Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том VII, 1943

ПРЯМОЙ ПРИЕМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ ОТ ВЕКТОРА И ТЕНЗОРА В СЛУЧАЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТ

Д. И. КУТИЛИН
(Москва)

Будем предполагать между декартовыми (прямоугольными) координатами и криволинейными ортогональными зависимость

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, x^2, x^3) \qquad (i' = 1', 2', 3') \tag{1}$$

Представим вектор **A** в декартовой системе координат в виде

$$\mathbf{A} = A^{1'}\mathbf{i}_{1'} + A^{2'}\mathbf{i}_{2'} + A^{3'}\mathbf{i}_3$$

а в криволинейной системе координат в виде

$$\mathbf{A} = A^1\mathbf{r}_1 + A^2\mathbf{r}_2 + A^3\mathbf{r}_3$$

где

$$\mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} \quad \text{и} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2, x^3) \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{2}$$

Дифференциал от этого вектора **A** представится или в виде

$$d\mathbf{A} = dA^{\alpha'}\mathbf{i}_{\alpha'}$$

в декартовой системе координат, или в виде

$$d\mathbf{A} = (dA^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}{}^\alpha A^\beta dx^\gamma)\,\mathbf{r}_\alpha$$

в криволинейной.

Разница между компонентами дифференциала вектора, как видим, состоит в наличии второго слагаемого $\Gamma^i_{\alpha\beta}A^\alpha dx^\beta$, которое появляется вследствие того, что при переходе от одной точки, для которой ищется дифференциал от вектора, к соседней сам базис $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ изменяется.

Это изменение базиса, в случае ортогональной системы, легко свести к одному лишь вращению его как твердого тела, если вместо ко- или контравариантных компонент вектора рассматривать его обыкновенные компоненты, т. е. коэффициенты при единичных векторах базиса. Обозначая эти обыкновенные компоненты через a^i, вектор представим в виде

$$\mathbf{A} = a^\alpha \mathbf{r}_\alpha{}^0 \tag{3}$$

где

$$\mathbf{r}_i{}^0 = \frac{\mathbf{r}_i}{\sqrt{(\mathbf{r}_i)^2}} = \frac{\mathbf{r}_i}{\sqrt{g_{ii}}} \tag{4}$$

и, следовательно,

$$a^i = A^i\sqrt{g_{ii}}$$

В этом случае,—а практически в приложениях он только и используется, — будем иметь

$$d\mathbf{A} = \partial a^{\alpha}\, \mathbf{r}_{\alpha}^{0} + \delta\psi \times \mathbf{A} \tag{5}$$

где $\delta\psi$ — бесконечно малый вектор поворота ортогонального базиса $\mathbf{r}_i^0$ ($i = 1$, 2, 3) при переходе из данной точки в соседнюю бесконечно близкую. В общем случае главную трудность дифференцирования вектора составляет обычно определение всех символов Кристофеля Γ_{jk}^{i}. В предлагаемом приеме эта трудность для ортогональных систем отпадает и заменяется отысканием бесконечно малого вектора поворота $\delta\psi$ и последующим выполнением векторного умножения, что значительно проще. В наиболес употребительных полярных, цилиндрических и сферических координатах вектор поворота определяется непосредственно, именно

1) в полярных координатах (на плоскости)

$$\delta\psi = d\theta\, \mathbf{r}_3^0 = d\theta\, \mathbf{k} \tag{6}$$

где $\mathbf{r}_3^0 = \mathbf{k}$ — единичный вектор, перпендикулярный к плоскости угла θ;

2) в цилиндричесских

$$\delta\psi = d\theta\, \mathbf{k}$$

где $\mathbf{k}$ — единичный вектор оси z;

3) в сферических координатах, где бесконечно малый поворот базиса $\mathbf{r}_1^0$, $\mathbf{r}_2^0$, $\mathbf{r}_3^0$ складывается из поворота вокруг оси z на угол $d\varphi$ и поворота вокруг оси, перпендикулярной к плоскости угла θ, т. е. вокруг оси, определяемой единичным вектором $\mathbf{r}_3^0$, на угол $d\theta$, для $\delta\psi$ будем иметь:

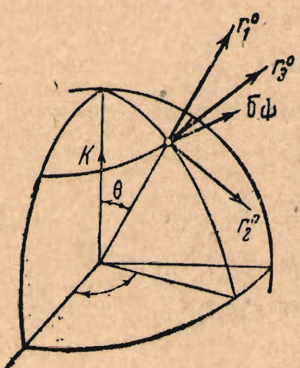
$$\delta\psi = d\varphi\, \mathbf{k} + d\theta\, \mathbf{r}_3^0 \tag{7}$$

причем (фиг. 1)

$$\mathbf{k} = \cos\theta\, \mathbf{r}_1^0 - \sin\theta\, \mathbf{r}_2^0$$

и, следовательно,

$$\delta\psi = d\varphi \cos\theta\, \mathbf{r}_1^0 - d\varphi \sin\theta\, \mathbf{r}_2^0 + d\theta\, \mathbf{r}_3^0 \tag{7'}$$



Фиг. 1

В тех случаях, когда непосредственное определение угла бесконечно малого поворота или очень трудно или невозможно, можно определить его по формуле Пуассона

$$\delta\psi = (d\mathbf{r}_2^0 \cdot \mathbf{r}_3^0)\, \mathbf{r}_1^0 + (d\mathbf{r}_3^0 \cdot \mathbf{r}_1^0)\, \mathbf{r}_2^0 + (d\mathbf{r}_1^0 \cdot \mathbf{r}_2)\, \mathbf{r}_3^0 \tag{8}$$

Здесь и в дальнейшем точка означает скалярное умножение, а отсутствие точки — диадное.

В случае применения этого приема к тензорам второго и высшего порядка операция бесконечно малого поворота должна применяться как та, которую она заменяет, т. е. как операция дифференцирования. Это значит, что при почленном умножении векторное умножение должно быть применено к каждому из единичных векторов, составляющих диадное или полиадное произведенне, и полученные таким образом векторные произведения должны складываться; например,

$$d\,(a^{\alpha\beta}\mathbf{r}_{\alpha}^{0}\mathbf{r}_{\beta}^{0}) = da^{\alpha\beta}\mathbf{r}_{\alpha}^{0}\mathbf{r}_{\beta}^{0} + a^{\alpha\beta}\,(\delta\psi \times \mathbf{r}_{\alpha}^{0})\,\mathbf{r}_{\beta}^{0} + a^{\alpha\beta}\mathbf{r}_{\alpha}^{0}\,(\delta\psi \times \mathbf{r}_{\beta}^{0}) \tag{9}$$

Но для приложений важнее не дифференцирование вектора или тензора, а градиент от них или отыскание градиента, связанное с операцией свертывания (дивергенция). Чтобы получить теперь градиент $\mathbf{A}$, т. е. $\nabla\mathbf{A}$ (где произведение $\nabla\mathbf{A}$ предполагается диадным), предполагая, что $\mathbf{A}$ разложен по единичным векторам базиса криволинейных координат, заметим, что

$$d\mathbf{A}=\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x^{\alpha}}dx^{\alpha}=\mathbf{r}_{\alpha}dx^{\alpha}\cdot\mathbf{r}^{\beta}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x^{\beta}}=d\mathbf{r}\cdot\nabla\mathbf{A} \tag{10}$$

где (в криволинейных координатах) оператор

$$\nabla=\mathbf{r}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \tag{10'}$$

и так как вектор $\mathbf{A}$ предполагается разложенным по единичным векторам базиса, то оператор ∇ представим в виде

$$\nabla=\frac{\sqrt{(\mathbf{r}^{\alpha})^2}}{\sqrt{(\mathbf{r}^{\alpha})^2}}\mathbf{r}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}=\sum_{\alpha=1}^{3}\sqrt{g^{\alpha\alpha}}\,\mathbf{r}_{\alpha}{}^{0}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \tag{11}$$

Эту операцию разобьем на две, а именно сначала выполним дифференцирование вектора, что даст

$$\partial\mathbf{A}=\tilde{\partial}\mathbf{A}+\delta\psi\times\mathbf{A} \tag{12}$$

где $\tilde{\partial}$ означает локальное дифференцирование, после чего оператор ∇ заменится таким:

$$\sum_{\alpha=1}^{3}\sqrt{g^{\alpha\alpha}}\frac{\mathbf{r}_{\alpha}{}^{0}}{\partial x^{\alpha}} \tag{13}$$

и затем диадное умножение, связанное с частным дифференцированием, т. е.

$$\sum_{\alpha=1}^{3}\sqrt{g^{\alpha\alpha}}\frac{\mathbf{r}_{\alpha}{}^{0}}{\partial x^{\alpha}}(\partial\mathbf{A}+\delta\psi\times\mathbf{A}) \tag{14}$$

причем, так как x^i $(i=1, 2, 3)$ предполагаются независимыми переменными, то мы должны положить

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^k}=\begin{cases}1, & \text{если } i=k\\ 0, & \text{если } i\neq k\end{cases}$$

Замечая далее, что в случае ортогональных систем

$$g_{ik}=\begin{cases}g_{ii} & \text{если } i=k\\ 0, & \text{если } i\neq k\end{cases}$$

и что

$$g^{ii}=\frac{1}{g_{ii}} \tag{15}$$

будем окончательно иметь

$$\nabla\mathbf{A}=\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\frac{\mathbf{r}_i{}^{0}}{\partial x^i}\right)(\tilde{\partial}\mathbf{A}+\delta\psi\times\mathbf{A}) \tag{16}$$

Рассмотрим теперь несколько примеров на применение этого приема.

Пример 1. Скорость точки в сферических координатах. Радиус вектора движущейся точки можно представить в виде

$$\mathbf{r}=r\mathbf{r}_1{}^{0}$$

где

$$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}=r(\sin\theta\cos\varphi\,\mathbf{i}+\sin\theta\sin\varphi\,\mathbf{j}+\cos\theta\,\mathbf{k})$$

и, следовательно,

$$\mathbf{r}_1{}^{0}=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r}=\sin\theta\cos\varphi\,\mathbf{i}+\sin\theta\sin\varphi\,\mathbf{j}+\cos\theta\,\mathbf{k}$$

Для скорости $\mathbf{v}$ получим

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{dr}{dt}\mathbf{r}_1^0+r\frac{d\mathbf{r}_1^0}{dt}=\frac{dr}{dt}\mathbf{r}_1^0+r\omega\times\mathbf{r}_1^0$$

где вместо бесконечно малого угла поворота базиса $(\mathbf{r}_1^0, \mathbf{r}_2^0, \mathbf{r}_3^0)$ стоит его угловая скорость, т. е.

$$\omega=\frac{d\psi}{dt}=\dot{\varphi}\cos\theta\,\mathbf{r}_1^0-\dot{\varphi}\sin\theta\,\mathbf{r}_2^0+\dot{\theta}\,\mathbf{r}_3^0$$

Подставляя это значение ω в выражение для $\mathbf{v}$, получим

$$\mathbf{v}=\dot{r}\,\mathbf{r}_1^0+r(\dot{\varphi}\cos\theta\,\mathbf{r}_1^0-\dot{\varphi}\sin\theta\,\mathbf{r}_2^0+\dot{\theta}\,\mathbf{r}_3^0)\times\mathbf{r}_1^0=\dot{r}\,\mathbf{r}_1^0+r\dot{\theta}\,\mathbf{r}_2^0+r\sin\theta\dot{\varphi}\,\mathbf{r}_3^0$$

Пример 2. Ускорение точки в сферических координатах

$$\mathbf{w}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\ddot{r}\,\mathbf{r}_1^0+\dot{r}\dot{\theta}\,\mathbf{r}_2^0+r\ddot{\theta}\,\mathbf{r}_2^0+\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta\,\mathbf{r}_3^0+r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\,\mathbf{r}_3^0+r\ddot{\varphi}\sin\theta\,\mathbf{r}_3^0+$$
$$+(\dot{\varphi}\cos\theta\,\mathbf{r}_1^0-\dot{\varphi}\sin\theta\,\mathbf{r}_2^0+\dot{\theta}\,\mathbf{r}_3^0)\times(\dot{r}\,\mathbf{r}_1^0+r\dot{\theta}\,\mathbf{r}_2^0+r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\mathbf{r}_3^0)=$$
$$=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)\,\mathbf{r}_1^0+(2\dot{r}\dot{\theta}-r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta+r\ddot{\theta})\,\mathbf{r}_2^0+$$
$$+(2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta+2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta+r\ddot{\varphi}\sin\theta)\,\mathbf{r}_3^0$$

т. е.

$$w_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta,\quad w_\theta=2\dot{r}\dot{\theta}-r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta+r\ddot{\theta}$$
$$w_\varphi=2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta+2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta+r\sin\theta\ddot{\varphi}$$

Пример 3. Компоненты деформации и вращения в полярных координатах (плоская задача). Вектор перемещения $\mathbf{u}$ представим в виде

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}_r\mathbf{r}_1^0+\mathbf{u}_\theta\mathbf{r}_2^0$$

Тогда

$$d\mathbf{u}=d\mathbf{r}\cdot\nabla\mathbf{u}$$

Градиентом вектора $\mathbf{u}$ является диада $\nabla\mathbf{u}$, причем оператор

$$\nabla=\frac{\mathbf{r}_1^0}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\mathbf{r}_2^0}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial}{\partial\theta}\qquad(\,g_{11}=\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_1,\quad g_{22}=\mathbf{r}_2\cdot\mathbf{r}_2\,)$$

Так как в полярных координатах $\mathbf{r}=r\cos\theta\,\mathbf{i}+r\sin\theta\,\mathbf{j}$, то

$$\mathbf{r}_1=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r}=\cos\theta\,\mathbf{i}+\sin\theta\,\mathbf{j},\qquad\mathbf{r}_2=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}=r(-\sin\theta\,\mathbf{i}+\cos\theta\,\mathbf{j}),\qquad g_{11}=1,\qquad g_{22}=r^2.$$

Следовательно, для ∇ будем иметь выражение

$$\nabla=\mathbf{r}_1^0\frac{\partial}{\partial r}+\mathbf{r}_2^0\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

Бесконечно малый вектор поворота осей здесь, как мы видели выше, есть

$$\delta\psi=d\theta\,\mathbf{r}_3^0$$

Поэтому для $\nabla\mathbf{u}$ будем иметь

$$\nabla\mathbf{u}=\left(\frac{\mathbf{r}_1^0}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\mathbf{r}_2^0}{\partial\theta}\right)\left[\partial u_r\,\mathbf{r}_1^0+\partial u_\theta\,\mathbf{r}_2^0+\partial\theta\,\mathbf{r}_3^0\times\left(u_r\,\mathbf{r}_1^0+u_\theta\,\mathbf{r}_2^0\right)\right]=$$
$$=\left(\frac{\mathbf{r}^0_1}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\mathbf{r}_2^0}{\partial\theta}\right)\left(\partial u_r\,\mathbf{r}_1^0+\partial u_\theta\,\mathbf{r}_2^0-u_\theta\,\partial\theta\,\mathbf{r}_1^0+u_r\partial\theta\,\mathbf{r}_2^0\right)=$$
$$=\frac{\partial u}{\partial r}\mathbf{r}_1^0\mathbf{r}_1^0+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\mathbf{r}_1^0\mathbf{r}_2^0+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\mathbf{r}_2^0\mathbf{r}_1^0+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\mathbf{r}_2^0\mathbf{r}_2^0-\frac{u_\theta}{r}\mathbf{r}_2^0\mathbf{r}_1^0+\frac{u_r}{r}\mathbf{r}_2^0\mathbf{r}_2^0$$

Симметрируя[1] этот тензор, найдем компоненты деформации в виде коэффициентов при $\mathbf{r}_1{}^0\mathbf{r}_1{}^0$, $\mathbf{r}_2{}^0\mathbf{r}_2{}^0$ и $\mathbf{r}_1{}^0\mathbf{r}_2{}^0+\mathbf{r}_2{}^0\mathbf{r}_1{}^0$ (причем само симметрирование сводится к прибавлению к $\nabla\mathbf{u}$ того же выражения его только с переставленными единичными векторами и делению на 2). Имеем

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u_r}{\partial r},\qquad \varepsilon_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r},\qquad 2\gamma_{r\theta}=\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-\frac{u_\theta}{r}$$

Альтернируя $\nabla\mathbf{u}$, получим компоненту вращения (ротации) в виде коэффициента при $\mathbf{r}_1{}^0\mathbf{r}_2{}^0-\mathbf{r}_2{}^0\mathbf{r}_1{}^0$ (причем само альтернирование сводится к вычитанию из $\nabla\mathbf{u}$ того же самого его выражения только с переставленными единичными векторами и делению на 2). Имеем

$$2\omega_{r\theta}=\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{u_\theta}{r}$$

Пример 4. Компоненты деформации и вращения в сферических координатах (пространственная задача). Вектор перемещения представим в виде

$$\mathbf{u}=u_r\mathbf{r}_1{}^0+u_\theta\mathbf{r}_2{}^0+u_\varphi\mathbf{r}_3{}^0$$

Здесь

$$\mathbf{r}=r(\sin\theta\cos\varphi\,\mathbf{i}+\sin\theta\sin\varphi\,\mathbf{j}+\cos\theta\,\mathbf{k})$$

и, следовательно,

$$\mathbf{r}_1{}^0=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r}=\sin\theta\cos\varphi\,\mathbf{i}+\sin\theta\sin\varphi\,\mathbf{j}+\cos\theta\,\mathbf{k},\qquad g_{11}=1$$

$$\mathbf{r}_2{}^0=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}=r(\cos\theta\cos\varphi\,\mathbf{i}+\cos\theta\sin\varphi\,\mathbf{j}-\sin\theta\,\mathbf{k}),\qquad g_{22}=r^2.$$

$$\mathbf{r}_3{}^0=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}=r(-\sin\theta\sin\varphi\,\mathbf{i}+\sin\theta\cos\varphi\,\mathbf{j}),\qquad g_{33}=r^2\sin^2\theta$$

Поэтому для ∇ будем иметь

$$\nabla=\mathbf{r}_1{}^0\frac{\partial}{\partial r}+\mathbf{r}_2{}^0\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\mathbf{r}_3{}^0\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

Составим теперь градиент вектора $\mathbf{u}$

$$\nabla\mathbf{u}=\left(\mathbf{r}_1{}^0\frac{\partial}{\partial r}+\mathbf{r}_2{}^0\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\mathbf{r}_3{}^0\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(u_r\mathbf{r}_1{}^0+u_\theta\mathbf{r}_2{}^0+u_\varphi\mathbf{r}_3{}^0\right)=$$
$$=\left(\frac{\mathbf{r}_1{}^0}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\mathbf{r}_2{}^0}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\mathbf{r}_3{}^0}{\partial\varphi}\right)\Big[\partial u_r\mathbf{r}_1{}^0+\partial u_\theta\mathbf{r}_2{}^0+\partial u_\varphi\mathbf{r}_3{}^0+$$
$$+\left(\partial\varphi\cos\theta\,\mathbf{r}_1{}^0-\partial\varphi\sin\theta\,\mathbf{r}_2{}^0+\partial\theta\,\mathbf{r}_3{}^0\right)\times\left(u_r\mathbf{r}_1{}^0+u_\theta\mathbf{r}_2{}^0+u_\varphi\mathbf{r}_3{}^0\right)\Big]=$$
$$=\left(\frac{\mathbf{r}_1{}^0}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\mathbf{r}_2{}^0}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\mathbf{r}_3{}^0}{\partial\varphi}\right)\Big[\left(\partial u_r-\partial\varphi u_\varphi\sin\theta-\partial\theta u_\theta\right)\mathbf{r}_1{}^0+$$
$$+\left(\partial u_\theta+\partial\theta\,u_r-\partial\varphi\,u_\varphi\cos\theta\right)\mathbf{r}_2{}^0+\left(\partial u_\varphi+\partial\varphi\,u_\theta\cos\theta+\partial\varphi\,u_r\sin\theta\right))\mathbf{r}_3{}^0\Big]=$$
$$=\frac{\partial u_r}{\partial r}\mathbf{r}_1{}^0\mathbf{r}_1{}^0+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\mathbf{r}_1{}^0\mathbf{r}_2{}^0+\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\mathbf{r}_1{}^0\mathbf{r}_3{}^0+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-\frac{u_\theta}{r}\right)\mathbf{r}_2{}^0\mathbf{r}_1{}^0+$$
$$+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r}\right)\mathbf{r}_2{}^0\mathbf{r}_2{}^0+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}\mathbf{r}_2{}^0\mathbf{r}_3{}^0+\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}-\frac{u_\varphi}{r}\right)\mathbf{r}_3{}^0\mathbf{r}_1{}^0+$$
$$+\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}-\frac{u_\varphi}{r}\operatorname{ctg}\theta\right)\mathbf{r}_3{}^0\mathbf{r}_2{}^0+\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta+\frac{U_r}{r}\right)\mathbf{r}_3{}^0\mathbf{r}_3{}^0$$

---

[1] Т. е. представляя $\nabla\mathbf{u}$ в виде

$$\nabla\mathbf{u}=\tfrac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla)+\tfrac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}-\mathbf{u}\nabla)$$

где первое слагаемое есть симметричный тензор, дающий выражение для компонент деформации, а второе—антисимметричный тензор, дающий выражения для компоненты вращения, т. е. ротации вектора $\mathbf{u}$.

Симметрирование этого тензора даст компоненты тензора деформации в виде коэффициентов при диадных произведениях

$$\mathbf{r}_1{}^0\mathbf{r}_1{}^0,\quad \mathbf{r}_2{}^0\mathbf{r}_2{}^0,\quad \mathbf{r}_3{}^0\mathbf{r}_3{}^0,\quad \mathbf{r}_1{}^0\mathbf{r}_2{}^0+\mathbf{r}_2{}^0\mathbf{r}_1{}^0,\quad \mathbf{r}_2{}^0\mathbf{r}_3{}^0+\mathbf{r}^0{}_3\mathbf{r}_2{}^0,\quad \mathbf{r}_3{}^0\mathbf{r}_1{}^0+\mathbf{r}_1{}^0\mathbf{r}_3{}^0.$$

Таким образом найдем:

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\varepsilon_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r}$$

$$\varepsilon_\varphi=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta+\frac{u_r}{r}$$

$$\gamma_{\theta\varphi}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}-\frac{u_\varphi}{r}\operatorname{ctg}\theta\right)$$

$$\gamma_{\varphi r}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\frac{u_\varphi}{r}\right)$$

$$\gamma_{r\theta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-\frac{u_\theta}{r}\right)$$

Компонентами ротации вектора $\mathbf{u}$ будут коэффициенты антисимметричного тензора, т. е.

$$\omega_{\theta\varphi}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}+\frac{u_\varphi}{r}\operatorname{ctg}\theta\right)$$

$$\omega_{\varphi r}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}-\frac{u_\varphi}{r}-\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\right)$$

$$\omega_{r\theta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{u_\theta}{r}\right)$$

Пример 5. Уравнения упругого равновесия в сферических координатах. Уравнение равновесия в символической форме пишется так:

$$\nabla\cdot\sigma+\rho\mathbf{F}=0$$

где σ—тензор напряжения, именно

$$\sigma=\sigma_r\mathbf{r}_1{}^0\mathbf{r}_1{}^0+\tau_{r\theta}\mathbf{r}_1{}^0\mathbf{r}_2{}^0+\tau_{r\varphi}\mathbf{r}_1{}^0\mathbf{r}_3{}^0+\tau_{\theta r}\mathbf{r}_2{}^0\mathbf{r}_1{}^0+\sigma_\theta\mathbf{r}_2{}^0\mathbf{r}_2{}^0+\tau_{\theta\varphi}\mathbf{r}_2{}^0\mathbf{r}_3{}^0+$$
$$+\tau_{\varphi r}\mathbf{r}_3{}^0\mathbf{r}_1{}^0+\tau_{\varphi\theta}\mathbf{r}_3{}^0\mathbf{r}_2{}^0+\sigma_\varphi\mathbf{r}_3{}^0\mathbf{r}_3{}^0$$

через ρ обозначена плотность и $\mathbf{F}$—сила, приложенная к единице объема, а $\nabla\cdot\sigma$ означает $\operatorname{div}\sigma$.

При этом

$$\tau_{r\theta}=\tau_{\theta r},\quad \tau_{\theta\varphi}=\tau_{\varphi\theta},\quad \tau_{r\varphi}=\tau_{\varphi r}$$

Развертывая первый член левой части уравнения равновесия, представим его в виде:

$$\nabla\cdot\sigma=\left(\mathbf{r}_1{}^0\frac{\partial}{\partial r}+\mathbf{r}_2{}^0\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\mathbf{r}_3{}^0\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\cdot\sigma=$$
$$=\left(\frac{\mathbf{r}_1{}^0}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\mathbf{r}_2{}^0}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\mathbf{r}_3{}^0}{\partial\varphi}\right)\cdot(\tilde{\partial}\sigma+\delta\psi\times\sigma)=$$
$$=\left(\frac{\mathbf{r}_1{}^0}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\mathbf{r}_1{}^0}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\mathbf{r}_3{}^0}{\partial\varphi}\right)\cdot\Big\{\Big[\partial\sigma_r\mathbf{r}_1{}^0\mathbf{r}_1{}^0+\partial\tau_{r\theta}(\mathbf{r}_1{}^0\mathbf{r}_2{}^0+\mathbf{r}_2{}^0\mathbf{r}_1{}^0)+$$
$$+\partial\tau_{r\varphi}(\mathbf{r}_1{}^0\mathbf{r}_3{}^0+\mathbf{r}_3{}^0\mathbf{r}_1{}^0)+\partial\sigma_\theta\mathbf{r}_2{}^0\mathbf{r}_2{}^0+\partial\tau_{\theta\varphi}(\mathbf{r}_2{}^0\mathbf{r}_3{}^0+\mathbf{r}_3{}^0\mathbf{r}_2{}^0)+\partial\sigma_\varphi\mathbf{r}_3{}^0\mathbf{r}_3{}^0+$$
$$+(\partial\varphi\cos\theta\,\mathbf{r}_1{}^0-\partial\varphi\sin\theta\,\mathbf{r}_2{}^0+\partial\theta\,\mathbf{r}_3{}^0)\Big]\times\Big[[\sigma_r\mathbf{r}_1{}^0\mathbf{r}_1{}^0+\tau_{r\theta}(\mathbf{r}_1{}^0\mathbf{r}_2{}^0+\mathbf{r}_2{}^0\mathbf{r}_1{}^0)+$$
$$+\tau_{r\varphi}(\mathbf{r}_1{}^0\mathbf{r}_3{}^0+\mathbf{r}_3{}^0\mathbf{r}_1{}^0)+\sigma_\theta\mathbf{r}_2{}^0\mathbf{r}_2{}^0+\tau_{\theta\varphi}(\mathbf{r}_2{}^0\mathbf{r}_3{}^0+\mathbf{r}_3{}^0\mathbf{r}_2{}^0)+\sigma_\varphi\mathbf{r}_3{}^0\mathbf{r}_2{}^0\mathbf{r}^0\Big]\Big\}$$

Здесь, как отмечалось выше, каждый из единичных векторов, составляющих диадное произведение, должен умножаться векторно на

$$\partial\varphi \cos\theta\, \mathbf{r}_1{}^0 - \partial\varphi \sin\theta\, \mathbf{r}_2{}^0 + \partial\theta\, \mathbf{r}_3{}^0 = \delta\psi$$

Поэтому для удобства вычислений надо заранее составить эти векторные произведения из вектора поворота на $\mathbf{r}_1{}^0$, $\mathbf{r}_2{}^0$, $\mathbf{r}_3{}^0$:

$$\delta\psi \times \mathbf{r}_1{}^0 = \partial\theta\, \mathbf{r}_2{}^0 + \partial\varphi \sin\theta\, \mathbf{r}_3{}^0, \quad \delta\psi \times \mathbf{r}_1{}^0 = \partial\varphi \cos\theta\, \mathbf{r}_2{}^0 - \partial\theta\, \mathbf{r}_1{}^0,$$

$$\delta\psi \times \mathbf{r}_3{}^0 = -\partial\varphi \sin\theta\, \mathbf{r}_1{}^0 - \partial\varphi \cos\theta\, \mathbf{r}_2{}^0$$

Так как операция $\frac{r_1{}^0}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{r_2{}^0}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{r_3{}^0}{\partial\varphi}$ комбинируется со скалярным умножением, то при выписывании развернутых выражений $\delta\psi \times r_1{}^0$, $\delta\psi \times r_2{}^0$, $\delta\psi \times r^0{}_3$ надо опустить все те члены, в которых дифференциал криволинейной координаты стоит не со своим, стоящим на первом месте в диадном произведении единичным вектором. Такие члены все равно в результате ничего не внесут, т. е. надо пропустить для краткости письма все те члены, где встретятся сочетания $\partial\theta\, r_1{}^0$, $\partial\theta\, r_3{}^0$, $\partial\varphi\, r_1{}^0$, $\partial\varphi\, r_2{}^0$.

Таким образом получим

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\sigma + \rho\mathbf{F} = {} & \left(\frac{\mathbf{r}_1{}^0}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\mathbf{r}_2{}^0}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\mathbf{r}_3{}^0}{\partial\varphi}\right)\cdot(\partial\sigma_r\, \mathbf{r}_1{}^0\mathbf{r}_1{}^0 + \partial\tau_{r\theta}\, \mathbf{r}_1{}^0\mathbf{r}_2{}^0 + \\
& + \partial\tau_{r\varphi}\, \mathbf{r}_1{}^0\mathbf{r}_3{}^0 + \partial\tau_{r\theta}\, \mathbf{r}_2{}^0\mathbf{r}_1{}^0 + \partial\sigma_\theta\, \mathbf{r}_2{}^0\mathbf{r}_2{}^0 + \partial\tau_{\theta\varphi}\, \mathbf{r}_2{}^0\mathbf{r}_3{}^0 + \partial\tau_{r\varphi}\, \mathbf{r}_3{}^0\mathbf{r}_1{}^0 + \\
& + \partial\tau_{\theta\varphi}\, \mathbf{r}_3{}^0\mathbf{r}_2{}^0 + \partial\sigma_\varphi\, \mathbf{r}_3{}^0\mathbf{r}_3{}^0 + \sigma_r\, \partial\theta\, \mathbf{r}_2{}^0\mathbf{r}_1{}^0 + \sigma_r\, \partial\varphi \sin\theta\, \mathbf{r}_3{}^0\mathbf{r}_1{}^0 + \\
& + \partial\tau_{r\theta}\, \theta\, \mathbf{r}_2{}^0\mathbf{r}_2{}^0 + \tau_{r\theta}\, \partial\varphi \sin\theta\, \mathbf{r}_3{}^0\mathbf{r}_2{}^0 + \tau_{r\varphi}\, \partial\theta\mathbf{r}_2{}^0\mathbf{r}_3{}^0 + \tau_{r\varphi}\, \partial\varphi \sin\theta\, \mathbf{r}_3{}^0\mathbf{r}_3{}^0 + \\
& + \tau_{\theta r}\, \partial\varphi \cos\theta\, \mathbf{r}_3{}^0\mathbf{r}_1{}^0 + \tau_{r\theta}\, \partial\theta\, \mathbf{r}_2{}^0\mathbf{r}_2{}^0 + \sigma_\theta\, \partial\varphi \cos\theta\, \mathbf{r}_3{}^0\mathbf{r}_2{}^0 - \sigma_\theta\, \partial\theta\, \mathbf{r}_2{}^0\mathbf{r}_1{}^0 + \\
& + \tau_{\theta r}\, \partial\varphi \cos\theta\, \mathbf{r}_3{}^0\mathbf{r}_3{}^0 + \tau_{\varphi r}\, \partial\varphi \sin\theta\, \mathbf{r}_3{}^0\mathbf{r}_3{}^0 + \tau_{\varphi\theta}\, \partial\varphi \cos\theta\, \mathbf{r}_3{}^0\mathbf{r}_3{}^0 - \\
& - \sigma_\varphi\, \partial\varphi \sin\theta\, \mathbf{r}_3{}^0\mathbf{r}_1{}^0 - \sigma_\varphi\, \partial\varphi \cos\theta\, \mathbf{r}_3{}^0\mathbf{r}_2{}^0 + \ldots) + \rho F_r\, \mathbf{r}_1{}^0 + \rho F_\theta \mathbf{r}_2{}^0 + \rho F_\varphi\, \mathbf{r}_3{}^0
\end{aligned}$$

(Точки поставлены вместо тех членов, которые после скалярного умножения на оператор ничего не внесут в результат).

Таким образом

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\sigma + \rho\mathbf{F}\, & \frac{\partial\sigma_r}{\partial r}\mathbf{r}_1{}^\theta + \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}\mathbf{r}_2{}^0 + \frac{\partial\tau_{r\varphi}}{\partial r}\mathbf{r}_3{}^0 + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}\mathbf{r}_1{}^0 + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}\mathbf{r}_2{}^0 + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\varphi}}{\partial\theta}\mathbf{r}_3{}^0 + \\
& + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\tau_{r\varphi}}{\partial\varphi}\mathbf{r}_1{}^0 + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\tau_{\theta\varphi}}{\partial\varphi}\mathbf{r}_2{}^0 + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\sigma_\varphi}{\partial\varphi}\mathbf{r}_3{}^0 + \frac{\sigma_r}{r}\mathbf{r}_1{}^0 + \frac{\tau_{r\theta}}{r}\mathbf{r}_2{}^0 + \\
& + \frac{\tau_{r\varphi}}{r}\mathbf{r}_3{}^0 - \frac{\sigma_\theta}{r}\mathbf{r}_1{}^0 + \frac{\sigma_r}{r}\mathbf{r}_1{}^0 + \frac{\tau_{r\theta}}{r}\mathbf{r}_2{}^0 + \frac{\tau_{r\varphi}}{r}\mathbf{r}_3{}^0 + \frac{\tau_{r\theta}}{r}\operatorname{ctg}\theta\, \mathbf{r}_1{}^0 + \\
& + \frac{\tau_{r\theta}}{r}\mathbf{r}_2{}^0 + \frac{\sigma_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta\, \mathbf{r}_2{}^0 + \frac{\tau_{\theta\varphi}}{r}\operatorname{ctg}\theta\, \mathbf{r}_3{}^0 + \frac{\tau_{r\varphi}}{r}\mathbf{r}_3{}^0 + \frac{\tau_{\theta\varphi}}{r}\operatorname{ctg}\theta\, \mathbf{r}_3{}^0 - \\
& - \frac{\sigma_\varphi}{r}\mathbf{r}_1{}^0 - \frac{\sigma_\varphi}{r}\operatorname{ctg}\theta\, \mathbf{r}_2{}^0 + \rho F_r\, \mathbf{r}_1{}^0 + \rho F_\theta\, \mathbf{r}_2{}^0 + \rho F_\varphi\, \mathbf{r}_3{}^0 = 0
\end{aligned}$$

Отсюда получаются уравнения равновесия в обычном виде приравниванием нулю коэффициентов при единичных векторах.

Пример 6. Оператор Лапласа $\Delta V = \nabla\cdot\nabla V$ в сферических координатах.

Так как

$$\nabla = \mathbf{r}_1{}^0\frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{r}_2{}^0\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathbf{r}_3{}^0\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

то согласно предыдущему

$$\triangle V=\left(\mathbf{r}_1{}^0\frac{\partial}{\partial r}+\mathbf{r}_2{}^0\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\mathbf{r}_3{}^0\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{r}_1{}^0+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\mathbf{r}_2{}^0+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\mathbf{r}_3{}^0\right)=$$

$$=\left(\frac{\mathbf{r}_1^0}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\mathbf{r}_2^0}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\mathbf{r}_3^0}{\partial\varphi}\right)\cdot\left(\tilde{\partial}\nabla V+\delta\psi\times\nabla V\right)=$$

$$=\left(\frac{\mathbf{r}_1^0}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\mathbf{r}_3^0}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\mathbf{r}_3^0}{\partial\varphi}\right)\cdot\left[\partial\frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{r}_1{}^0+\partial\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)\mathbf{r}_2{}^0+\partial\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)\mathbf{r}_3{}^0+\right.$$

$$\left.+\left(\partial\varphi\cos\theta\,\mathbf{r}_1{}^0-\partial\varphi\sin\theta\,\mathbf{r}_2{}^0+\partial\theta\,\mathbf{r}_3{}^0\right)\times\left(\frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{r}_1{}^0+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\mathbf{r}_2{}^0+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\mathbf{r}_3{}^0\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{\mathbf{r}_1^0}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\mathbf{r}_2^0}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\mathbf{r}_3^0}{\partial\varphi}\right)\cdot\left(\frac{\partial^2 V}{\partial r}\mathbf{r}_1{}^0+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta}\mathbf{r}_2{}^0+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi}\mathbf{r}_3{}^0+\right.$$

$$\left.+\partial\theta\frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{r}_2{}^0+\frac{1}{r}\partial\varphi\cos\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\mathbf{r}_3{}^0+\partial\varphi\sin\theta\frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{r}_3{}^0+\ldots\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial V}{\partial\theta}\operatorname{ctg}\theta$$

Таким образом

$$\triangle=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\operatorname{ctg}\theta$$

Поступила в редакцию
15 VIII 1943

DIRECT METHOD OF COMPUTING THE VECTOR AND TENSOR DERIVATIVES IN ORTHOGONAL SYSTEMS OF CURVILINEAR COORDINATES

D. I. KUTILIN

(Summary)

The article suggests a procedure for computing the vector and tensor gradient presented in a diadic-poliadic form.

Assuming a relation between the orthogonal curvilinear system of coordinates and a Decartes (rectilinear) system in the form of (1), we have (2), (3) and (4).

In practically important case of the field vector **A**, we have (5), where $\delta\psi$ is infinitely small angle of rotation calculated either directly with (6), (7′) or by the Poisson's formula (8).

The gradient of a vector is expressed by (16), where ∇ is determined by the formulae (10), (10′), (11), (15).

The operation ∇ in (16) falls into two parts: initially the differentiation (12) took place then the diadic multiplication by the operator enclosed into the first parenthesis (16) is applied to the obtained results.

Examples are given for the following cases: 1) velocity in spherical coordinates; 2) acceleration in spherical coordinates; 3) components of deformation and of rotation in polar coordinates; 4) the same in spherical coordinates, 5) equations for the elastic equilibrium in spherical coordinates; and 6) Laplace's operator in spherical coordinates.