Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том VII, 1943

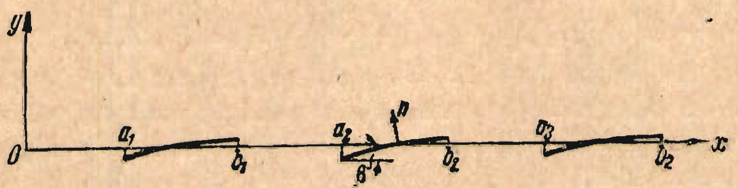
КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ПЛАСТИНОК НА ПОВЕРХНОСТИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ

М. Д. ХАСКИНД
(Николаев)

1. Постановка задачи. Рассмотрим плоскую задачу о колебаниях нескольких слабо изогнутых пластинок на поверхности тяжелой жидкости, занимающей все нижнее полупространство. Предположим, что погружения и углы наклона к горизонту $\beta(x)$ элементов смоченных частей пластинок малы и что колебания пластинок бесконечно малы.

Предположим далее, что волны, образующиеся на свободной поверхности, будут расходиться в обе стороны от пластинок, т. е. что нет волн, набегающих на пластинки с одной или с другой стороны свободной поверхности. Естественно далее потребовать, чтобы скорость жидкости в области, занятой жидкостью, оставалась ограниченной.

Задачу об определении движения жидкости будем решать приближенно, пользуясь следующими упрощениями: граничные условия на свободной поверхности переносим по вертикали на горизонтальную прямую, совпадаю-



Фиг. 1

щую с первоначальным невозмущенным уровнем жидкости; граничные условия на смоченных поверхностях пластинок переносим по вертикали на отрезки $a_s b_s$ (фиг. 1), считаемые в силу малости колебаний неподвижными; в граничных условиях по углу β сохраняем только малые первого порядка.

Пусть Oxy — неподвижная система координат. Ось x горизонтальна и совпадает с первоначальным уровнем жидкости, ось y направлена вертикально.

Для определения потенциала скоростей $\Phi(x, y, t)$ возмущенного движения несжимаемой жидкости имеем на отрезках $a_s b_s$ граничное условие обтекания

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = v_n(x, t) \tag{1.1}$$

где $v_n(x, t)$ — проекция на нормаль, направленную вверх, скорости точек пластинок на смоченных поверхностях. Функция $v_n(x, t)$ зависит от формы смоченной поверхности, от поступательных и угловых скоростей пластинок.

Если все пластинки движутся как твердые тела, то с точностью до малых третьего порядка по β

$$v_n(x, t) = V_s' + \Omega_s' x \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.2}$$

где V_s' — проекция на ось y поступательной скорости пластинки, а Ω_s' — угловая скорость. Для составления второго граничного условия воспользуемся интегралом Лагранжа

$$p - p_0 = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \rho \frac{1}{2} |\operatorname{grad} \Phi|^2 - \rho g y \tag{1.3}$$

где p_0 — атмосферное давление, ρ — плотность и g — ускорение силы тяжести.

Считая $|\operatorname{grad} \Phi|$ на свободной поверхности малым порядка β, формулу (1.3) можно представить в виде

$$p - p_0 = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \rho g y \tag{1.4}$$

Пусть $Y(x, t)$ — уравнение смоченных частей пластинок и свободной поверхности, тогда, дифференцируя (1.4) по времени, получим

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\rho g \frac{\partial Y(x, t)}{\partial t} - \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \tag{1.5}$$

Между функцией $Y(x, t)$ и потенциалом скорости Φ на пластинках и на свободной поверхности жидкости имеет место соотношение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial Y(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial Y(x, t)}{\partial t} \tag{1.6}$$

Считая $Y(x, t)$ малым порядка β, можно пренебречь первым слагаемым правой части соотношения (1.6). После подстановки в (1.5) получим

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\rho g \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \tag{1.7}$$

Рассмотрим гармонические колебания пластинок, происходящие с одной и той же частотой k и определяющиеся формулой

$$v_n(x, t) = v_s(x) e^{jkt} \qquad (j = \sqrt{-1}, \quad s = 1, 2, \ldots, n)$$

Комплексная функция $v_s(x) = v_{1s}(x) + j v_{2s}(x)$ задает форму колебаний пластинок. Здесь и дальше условимся для произведений, содержащих множитель e^{jkt}, рассматривать только их действительную часть по мнимой единице j.

При колебаниях пластинки $a_s b_s$ с двумя степенями свободы $v_s(x) = v_s + \Omega_s x$.

Считая колебания жидкости установившимися, положим

$$\Phi(x, y, t) = \varphi(x, y) e^{jkt} \tag{1.8}$$

Подставив в (1.8), находим

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \rho g \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \nu \varphi \right) e^{jkt} \tag{1.9}$$

где $\nu = k^2 / g$. На свободной поверхности $p = p_0$; поэтому имеем условие

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \nu \varphi = 0 \tag{1.10}$$

Из формулы (1.4), положив $p = p_0$ и приняв во внимание (1.8), получим уравнение для определения свободной поверхности

$$Y(x, t) = -\frac{k}{g} \varphi(x, 0) j e^{jkt} \tag{1.11}$$

Давления $p(x, t) - p_0$ на смоченных поверхностях пластинок будем определять, пользуясь формулой (1.4). Если эти давления известны, то реакцию жидкости можно вычислить, не рассматривая гидродинамической задачи.

Исследование задачи показывает, что характеристическая функция как функция от ν, имеет логарифмическую особенность при $\nu=0$. Скорость жидкости у краев пластинок получается, вообще говоря, бесконечной.

В предельном случае $\nu=0$ свободная граница жидкости представляется неподвижной поверхностью. Движение жидкости в этом случае совпадает с движением безграничной жидкости в нижней полуплоскости от действия распределения источников на отрезках $a_s b_s$.

При больших ν порядка $1/\beta$, задача об определении возмущенного движения жидкости при гармонических колебаниях пластинок сводится к задаче об определении бесциркуляционного возмущенного движения безграничной жидкости при заданных нормальных скоростях на отрезках $a_s b_s$.

В § 3 даем решение задачи в случае малых значений числа ν. В качестве примера рассматриваем поступательные (вертикальные) и вращательные колебания системы пластинок.

2. Основные формулы. Пусть характеристическая функция течения

$$W(z, t)=(\varphi+i\psi)e^{jkt}$$

где ψe^{jkt} — функция тока, $i=\sqrt{-1}$.

Для определения функции $w(z)=\varphi+i\psi$ будем исходить из условий:

1°. При $y<0$ вне окрестности точек $z=a_s$ и $z=b_s$ $(s=1, 2, \ldots, n)$, d^2w/dz^2 и dw/dz ограничены, причем dw/dz и d^2w/dz^2 исчезают при $y\to-\infty$.

2°. При $y=0$ на отрезках $a_s b_s$ имеем условие обтекания

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=v_s(x)$$

3°. На свободной границе жидкости при $y=0$ имеем линеаризированное условие о постоянстве давления

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\nu\varphi=0 \qquad \text{или} \qquad \operatorname{Im}\left(\frac{dw}{dz}+i\nu w\right)=0$$

4°. На свободной поверхности вдали от колеблющихся пластинок имеем бегущие волны, расходящиеся в обе стороны от пластинок, т. е.

$$\Phi(x, y, t)=Ae^{\nu y}e^{j(kt-\nu x)} \quad \text{при } x\to+\infty$$
$$\Phi(x, y, t)=Be^{\nu y}e^{j(kt+\nu x)} \quad \text{при } x\to-\infty$$

где A и B — постоянные, подлежащие определению.

Рассмотрим функцию

$$\omega(z)=\frac{d^2w}{dz^2}+i\nu\frac{dw}{dz}$$

На основании 3°, применив принцип симметрии Шварца, функцию $\omega(z)$ продолжаем в верхнее полупространство. Приняв во внимание условие 1°, находим, что $\omega(z)$ голоморфно и однозначно во всей плоскости вне отрезков $a_s b_s$.

Разложение $\omega(z)$ вблизи бесконечно удаленной точки имеет вид

$$\omega(z)=\frac{\gamma_0}{z}-\frac{\gamma_1}{z^2}-\frac{2\gamma_2}{z^3}-\ldots$$

где γ_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ — действительные числа. Для того чтобы функция

$$\frac{dw}{dz}+i\nu w=\int\omega(z)\,dz$$

удовлетворяла условию 3°, необходимо положить $\gamma_0=0$.

Таким образом мы убеждаемся, что комбинация $dw/dz+i\nu w$ голоморфна всюду вне отрезков $a_s b_s$ и вблизи бесконечно удаленной точки справедливо разложение

$$\frac{dw}{dz}+i\nu w=\frac{\gamma_1}{z}+\frac{\gamma_2}{z^2}+\ldots \tag{2.1}$$

Постоянная интегрирования включена в $w(z)$. Этим самым аддитивная постоянная полностью определена. В самом деле, рассматривая (2.1) как уравнение относительно $w(z)$, легко убедиться, что $w=0$ при $z=-i\infty$.

На отрезках $a_s b_s$ комбинация $dw/dz+i\nu w$ удовлетворяет условиям симметрии. На нижней стороне отрезка $a_s b_s$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{dw}{dz}+i\nu w\right)=-v_s+\nu\varphi(x) \tag{2.2}$$

На верхней стороне отрезка $a_s b_s$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{dw}{dz}+i\nu w\right)=-[-v_s+\nu\varphi(x)] \tag{2.3}$$

а $\operatorname{Re}(dw/dz+i\nu w)$ с обеих сторон отрезка $a_s b_s$ одинакова.

Применив формулу Коши к функции $dw/dz+i\nu w$, имеем

$$\frac{dw}{dz}+i\nu w=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\left(\frac{dw}{d\zeta}+i\nu w(\zeta)\right)\frac{d\zeta}{\zeta-z}$$

где L — круг малого радиуса с центром в точке z.

Деформируем круг L в контур, стягиваемый к пластинкам $a_s b_s$, и в круг весьма большого радиуса с центром в начале координат. Интеграл по кругу большого радиуса равен нулю, так как $dw/dz+i\nu w$ исчезнет в бесконечности.

Таким образом на основании условия симметрии (2.2) и (2.3) найдем

$$\frac{dw}{dz}+i\nu w=-\frac{1}{\pi}\sum_{s=1}\int\limits_{a_s}^{b_s}\frac{v_s(\xi)}{z-\xi}\,d\xi+\frac{\nu}{\pi}\sum_{s=1}^{n}\int\limits_{a_s}^{b_s}\frac{\varphi(\xi)}{z-\xi}\,d\xi \tag{2.4}$$

Если функция $\varphi(x)$ на отрезках $a_s b_s$ определена, то, рассматривая соотношение (2.4) как дифференциальное уравнение относительно $w(z)$, получим

$$w(z)=e^{-i\nu z}\left[A_1+iA_2-\frac{1}{\pi}\sum_{s=1}^{n}\int\limits_{+\infty}^{z}\int\limits_{a_s}^{b_s}\frac{v_s(\xi)}{\tau-\xi}e^{i\nu\tau}\,d\xi\,d\tau+\frac{\nu}{\pi}\sum_{s=1}^{n}\int\limits_{+\infty}^{z}\int\limits_{a_s}^{b_s}\frac{\varphi(\xi)}{\tau-\xi}e^{i\nu\tau}\,d\xi\,d\tau\right] \tag{2.5}$$

где A_1 и A_2 — постоянные интегрирования.

Асимптотические выражения функции $w(z)$ при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$ соответственно имеют вид

$$w(z)=(A_1+iA_2)e^{-i\nu z},\qquad w(z)=(B_1+iB_2)e^{-i\nu z} \tag{2.6}$$

Здесь

$$B_1+iB_2=A_1+iA_2-\frac{1}{\pi}\sum_{s=1}^{n}\int\limits_{+\infty}^{-\infty}\int\limits_{a_s}^{b_s}\frac{v_s(\xi)}{\tau-\xi}e^{i\nu\tau}\,d\xi\,d\tau+\frac{\nu}{\pi}\sum_{s=1}^{n}\int\limits_{+\infty}^{-\infty}\int\limits_{a_s}^{b_s}\frac{\varphi(\xi)}{\tau-\xi}e^{i\nu\tau}\,d\xi\,d\tau \tag{2.7}$$

Интегрирование по τ производится по некоторой кривой, расположенной в нижней полуплоскости. Поэтому находим

$$\int\limits_{+\infty}^{-\infty}\frac{e^{i\nu\tau}}{\tau-\xi}\,d\tau=\int\limits_K\frac{e^{i\nu\tau}}{\tau-\xi}\,d\tau=-2\pi i e^{i\nu\xi} \tag{2.8}$$

где K — маленький круг около точки $\tau=\xi$. Таким образом получим

$$B_1+iB_2=A_1+iA_2+2i\sum_{s=1}^{n}\int\limits_{a_s}^{b_s}v_s(\xi)\,e^{i\nu\xi}d\xi-2i\nu\sum_{s=1}^{n}\int\limits_{a_s}^{b_s}\varphi(\xi)\,e^{i\nu\xi}d\xi \tag{2.9}$$

Из формул (2.6) и (2.7) следует, что условие 4° удовлетворим, если положим

$$A_1 = jA_2 = A, \qquad B_1 = -jB_2 = B \tag{2.10}$$

Приняв эти равенства во внимание и заменив в формуле (2.9) i на j и на $-j$, получаем уравнения для определения A и B

$$A = -j\sum_{s=1}^{n}\int_{a_s}^{b_s} v_s(\xi)\, e^{j\nu\xi}\, d\xi + j\nu\sum_{s=1}^{n}\int_{a_s}^{b_s}\varphi(\xi)\, e^{j\nu\xi}\, d\xi \tag{2.11}$$

$$B = -j\sum_{s=1}^{n}\int_{a_s}^{b_s} v_s(\xi)\, e^{-j\nu\xi}\, d\xi + j\nu\sum_{s=1}^{n}\int_{a_s}^{b_s}\varphi(\xi)\, e^{-j\nu\xi}\, d\xi \tag{2.12}$$

Составим уравнение для определения $\varphi(x)$ на отрезках a_sb_s. Для этого в (2.5) устремим z, принадлежащее к нижней полуплоскости, к действительному значению x, лежащему внутри отрезка a_mb_m $(m = 1, 2, \ldots, n)$, получим

$$\varphi(x) + i\psi(x) = e^{-i\nu x}\Big[A - ijA - \frac{1}{\pi}\sum_{s=1}^{n}\int_{+\infty}^{x}\int_{a_s}^{b_s}\frac{v_s(\xi)}{\tau-\xi}\, e^{i\nu\tau}\, d\xi\, d\tau +$$

$$+\frac{\nu}{\pi}\sum_{s=1}^{n}\int_{+\infty}^{x}\int_{a_s}^{b_s}\frac{\varphi(\xi)}{\tau-\xi}\, e^{i\nu\tau} d\xi\, d\tau\Big] \tag{2.13}$$

Отделив действительную и мнимую части в формуле (2.13) и приняв во внимание (2.11), получим систему двух уравнений

$$\varphi(x) = \sum_{s=1}^{n}\int_{a_s}^{b_s} K_1(x, \xi)\,\varphi(\xi)\, d\xi + \sum_{s=1}^{n}\int_{a_s}^{b_s} L_1(x, \xi)\, v_s(\xi)\, d\xi \tag{2.14}$$

$$\psi(x) = \sum_{s=1}^{n}\int_{a_s}^{b_s} K_2(x, \xi)\,\varphi(\xi)\, d\xi + \sum_{s=1}^{n}\int_{a_s}^{b_s} L_2(x, \xi)\, v_s(\xi)\, d\xi \tag{2.15}$$

где

$$K(x, \xi) = K_1(x, \xi) + iK_2(x, \xi) = \frac{\nu}{\pi}e^{-i\nu x}\int_{+\infty}^{x}\frac{e^{i\nu\tau}}{\tau-\xi}\, d\tau + j\nu(1 - ij)\, e^{-i\nu x}e^{j\nu\xi} \tag{2.16}$$

$$L(x, \xi) = L_1(x, \xi) + iL_2(x, \xi) = -\frac{1}{\pi}e^{-i\nu x}\int_{+\infty}^{x}\frac{e^{i\nu\tau}}{\tau-\xi}\, d\tau - j(1 - ij)\, e^{-i\nu x}e^{j\nu\xi} \tag{2.17}$$

На отрезках a_mb_m имеем $\partial\varphi / \partial y = -\partial\psi / \partial x = -v_m(x)$. Следовательно,

$$\psi = \psi_m - \int_{a_m}^{x} v_m(x')\, dx'$$

Здесь ψ_m — значение функции ψ в точке $(a_m, 0)$.

Легко убедиться, что для решения задачи нужно решить только (2.14). В самом деле, покажем, что если функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (2.14), то правая часть уравнения (2.15) на отрезке a_mb_m равна

$$\mathrm{const} - \int_{a_m}^{x} v_m(x')\, dx'$$

Рассмотрим для этого функцию комплексного переменного z

$$N(z) = \sum_{s=1}^{n}\int_{a_s}^{b_s} K(z, \xi)\,\varphi(\xi)\, d\xi + \sum_{s=1}^{n}\int_{a_s}^{b_s} L(z, \xi)\, v_s(\xi)\, d\xi. \tag{2.18}$$

На основании тождества

$$\frac{d}{dz}e^{i\nu z}N(z)=e^{i\nu z}\left\{\frac{dN}{dz}+i\nu N\right\}$$

находим

$$\frac{dN}{dz}=-i\nu N+\frac{\nu}{\pi}\sum_{s=1}^{n}\int_{a_s}^{b_s}\frac{\varphi(\xi)}{z-\xi}d\xi-\frac{1}{\pi}\sum_{s=1}^{n}\int_{a_s}^{b_s}\frac{v_s(\xi)}{z-\xi}d\xi$$

Устремляя z из нижней полуплоскости к значению x внутри промежутка $a_m<x<b_m$, получим

$$\lim_{z\to x}N(z)=N(x),$$

$$\lim_{z\to x}\int_{a_m}^{b_m}\frac{\varphi(\xi)}{z-\xi}d\xi=\text{v. p.}\int_{a_m}^{b_m}\frac{\varphi(\xi)}{x-\xi}d\xi+\pi i\varphi(x)$$

$$\lim_{z\to x}\int_{a_m}^{b_m}\frac{v_m(\xi)}{z-\xi}d\xi=\text{v. p.}\int_{a_m}^{b_m}\frac{v_m(\xi)}{x-\xi}d\xi+\pi i v_m(x)$$

где v. p. означает, что берется главная часть интеграла. Следовательно,

$$\lim_{z\to x}\frac{dN}{dz}=-i\nu N(x)+\frac{\nu}{\pi}\sum_{s\neq m}\int_{a_s}^{b_s}\frac{\varphi(\xi)}{x-\xi}d\xi+\frac{\nu}{\pi}\,\text{v. p.}\int_{a_m}^{b_m}\frac{\varphi(\xi)}{x-\xi}d\xi+i\nu\varphi(x)-$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{s\neq m}\int_{a_s}^{b_s}\frac{v_s(\xi)}{x-\xi}d\xi-\frac{1}{\pi}\,\text{v. p.}\int_{a_m}^{b_m}\frac{v_m(\xi)}{x-\xi}d\xi-iv_m(x)\qquad(2.19)$$

Так как

$$N(x)=\sum_{s=1}^{n}\int_{a_s}^{b_s}K(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi+\sum_{s=1}^{n}\int_{a_s}^{b_s}L(x,\xi)\,v_s(\xi)\,d\xi$$

то, отделяя в $N(x)=N_1(x)+iN_2(x)$ действительную и мнимую части, будем иметь

$$N_1(x)=\sum_{s=1}^{n}\int_{a_s}^{b_s}K_1(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi+\sum_{s=1}^{n}\int_{a_s}^{b_s}L_1(x,\xi)\,v_s(\xi)\,d\xi$$

$$N_2(x)=\sum_{s=1}^{n}\int_{a_s}^{b_s}K_2(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi+\sum_{s=1}^{n}\int_{a_s}^{b_s}L_2(x,\xi)\,v_s(\xi)\,d\xi$$

и, если выполняется уравнение (2.14), то $N_1(x)=\varphi(x)$.

Поэтому из формулы (2.19) находим

$$\operatorname{Im}\lim_{z\to x}\frac{dN}{dz}=-\nu N_1(x)+\nu\varphi(x)-v_m(x)=-v_m(x)$$

Отсюда следует, что

$$N_2(x)=\text{const}-\int_{a_m}^{x}v_m(x')\,dx'\qquad\text{при}\qquad a_m<x<b_m$$

что мы и хотели доказать.

Итак, нам нужно решить уравнение (2.14), представляющее уравнение Фредгольма 2-го рода. Уравнение (2.15) определяет лишь значение постоянной ψ_m.

В § 3 мы дадим решение уравнения (2.14) для малых значений ν.

После того как функция $\varphi(x)$ на отрезках $a_s b_s$ определена, можно дать уравнение свободной поверхности. На свободной поверхности имеем

$$Y(x,\,t)=-\frac{k}{g}\,\varphi(x,\,0)\,je^{jkt}$$

Из (2.5), учитывая (2.10), получим уравнение свободной поверхности.

$$Y(x, t) = -\frac{k}{g} jAe^{j(kt-\nu x)} - \frac{k}{g}\operatorname{Re}\left[\frac{\nu}{\pi}\sum_{s=1}^{n}\int_{+\infty}^{x}\int_{a_s}^{b_s}\frac{\varphi(\xi)e^{i\nu(\tau-x)}}{\tau-\xi}d\xi d\tau - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{\pi}\sum_{s=1}^{n}\int_{+\infty}^{x}\int_{a_s}^{b_s}\frac{v_s(\xi)e^{i\nu(\tau-x)}}{\tau-\xi}d\xi d\tau\right] je^{jkt} \tag{2.20}$$

Асимптотическое движение свободной поверхности при $x \to +\infty$ имеет вид

$$Y(x, t) = -\frac{k}{g} jAe^{j(kt-\nu x)} \tag{2.21}$$

Асимптотическое движение свободной поверхности при $x \to -\infty$ имеет вид

$$Y(x, t) = -\frac{k}{g} jBe^{j(kt+\nu x)} \tag{2.22}$$

где A и B — постоянные, определяемые равенствами (2.11) и (2.12).

Таким образом в обе стороны от колеблющихся пластинок расходятся волны. Длина этих волн определяется формулой

$$\lambda = \frac{2\pi}{\nu} = \frac{2\pi g}{k^2} \tag{2.23}$$

Амплитуды волн, уходящих в направлениях возрастающих и убывающих x, определяются соответственно формулами

$$a_+ = \frac{k}{g}|A|, \qquad a_- = \frac{k}{g}|B| \tag{2.24}$$

Легко теперь подсчитать энергию, затрачиваемую на образование этих волн. Известно, что для случая бегущих волн на бесконечно глубокой жидкости эта энергия, отнесенная к единице времени, равна $\frac{1}{4}a^2 g\rho c$, где a — амплитуда волн, c — скорость их распространения.

В нашем случае $c = k/\nu = g/k$, поэтому на образование волн, отходящих вправо и влево, затрачиваются соответственно мощности

$$\frac{1}{4}g\rho\frac{g}{k}\frac{k^2}{g^2}|A|^2 = \frac{1}{4}\rho k|A|^2, \qquad \frac{1}{4}g\rho\frac{g}{k}\frac{k^2}{g^2}|B|^2 = \frac{1}{4}\rho k|B|^2 \tag{2.25}$$

Таким образом на образование всей системы образующихся волн в каждую единицу времени затрачивается количество энергии

$$T = \frac{1}{4}\rho k\{|A|^2 + |B|^2\} \tag{2.26}$$

Вычислим теперь силы, действующие на единицу ширины пластинки $a_m b_m$. Обозначая через Y_m проекцию на ось y главного вектора сил давления, приложенных к элементам пластинки $a_m b_m$, а через M_m — момент этих сил давления относительно начала координат, будем иметь обычные формулы

$$Y_m = \int_{a_m}^{b_m}(p-p_0)\,dx, \qquad M_m = \int_{a_m}^{b_m}(p-p_0)\,x\,dx \tag{2.27}$$

Воспользуемся выражением (1.4) для давления

$$p - p_0 = -\rho g y - j\rho k\varphi(x)e^{jkt}$$

Первый член в выражении $p - p_0$ после подстановки в (2.27) дает силу Архимеда и ее момент, которые легко вычисляются. Не учитывая силы Архимеда и ее момента, для сил, действующих на пластинку $a_m b_m$, получим

$$Y_m = -j\rho k e^{jkt}\int_{a_m}^{b_m}\varphi(x)\,dx, \qquad M_m = -j\rho k e^{jkt}\int_{a_m}^{b_m}x\varphi(x)\,dx \tag{2.28}$$

Общую силу и момент, действующие на систему пластинок, получим простым суммированием формул (2.28).

§ 3. Случай малых значений числа ν. Ограничимся рассмотрением малых значений числа ν. При малых ν можем найти главные части разложений по ν функций $K(x, \xi)$ и $L(x, \xi)$ Имеем прежде всего формулу[1]

$$e^{-i\nu z} \int_{+\infty}^{z} \frac{e^{i\nu\tau}}{\tau - \xi} d\tau = \ln \gamma\nu + \ln (z - \xi) - \frac{\pi i}{2} + O(\nu \ln \nu) \tag{3.1}$$

где символ $O(\alpha)$ показывает, что невыписанные члены имеют порядок α, а $\gamma = 1.7811\ldots$ (постоянная Маскерони), причем $\ln\gamma = 0.5772\ldots = C$ (постоянная Эйлера). Поэтому по формулам (16) и (17) § 2 найдем:

$$K(x, \xi) = O(\nu \ln \nu), \; L(x, \xi) = -\frac{1}{\pi}\left[\ln \gamma\nu + \ln (x - \xi) - \frac{\pi i}{2} + j\pi (1 - ij)\right] + O(\nu \ln \nu)$$

так что

$$L_1(x, \xi) = -\frac{1}{\pi}\left[\ln \gamma\nu + \ln |x - \xi| + j\pi\right] + O(\nu \ln \nu) \tag{3.2}$$

Решая теперь интегральное уравнение (2.14), легко находим, что при принятой степени приближения

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{s=1}^{n} \int_{a_s}^{b_s} (\ln \gamma\nu + \ln |x - \xi| + j\pi)\, v_s(\xi)\, d\xi + O(\nu \ln \nu) \tag{3.3}$$

Функция $w(z)$, определяемая формулой (2.5), при малых ν имеет вид

$$w(z) = -\frac{1}{\pi} \sum_{s=1}^{n} \int_{a_s}^{b_s} \left[\ln (z - \xi) + \ln \gamma\nu - \frac{\pi i}{2} + j\pi (1 - ij)\right] v_s(\xi)\, d\xi + O(\nu \ln \nu) \tag{3.4}$$

Следовательно, $w(z, \nu)$ как функция от ν, имеет логарифмическую особенность при $\nu = 0$. Из формулы (3.4) находим

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\pi} \sum_{s=1}^{n} \int_{a_s}^{b_s} \frac{v_s(\xi)}{\xi - z} d\xi + O(\nu \ln \nu) \tag{3.5}$$

Откуда видим, что при $v = 0$ свободная граница жидкости представляется неподвижной. Жидкость в этом случае ультратяжелая, движение жидкости совпадает с движением безграничной жидкости в нижней полуплоскости от действия распределения источников на отрезках $a_s b_s$.

Для постоянных A и B, применив формулы (2.11) и (2.12), получаем

$$A = -j \sum_{s=1}^{n} \int_{a_s}^{b_s} v_s(x)\, dx + \nu \sum_{s=1}^{n} \left(\int_{a_s}^{b_s} x\, v_s(x)\, dx + j \int_{a_s}^{b_s} \varphi(x)\, dx \right) + O(\nu^2 \ln \nu) \tag{3.6}$$

$$B = -j \sum_{s=1}^{n} \int_{a_s}^{b_s} v_s(x)\, dx + \nu \sum_{s=1}^{n} \left(-\int_{a_s}^{b_s} x\, v_s(x)\, dx + j \int_{a_s}^{b_s} \varphi(x)\, dx \right) + O(\nu^2 \ln \nu) \tag{3.7}$$

Из (3.6) и (3.7) следует, что с точностью до членов порядка $\nu \ln \nu$

$$A = B = -j \sum_{s=1}^{n} \int_{a_s}^{b_s} v_s(x)\, dx \tag{3.8}$$

В качестве примера рассмотрим о поступательные (вертикальные) и вращательные колебания системы пластинок. В этом случае $v_s(x) = v_s + \Omega_s x$.

По формуле (3.3) находим

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\pi}\sum_{s=1}^{n}\Big\{ v_s\,[(\ln\gamma\nu + \pi j - 1)(b_s - a_s) + (b_s - x)\ln|x - b_s| -$$

$$-(a_s - x)\ln|x - a_s|] + \Omega_s\Big[\Big(\ln\gamma\nu + \pi j - \frac{1}{2}\Big)\frac{b_s^2 - a_s^2}{2} + \frac{b_s^2 - x^2}{2}\ln|x - b_s| -$$

$$-\frac{a_s^2 - x^2}{2}\ln|x - a_s| - \frac{b_s - a_s}{2}x\Big]\Big\} + O(\nu\ln\nu) \qquad (3.9)$$

Подставив $\varphi(x)$ из (3.9) в формулы (3.6) и (3.7), получим

$$A = \sum_{s=1}^{n}\Big\{ v_s\Big[-j(b_s - a_s) + j\nu E_s + \nu\frac{b_s^2 - a_s^2}{2}\Big] + \Omega_s\Big[-j\frac{b_s^2 - a_s^2}{2} + j\nu H_s +$$

$$+\nu\frac{b_s^3 - a_s^3}{3}\Big]\Big\} \qquad (3.10)$$

$$B = \sum_{s=1}^{n}\Big\{ v_s\Big[-j(b_s - a_s) + j\nu E_s - \nu\frac{b_s^2 - a_s^2}{2}\Big] + \Omega_s\Big[-j\frac{b_s^2 - a_s^2}{2} + j\nu H_s -$$

$$-\nu\frac{b_s^3 - a_s^3}{3}\Big]\Big\} \qquad (3.11)$$

$$E_s = -\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n}\Big[\Big(\ln\gamma\nu + \pi j - \frac{3}{2}\Big)(b_s - a_s)(b_m - a_m) - \frac{(b_m - b_s)^2}{2}\ln(b_m - b_s) +$$

$$+\frac{(a_m - b_s)^2}{2}\ln|a_m - b_s| + \frac{(b_m - a_s)^2}{2}\ln|b_m - a_s| - \frac{(a_m - a_s)^2}{2}\ln|a_m - a_s|\Big] \qquad (3.12)$$

$$H_s = -\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n}\Big[\Big(\ln\gamma\nu + \pi j - \frac{7}{6}\Big)\frac{b_s^2 - a_s^2}{2}(b_m - a_m) = \frac{b_m^2 - a_m^2}{2}(b_s - a_s) -$$

$$-\frac{b_m^3 - 3b_s^2 b_m + 2b_s^3}{6}\ln|b_m - b_s| + \frac{a_m^3 - 3b_s^2 a_m + 2b_s^3}{6}\ln|a_m - b_s| +$$

$$+\frac{b_m^3 - 3a_s^2 b_m + 2a^3}{6}\ln|b_m - a_s| - \frac{a_m^3 - 3a_s^3 a_m + 2a_s^3}{6}\ln|a_m - a_s|\Big] \qquad (3.13)$$

В частности, при колебаниях одной пластинки, смоченна́я длина которой $2l$, поместив начало координат в центре смоченной длины, получим формулы для A и B, совпадающие с формулами, приведенными в нашей работе[2]:

$$A = -2vjl\Big[1 - \frac{2\nu l}{\pi}\Big(\ln 2\gamma\nu l + \pi j - \frac{3}{2}\Big)\Big] + \frac{\nu l^3\Omega}{3} \qquad (3.14)$$

$$B = -2vjl\Big[1 - \frac{2\nu l}{\pi}\Big(\ln 2\gamma\nu l + \pi j - \frac{3}{2}\Big)\Big] - \frac{\nu l^3\Omega}{3} \qquad (3.15)$$

и для сил, действующих на пластинку в этом частном случае, применив формулы (2.28), получим

$$Y = \frac{2}{\pi}\rho k l^2(2\pi j - 3 + 2\ln 2\gamma\nu l)\,vje^{jkt}, \qquad M = -\frac{1}{\pi}\rho k l^4\Omega je^{jkt} \qquad (3.16)$$

Рассмотрим вертикальные колебания пластинок, происходящие с одной и той поступательной скоростью ve^{jkt}. Ограничиваясь первыми членами формул (3.10) и (3.11), из формул (2.24) и (2.25) для амплитуды имеем

$$a = \frac{k}{g}|v|\sum_{s=1}^{n}(b_s - a_s). \qquad (3.17)$$

Из этой формулы усматриваем, что при принятом приближении амплитуда образующихся волн при колебаниях системы пластинок совпадает с амплитудой образующихся волн при колебаниях одной пластинки длины $2l$, равной сумме всех длин пластинок.

Энергия, затрачиваемая в единицу времени колеблющимися пластинками с одной и той же поступательной скоростью, определяется формулой

$$T = 2\rho \frac{k^3}{g^2} l^2 |v|^2 \tag{3.18}$$

При чисто вращательных колебаниях пластинок, происходящих с одной и той же угловой скоростью Ωe^{jkt}, для амплитуды волн и энергии, затрачиваемой в единицу времени колеблющимися пластинками, найдем

$$a = \frac{k}{g} \left| \Omega \sum_{s=1}^{n} \frac{b_s^2 - a_s^2}{2} \right|, \qquad T = \frac{1}{2} \frac{\rho k^3}{g^2} \left| \Omega \sum_{s=1}^{n} \frac{b_s^2 - a_s^2}{2} \right|^2 \tag{3.19}$$

Здесь выражение под знаком суммы представляет статические моменты отрезков $a_s b_s$ и, следовательно,

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{b_s^2 - a_s^2}{2} = \sum_{s=1}^{n} (b_s - a_s) \frac{b_s + a_s}{2} = 2l\xi_c, \tag{3.20}$$

где ξ_c — абсцисса центра тяжести системы отрезков $a_s b_s$.

Таким образом, если центр вращения совпадает с центром тяжести системы отрезков $a_s b_s$, то в первом приближении $a = 0$.

Задача о колебаниях пластинок при больших значениях $\nu = k^2 / g$ порядка $1 / \beta$ сводится к определению функции $w(z) = \varphi + i\psi$, удовлетворяющей граничному условию $\varphi = 0$ на свободной границе жидкости и граничному условию $\partial\varphi / \partial y = v_s(x)$ на отрезках $a_s b_s$.

Следовательно, задача о колебаниях пластинок при больших ν сводится к задаче об определении бесциркуляционного возмущенного движения безграничной жидкости при заданных нормальных скоростях на пластинках $a_s b_s$. Бесциркуляционное обтекание пластинок рассмотрено Л. И. Седовым[3].

Поступила в редакцию
8 IX 1941

OSCILLATIONS OF A SYSTEM OF PLATES ON THE SURFACE OF A HEAVY LIQUID

M. D. HASKIND

(Summary)

The author gives a general method for solving the plane problem of wave motion spreading due to oscillations of a system of plates on the surface of a liquid of infinite depth. The results obtained are appropriate for small and large values of frequencies.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е. О волновом сопротивлении и подъемной силе погруженных в жидкость тел. Труды конференции по теории волнового сопротивления. ЦАГИ. 1937.
2. Хаскинд М. Д. Плоская задача о колебаниях пластинок на поверхности тяжелой жидкости. Известия ОТН АН СССР. 1942. № 7—8.
3. Седов Л. И. К задачам о тонких полипланах тандем и о глиссировании на нескольких реданах. Труды ЦАГИ. 1937. Вып. 325. [Стр 18].