -\frac{k}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad v_\varphi = 0 \quad (4.1)$$



Фиг. 9

Здесь Φ — потенциал скорости, v_r — составляющая скорости вдоль радиуса-вектора точки M , v_θ — составляющая вдоль меридиана (фиг. 9), v_φ — составляющая по параллели, которую считаем равной нулю, так как рассматриваем симметричный приток жидкости к скважине. Если допустить, что во всех точках жидкости

$$v_r = 0 \quad (4.2)$$

то будет удовлетворено условие: на стенках пласта нормальная составляющая скорости равна нулю. Если при этом удастся удовлетворить другим граничным условиям, то нам останется иметь дело лишь со скоростью v_θ .

Будем считать, что у нас заданы значения потенциала скорости Φ на стенках скважины, т. е.

$$\Phi = \Phi_1 \quad \text{при } \theta = \theta_1 \quad (4.3)$$

и еще для некоторого угла $\theta = \theta_2$

$$\Phi = \Phi_2 \quad \text{при } \theta = \theta_2 \quad (4.4)$$

Этот угол может соответствовать границе области питания.

Воспользуемся уравнением неразрывности в сферических координатах:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) = 0 \quad (4.5)$$

Подставив в него выражение (4.1) для v_θ и положив $v_r = 0$, найдем

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = 0$$

Отсюда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{C}{\sin \theta}, \quad v_\theta = -\frac{k}{\mu} \frac{C}{r \sin \theta},$$

$$\Phi = \frac{C}{2} \ln \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} + B = C \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + B \quad (4.6)$$

Условия (4.3) и (4.4) дают

$$\Phi_1 = \frac{C}{2} \ln \frac{1 - \cos \theta_1}{1 + \cos \theta_1} + B, \quad \Phi_2 = \frac{C}{2} \ln \frac{1 - \cos \theta_2}{1 + \cos \theta_2} + B \quad (4.7)$$

Отсюда

$$C = 2(\Phi_1 - \Phi_2) : \ln \left(\frac{1 - \cos \theta_1}{1 + \cos \theta_1} \frac{1 + \cos \theta_2}{1 - \cos \theta_2} \right) \quad (4.8)$$

Следовательно,

$$v_\theta = -\frac{k}{\mu} \frac{\Delta \Phi}{\ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta_1 - \ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta_2} \frac{1}{r \sin \theta}, \quad \Phi = \Phi_2 + \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2 \ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta_1} \ln \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \quad (4.9)$$

Дебит скважины Q вычислим таким образом:

$$Q = -2\pi \int_{R^-}^{R+h} r v_\theta \sin \theta dr = \frac{2\pi kh}{\mu} \frac{\Delta \Phi}{\ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta_1 - \ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta_2} \quad (4.10)$$

Для того чтобы можно было сравнить полученное для Q выражение с выражением для дебита Q_0 скважины в горизонтальном пласте толщины h

$$Q_0 = \frac{2\pi kh}{\mu} \frac{\Delta \Phi}{\ln \rho_1 - \ln \rho_2} \quad (4.11)$$

(здесь ρ_1 — радиус скважины, ρ_2 — радиус области питания) преобразуем формулу (4.10), введя наряду со сферическим радиусом-вектором r точки M полярный радиус-вектор ρ (фиг. 10), т. е. расстояние точки M от оси z :

$$\rho = r \operatorname{tg} \theta = 2r \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

Положим $r = R$, т. е. будем брать точки на нижней границе пласта. Тогда ρ_1 у нас будет представлять радиус нижнего сечения скважины, ρ_2 — полярный радиус-вектор внутреннего края области питания.

Имеем:

$$\rho_1 = 2R \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta_1 \cos^2 \frac{1}{2} \theta_1, \quad \rho_2 = 2R \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta_2 \cos^2 \frac{1}{2} \theta_2$$

Отсюда

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta_1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta_2} = \frac{\rho_1 \cos \frac{1}{2} \theta_2}{\rho_2 \cos \frac{1}{2} \theta_1}$$

и формула (4.10) примет вид

$$Q = \frac{2\pi kh}{\mu} \frac{\Delta\Phi}{\ln(\rho_1/\rho_2) + 2(\ln \cos \frac{1}{2} \theta_2 - \ln \cos \frac{1}{2} \theta_1)} \quad (4.12)$$

Формула же (4.9) для скорости принимает вид

$$v_\theta = -\frac{k}{\mu} \frac{\Delta\Phi}{\ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta_1 - \ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta_2} \frac{1}{\rho} = \frac{Q}{2\pi h} \frac{1}{\rho} \quad (4.13)$$

В пределе, когда радиус сферы R стремится к бесконечности, получим горизонтальный пласт. При этом мы должны считать, что θ_1 и θ_2 будут стремиться к нулю, и формула (4.12) даст

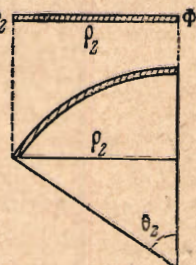
$$\lim_{R \rightarrow \infty} Q = \frac{2\pi kh}{\mu} \frac{\Delta\Phi}{\ln \rho_1 - \ln \rho_2}$$

причем ρ_1 и ρ_2 в пределе совпадут соответственно с ρ_1 и ρ_2 формулы (4.11).

Сопоставляя формулы (4.11) и (4.12), видим, что если сравнить дебиты скважин для двух пластов, изображенных на фиг. 11, то в случае изогнутого пласта дебит будет несколько меньше, так как знаменатель формулы (4.12) больше, чем знаменатель формулы (4.11) на величину

$$2(\ln \cos \frac{1}{2} \theta_1 - \ln \cos \frac{1}{2} \theta_2) \approx -2 \ln \cos \frac{\theta_2}{2}$$

которая всегда меньше, чем 0.69 и, следовательно, мала по сравнению с $\ln \rho_2 - \ln \rho_1$. Отсюда следует, что если мы заменим изогнутый пласт плоским горизонтальным пластом, то для скважины, расположенной в верхней части пласта (не на крутом его склоне) обычная формула (4.11) для дебита сохраняет свою силу без сколько-нибудь заметной погрешности. Формула (4.12) для скорости имеет тот же вид, что и для плоского радиального потока, если вместо действительных расстояний брать их проекции на горизонтальную плоскость.



Фиг. 11

5. Перемещение внутреннего края линии раздела между водой и нефтью.

Предположим, что в начальный момент времени линия раздела (представляющая собой пересечение поверхности раздела с плоскостью меридиана) между водой и нефтью есть горизонтальный отрезок $C''C'$, причем точке C' отвечает дополнение широты $\theta = \theta'$.

Тогда для точки C'' будем иметь $\theta = \theta''$, причем

$$\frac{\cos \theta''}{\cos \theta'} = \frac{R}{R+h} \quad (5.1)$$

Найдем промежуток времени, за который некоторая точка M_0 жидкости с координатами (r, θ_0) переместится в точку $M(r, \theta)$. Так как $v_\theta = r d\theta / dt$, то, пользуясь выражением (4.9), имеем

$$dt = \frac{\mu}{k} \frac{1}{\Delta\Phi} (\ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta_2 - \ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta_1) r^2 \sin \theta d\theta$$

Отсюда

$$t = \frac{\mu}{k} \frac{1}{\Delta\Phi} (\ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta_2 - \ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta_1) r^2 (\cos \theta - \cos \theta_0) \quad (5.2)$$

Применим эту формулу к вычислению промежутка времени T' , за который точка C' дойдет до основания скважины

$$T' = \frac{\mu}{k} \frac{1}{\Delta\Phi} (\ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta_2 - \ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta_1) R^2 (\cos \theta_1 - \cos \theta') \quad (5.3)$$

Для упрощения формулы можно под знаком косинуса принять $\theta_1 = \theta$, так как действительное значение θ_1 чрезвычайно мало (порядка 10^{-4}). Тогда

$$T' = \frac{\mu}{k} \frac{1}{\Delta\Phi} (\ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta_2 - \ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta_1) R^2 (1 - \cos \theta') \quad (5.4)$$

6. Перемещение внешнего края линии раздела между водой и нефтью. К моменту времени T' , когда внутренний край линии раздела дойдет до основания скважины, внешний край линии раздела, т. е. точка C'' (фиг. 12) займет положение D'' . Обозначим угол (фиг. 12) между вертикалью и радиусом-вектором $D''O$ через θ_1'' . С помощью формулы (5.2), полагая в ней

$$t = T', \theta_1 = \frac{1}{2} \pi, \theta_0 = \theta'', r = R + h, \theta = \theta_1'', \text{ найдем}$$

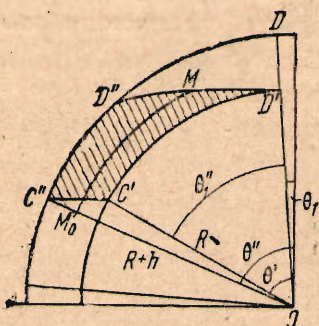
$$T' = \frac{\mu}{k} \frac{1}{\Delta\Phi} (\ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta_2 - \ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta_1) (R + h)^2 (\cos \theta'' - \cos \theta_1'') \quad (5.5)$$

откуда после деления на (5.4) получим

$$\cos \theta_1'' = \cos \theta'' + \frac{R^2}{(R + h)^2} (1 - \cos \theta') \quad (6.1)$$

Найдем высоту y'' точки D'' над горизонтальной плоскостью (фиг. 12)

$$y'' = (R + h) \cos \theta_1'' = (R + h) \left[\cos \theta'' + \frac{1 - \cos \theta'}{(1 + h/R)^2} \right]$$



Фиг. 12

С помощью формулы (5.1) получим

$$y'' = R \left[\cos \theta' + \frac{R}{R + h} (1 - \cos \theta') \right]$$

Отсюда

$$\Delta y = y'' - R = -R(1 - \cos \theta') \frac{h}{R + h} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta y}{h} = -\frac{1 - \cos \theta'}{1 + \alpha} \quad (6.2)$$

где

$$\alpha = \frac{h}{R} \quad (6.3)$$

Видим, что в случае куполообразной залежи всегда $\Delta y < 0$, т. е. внешний край всегда отстает от внутреннего.

Теперь обратимся к вопросу о промежутке времени T'' , за который вся нефть выйдет из пласта. Это есть промежуток времени, по истечении которого точка C'' перейдет в точку D (фиг. 12). По формуле (5.2), в которой следует положить $\theta_0 = \theta''$, $\theta = 0$, $r = R + h$, получим

$$T'' = \frac{\mu}{k} \frac{1}{\Delta\Phi} (\ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta_2 - \ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta_1) (R + h)^2 (1 - \cos \theta'')$$

Сравнивая с формулой (5.4), найдем

$$\frac{T''}{T'} = \left(\frac{R + h}{R} \right)^2 \frac{1 - \cos \theta''}{1 - \cos \theta'}$$

что с помощью формулы (5.1) приведем к виду

$$\frac{T''}{T'} = (1 + \alpha)^2 \frac{1}{1 - \cos \theta'} \left(1 - \frac{\cos \theta'}{1 + \alpha} \right) \quad (6.4)$$

Равность $T'' - T'$ представляет промежуток времени от начала обводнения скважины до полного обводнения. Нетрудно получить с точностью до членов второго порядка относительно α

$$\frac{T'' - T'}{T''} = \left(2 + \frac{\cos \theta'}{1 - \cos \theta'} \right) \alpha + \frac{\alpha^2}{1 - \cos \theta'} \quad (6.5)$$

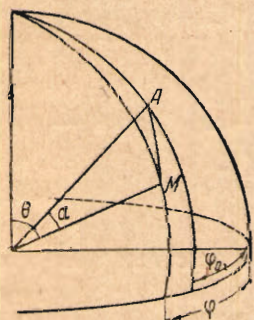
III. Случай группы скважин в куполообразном пласте

7. Потенциал скорости для n скважин на сфере. Если считать, что скважины расположены вдоль радиуса-вектора внешней сферы купола и представляют собой узкие усеченные конусы, то можно получить формулы для скоростей жидкости, движущейся в сферическом куполообразном пласте при наличии нескольких скважин. Однако при нашей постановке задачи мы должны считать, что скважины находятся вблизи вершины сферы, так как если скважина находится на крутом склоне пласта (фиг. 13), то уже нельзя действительную вертикальную линию AB заменять линией BC , идущей по радиусу сферы.



Фиг. 13

Прежде всего найдем потенциал скорости для скважины, проходящей через точку A сферы (фиг. 14), имеющую координаты $(R + h, \theta_0, \varphi_0)$, где θ_0 поперекнему есть дополнение широты, φ_0 — долгота. Пусть будет $M(r, \theta, \varphi)$ —



Фиг. 14

любая точка области движения, в которой мы хотим найти значение потенциала скорости Φ . Проведем через точки A и M дугу большого круга и обозначим через a — центральный угол, на который опирается эта дуга. Тогда в соответствии с формулой (4.9) потенциал скорости

$$\Phi = A \ln \frac{1 - \cos a}{1 + \cos a} + B \quad (7.1)$$

где A и B — постоянные, которые определяются дополнительными условиями.

Как известно из сферической тригонометрии

$$\cos a = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$$

Поэтому

$$\Phi = A \ln \frac{1 - \cos \theta \cos \theta_0 - \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}{1 + \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)} + B \quad (7.2)$$

Если имеем n скважин A_1, A_2, \dots, A_n , положение которых определяется соответственно углами $(\theta_1, \varphi_1), \dots, (\theta_n, \varphi_n)$, то потенциал скорости в точке (r, θ, φ) жидкости не зависит от координаты r и

$$\Phi = \sum_{k=1}^n A_k \ln \frac{1 - \cos \theta \cos \theta_k - \sin \theta \sin \theta_k \cos(\varphi - \varphi_k)}{1 + \cos \theta \cos \theta_k + \sin \theta \sin \theta_k \cos(\varphi - \varphi_k)} + B \quad (7.3)$$

8. Четыре скважины, расположенные на одной параллели. Будем считать давление и дебиты всех скважин одинаковыми. Тогда $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$. Полагая $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_0$ и $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = \frac{1}{2}\pi$, $\varphi_2 = \pi$, $\varphi_3 = \frac{3}{2}\pi$, имеем

$$\Phi = A \ln \prod_{k=0}^3 \frac{1 - \cos \theta \cos \theta_0 - \sin \theta \sin \theta_0 \cos (\varphi - \frac{1}{2}k\pi)}{1 + \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos (\varphi - \frac{1}{2}k\pi)} + B \quad (8.1)$$

Составляющие скорости по меридиану и по параллели будут соответственно

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad v_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$$

В меридианальном сечении, проходящем через скважину, а также в сечении плоскостью меридиана, проходящей посередине между двумя соседними скважинами, составляющая v_φ равна нулю, как это вытекает из симметрии.

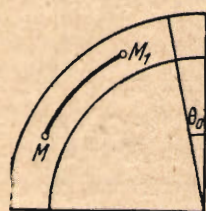
Положим $\varphi = 0$ (плоскость скважины). Тогда

$$\Phi = A \ln \left[\left(\frac{1 - \cos \theta_0 \cos \theta}{1 + \cos \theta_0 \cos \theta} \right)^2 \frac{1 - \cos (\theta - \theta_0)}{1 + \cos (\theta - \theta_0)} \frac{1 - \cos (\theta + \theta_0)}{1 + \cos (\theta + \theta_0)} \right] + B \quad (8.2)$$

Для скорости v_θ в плоскости $\varphi = 0$ получим

$$v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} = \frac{4A}{r} \frac{\cos \theta_0 (1 + \cos^2 \theta_0) \sin^2 \theta}{(\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_0) (1 - \cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta)} \quad (8.3)$$

Интегрируя уравнение (8.3), найдем промежуток времени t , за который некоторая точка $M(\theta, r)$ перейдет в точку $M_1(\theta_1, r)$:



Фиг. 15

$$t = \frac{r^2}{4A \cos \theta_0 (1 + \cos^2 \theta_0)} \int_{\theta}^{\theta_1} \frac{(\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_0) (1 - \cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta)}{\sin^3 \theta} d\theta =$$

$$= \frac{r^2}{4A \cos \theta_0 (1 + \cos^2 \theta_0)} \left\{ \sin^4 \theta_0 \left[\frac{\cos \theta_1}{2 \sin^2 \theta_1} - \frac{1}{2} \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2} \right] - \cos^2 \theta_0 \cos \theta_1 - \right.$$

$$\left. - \sin^4 \theta_0 \left[\frac{\cos \theta}{2 \sin^2 \theta} - \frac{1}{2} \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right] + \cos^2 \theta_0 \cos \theta \right\} \quad (8.4)$$

Для того чтобы найти промежуток времени T' , по прошествии которого внутренний край поверхности раздела (точка C' с углом $\theta = \theta'$) дойдет до скважины, нужно здесь положить $\theta = \theta'$, $\theta_1 = \theta_0$, $r = R$. Получим

$$T' = \frac{R^2}{4A \cos \theta_0 (1 + \cos^2 \theta_0)} \left[\sin^4 \theta_0 \left(\frac{\cos \theta_0}{2 \sin^2 \theta_0} - \frac{1}{2} \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_0}{2} \right) - \cos^2 \theta_0 - \right.$$

$$\left. - \sin^4 \theta_0 \left(\frac{\cos \theta'}{2 \sin^2 \theta'} - \frac{1}{2} \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta'}{2} \right) + \cos^2 \theta_0 \cos \theta' \right] \quad (8.5)$$

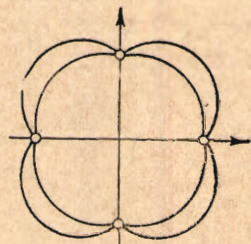
Промежуток времени T'' , за который язык обводнения поднимется к вершинам скважин, получим, полагая в формуле (8.4) $\theta = \theta''$, $\theta_1 = \theta_0$, $r = R + h$. Получим

$$T'' = \frac{(R+h)^2}{4A \cos \theta_0 (1 + \cos^2 \theta_0)} \left[\sin^4 \theta_0 \left(\frac{\cos \theta_0}{2 \sin^2 \theta_0} - \frac{1}{2} \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_0}{2} \right) - \cos^2 \theta_0 - \right.$$

$$\left. - \sin^4 \theta_0 \left(\frac{\cos \theta''}{2 \sin^2 \theta''} - \frac{1}{2} \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta''}{2} \right) + \cos^2 \theta_0 \cos \theta'' \right] \quad (8.6)$$

Разность $T'' - T'$ дает промежуток времени от момента начала обводнения до момента времени, когда образуется «язык обводнения» в верхней части скважин, т. е. когда в плане около скважин будем иметь картину, изображенную на фиг. 16.

Посмотрим теперь, что будет происходить в плоскости меридиана; для которого $\varphi = \frac{1}{4}\pi$, т. е. меридиана, проходящего посередине между двумя скважинами. В плоскости этого меридиана скорости не зависят от долготы, т. е. вектор скорости любой частицы будет лежать в плоскости этого меридиана. Будем считать, что в начальный момент времени поверхность раздела между водой и нефтью представляет собой часть горизонтальной плоскости, заключенной между сферами радиусов R и $R+h$. Тогда в плоскости меридиана $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ получим в качестве линий раздела прямолинейный горизонтальный отрезок, внутренней точке которого соответствует $\theta = \theta'$, а внешней точке $\theta = \theta_1'$, причем попережнему



Фиг. 16

$$\frac{\cos \theta''}{\cos \theta'} = \frac{R}{R+h}$$

В выражении (7.3) для потенциала скорости положим $\varphi = \frac{1}{4}\pi$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \frac{1}{2}\pi$, $\varphi_3 = \pi$, $\varphi_4 = \frac{3}{2}\pi$. Попережнему $\theta_k = \theta_0$ для $k = 1, 2, 3, 4$. Получим

$$\begin{aligned} \Phi = 2A \ln \frac{1 - \cos \theta \cos \theta_0 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \sin \theta \sin \theta_0}{1 + \cos \theta \cos \theta_0 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \sin \theta \sin \theta_0} \times \\ \times \frac{1 - \cos \theta \cos \theta_0 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \sin \theta \sin \theta_0}{1 + \cos \theta \cos \theta_0 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \sin \theta \sin \theta_0} + B \end{aligned} \quad (8.7)$$

Скорость в плоскости рассматриваемого меридиана направлена по меридиану, причем

$$\begin{aligned} v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r'} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \\ = \frac{2A}{r} \left\{ \frac{\sin \theta \cos \theta_0 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cos \theta \sin \theta_0}{1 - \cos \theta \cos \theta_0 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \sin \theta \sin \theta_0} + \frac{\sin \theta \cos \theta_0 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cos \theta \sin \theta_0}{1 - \cos \theta \cos \theta_0 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \sin \theta \sin \theta_0} + \right. \\ \left. + \frac{\sin \theta \cos \theta_0 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cos \theta \sin \theta_0}{1 + \cos \theta \cos \theta_0 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \sin \theta \sin \theta_0} + \frac{\sin \theta \cos \theta_0 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cos \theta \sin \theta_0}{1 + \cos \theta \cos \theta_0 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \sin \theta \sin \theta_0} \right\} = \\ = \frac{4A}{r} \left\{ \frac{\sin \theta \cos \theta_0 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cos \theta \sin \theta_0}{1 - (\cos \theta \cos \theta_0 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \sin \theta \sin \theta_0)^2} + \frac{\sin \theta \cos \theta_0 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cos \theta \sin \theta_0}{1 - (\cos \theta \cos \theta_0 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \sin \theta \sin \theta_0)^2} \right\} = \\ = \frac{4A}{r} \frac{\cos \theta_0 (1 + \cos^2 \theta_0) \sin^3 \theta}{[1 - (\cos \theta \cos \theta_0 + \frac{1}{2}\sqrt{2} \sin \theta \sin \theta_0)^2] [1 - (\cos \theta \cos \theta_0 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \sin \theta \sin \theta_0)^2]} \end{aligned} \quad (8.8)$$

Отсюда для промежутка времени, в течение которого некоторая точка $M(r, \theta)$ переместится в положение $M_1(r, \theta_1)$, получим

$$\begin{aligned} t = \frac{r^2}{4A \cos \theta_0 (1 + \cos^2 \theta_0)} \times \\ \times \int_{\theta}^{\theta_1} \frac{1 - 2 \cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta_0 \sin^2 \theta + (\cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta_0 \sin^2 \theta)^2}{\sin^3 \theta} d\theta = \end{aligned}$$

$$= \frac{r^2}{4.1 \cos \theta_0 (1 + \cos^2 \theta_0)} \left[\sin^4 \theta_0 \left(\frac{1}{2} \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2} - \frac{\cos \theta_1}{2 \sin^2 \theta_1} \right) - \right. \\ \left. - (\cos^2 \theta_0 + \frac{1}{4} \sin^4 \theta_0) \cos \theta_1 - \right. \\ \left. - \sin^4 \theta_0 \left(\frac{1}{2} \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} - \frac{\cos \theta}{2 \sin^2 \theta} \right) + (\cos^2 \theta_0 + \frac{1}{4} \sin^4 \theta_0) \cos \theta \right] \quad (8.9)$$

Если в этой формуле положим $r = R$, $\theta = \theta'$, $t = T'$, то получим уравнение, из которого можно найти значение θ_1 угла, который будет достигнут внутренней точкой линии раздела рассматриваемого меридианального сечения ($\varphi = \frac{1}{4} \pi$) в тот момент времени T' , когда подошвенные воды подойдут к скважинам,

$$T' = \frac{R^2}{2.1 \cos \theta_0 (1 + \cos^2 \theta_0)} \left[\sin^4 \theta_0 \left(\frac{1}{2} \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2} - \frac{\cos \theta_1}{2 \sin^2 \theta_1} \right) - \right. \\ \left. - (\cos^2 \theta_0 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta_0)^2 \cos \theta_1 - \right. \\ \left. - \sin^4 \theta_0 \left(\frac{1}{2} \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta'}{2} - \frac{\cos \theta'}{2 \sin^2 \theta'} \right) + (\cos^2 \theta_0 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta_0)^2 \cos \theta' \right] \quad (8.10)$$

Для того чтобы найти положение внешнего края линии раздела плоскости $\varphi = \frac{1}{4} \pi$, нужно решить относительно θ_2 уравнение

$$T' = \frac{(R + b)^2}{2.1 \cos \theta_0 (1 + \cos^2 \theta_0)} \left[\sin^4 \theta_0 \left(\frac{1}{2} \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta_2}{2} - \frac{\cos \theta_2}{2 \sin^2 \theta_2} \right) - \right. \\ \left. - (\cos^2 \theta_0 + \frac{1}{4} \sin^4 \theta_0) \cos \theta_2 - \sin^4 \theta_0 \left(\frac{1}{2} \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta''}{2} - \frac{\cos \theta''}{2 \sin^2 \theta''} \right) + \right. \\ \left. + (\cos^2 \theta_0 + \frac{1}{4} \sin^4 \theta_0) \cos \theta'' \right] \quad (8.11)$$

9. Примеры. 1°. Одна скважина—в вершине довольно крутого купола, изображенного на фиг. 17. В начальный момент времени нефть занимает часть пласта $A'A'MM'M''$. Спроектируем наш пласт на горизонтальную плоскость. Кольцо $A'A' - M'M''$ шириной в 25 м представляет проекцию поверхности раздела между водой и нефтью в начальный момент времени. К моменту T' , когда подошвенная вода вступит в основание скважины (точка D'), поверхность раздела будет поверхностью, образованной вращением линии $D''D'$ вокруг вертикальной оси. Проекция этой поверхности на горизонтальную плоскость даст круг диаметра $D''N''$. Оказывается, что радиус этого круга будет равен 237 м. При этом опускание внешнего края поверхности раздела, т. е. понижение точки D'' по отношению к точке D' составит 8 м. Другими словами, поверхность раздела при входе в скважину значительно отличается от плоскости.

Если заменим действительное движение плоским и будем следить за перемещением кольца нефти $A'A' - M'M''$, то к моменту времени, когда внутренний край кольца подойдет к скважине, внешний край кольца займет положение окружности $D''N''$, радиус которой оказывается равным 202 м. (Радиус DD' легко вычислить, приравняв площадь круга радиуса DD' площади кольца $A'A' - M'M''$). Разность между $D''D'$ и DD' составляет 35 м, т. е. 15% от радиуса проекции действительной поверхности раздела на горизонтальную плоскость.

По формуле (6.5) получаем, что $(T'' - T') / T' = 0.070$.

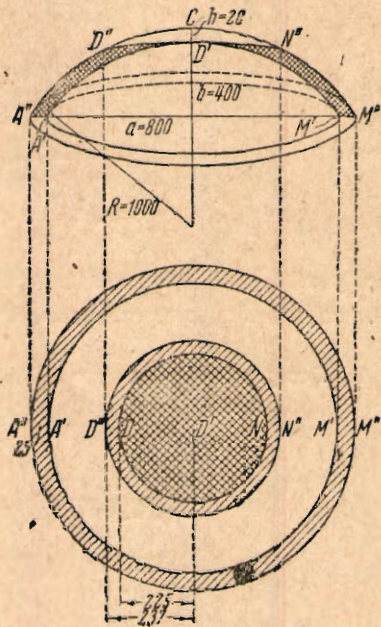
Если обозначить через t'' время истечения площади $A'M'$ фиг. 17, через t' — время истечения площади $A''M''$, то $(t'' - t') / t' = 0.064$.

2°. Рассмотрим скважину в вершине менее крутого купола, размеры которого даны на фиг. 18. Здесь отставание точки D'' от точки D' составляет всего 0.64 м, проекция $D''D'$ на горизонтальную линию дает величину 498 м. Радиус DD' оказывается равным 490 м, т. е. всего на 8 м меньше, чем $D''D'$, что составляет 1.6% от $D''D'$.

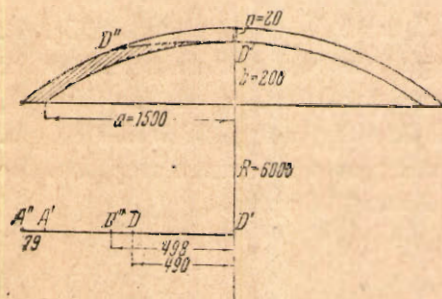
Что касается введенных нами дробей, характеризующих промежутки времени истечения отдельных областей нефти, то здесь они оказались, с принятой степенью точности вычислений, одинаковыми, а именно

$$(T'' - T') / T' = 0.107 \text{ и } (t'' - t') / t' = 0.107.$$

3°. Пусть имеем тот же пласт, что и в первом примере, но на нем возьмем кольцевую батарею скважин. Для простоты ограничимся четырьмя скважинами, расположенными на одинаковом расстоянии друг от друга и притом так, что оси скважин составляют с вертикалью угол, синус которого равен 0.2. Иначе говоря, расстояние от скважины до вертикали, проходящей через вершину купола, равно 200 м. Поверхность раздела между водой и нефтью в начальный момент времени представляет кольцевую область. К моменту начала обводнения поверхность раздела примет более сложную форму. Проекция этой поверхности на горизонтальную плоскость представляет собой область, ограниченную на фиг. 19 сплошными линиями. Если теперь рассмотреть плоское движение с четырьмя скважинами, расположенными по окружности радиуса 200 м, и проследить за перемещением двух жидких линий, которые в начальный момент времени имели вид окружностей радиусов 800 и 825 м (фиг. 18), то в некоторый момент времени эти две линии займут положение, отмеченное пунктиром на фиг. 19. Видим, что разница получается небольшая.



Фиг. 17

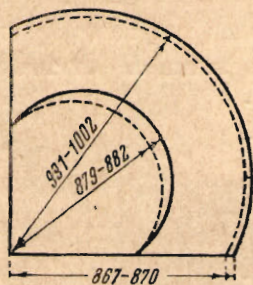


Фиг. 18

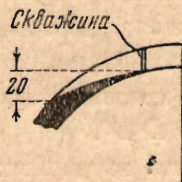
Если обратимся к вертикальному разрезу пласта плоскостью, проходящей через скважину, то увидим, что в момент начала обводнения внешний край поверхности раздела отстает от внутреннего на 20 м (фиг. 20).

4°. Если взять пласт второго примера и разместить четыре скважины так, чтобы их оси составляли с вертикалью угол, синус которого равен 0.1,

то получим, что проекция действительной области и соответствующая ей область горизонтального движения чрезвычайно мало отличаются одна от



Фиг. 19



Фиг. 20

другой (фиг. 20). Отставание внешнего края поверхности раздела от внутреннего в момент прорыва составляет примерно 22 м.

Поступила в редакцию
24 VII 1943

MOTION OF GROUND WATER IN OIL LAYERS

B. E. KAZARNOVSKAIA and P. J. POLOUBARINOVA-KOCHINA

(Summary)

The authors study the motion of the surface separating oil from water in curved oil layers (cylindrical and spherical). For the sake of simplicity the viscosities of oil and water are assumed to be equal.

It is shown that for practical purposes, in the case of domeshaped deposits, one may substitute the plane problem for the spatial with a satisfactory accuracy by projecting the surface of separation onto a horizontal plane (see fig. 4).

A ring-form zone limited by the lines L_1 and L_2 is the result (fig. 4). The moment when the line L_1 passes through the well, corresponds to the beginning of the well flooding in its lower part, and when the line L_2 crosses the well to the beginning of the well flooding along its whole length.

For a cylindrical layer, instead of projecting onto a horizontal plane, the surfaces limiting the layer must be developed onto this plane.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. Нефтепромысловая механика. 1934. Ч. II.
2. Muskat M. The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media.