Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том VII, 1943

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Д. И. ШЕРМАН

(Москва)

§ 1. Предположим, что упругая среда заполняет некоторую конечную многосвязную область S, лежащую в плоскости $z=x+iy$ и ограниченную контуром L, состоящим из совокупности $m+1$ замкнутых, не имеющих общих точек кривых $L_1, \ldots, L_{m+1}$.

Пусть кривая L_{m+1} будет внешней границей области, содержащей внутри себя остальные внутренние границы L_j $(j=1, 2, \ldots, m)$. Обход L условимся считать происходящим в положительном направлении относительно области S. Далее, обозначим через S_j односвязные области (внешние к S), ограниченные отдельными кривыми L_j $(j=1, 2, \ldots, m+1)$. Из них область S_{m+1} будет бесконечной, а остальные области S_j $(j=1, 2, \ldots, m)$ конечными. Координаты точек кривых L_j будем считать достаточное число раз дифференцируемыми по дуге s. За начало координат выберем точку, принадлежащую области S.

Случай, когда область S есть круг или кольцо, ограниченное двумя концентрическими окружностями, из рассмотрения исключаем.

В настоящей статье приводится решение следующей задачи: *найти поле напряжений и смещений в области S, если на границе L известны касательная составляющая T действующих внешних сил и нормальная составляющая v_n вектора смещения*[1].

При этом используем метод, основы которого были нами кратко изложены в статье [2]. Сначала сделаем предположение, что ни одна из кривых L_j $(j=1, 2, \ldots, m+1)$ не является окружностью.

Указанная задача сводится[2] к отысканию двух функций $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ комплексного переменного $z=x+iy$, аналитических в области S, из следующих условий на L

$$2T = ie^{-2i\alpha}\left\{\overline{t\varphi_1''(t)+\psi_1'(t)}\right\} - ie^{2i\alpha}\left\{\bar{t}\varphi_1''(t)+\psi_1'(t)\right\} \tag{1.1}$$

$$4\mu v_n = e^{-i\alpha}\left\{\overline{\varkappa\varphi_1(t)-t\varphi_1'(t)-\psi_1(t)}\right\} + e^{i\alpha}\left\{\varkappa\varphi_1(t)-\bar{t}\varphi_1'(t)-\psi_1(t)\right\} \tag{1.2}$$

где α — угол, образуемый нормалью n к кривой L с осью x, через t обозначена комплексная координата точек L и, наконец, μ и $\varkappa$ — упругие постоянные.

---

[1] Решение этой задачи для круга содержится в книге Н. И. Мусхелишвили [1]. Решение же для области, ограниченной двумя концентрическими окружностями, может быть получено непосредственным применением рядов Фурье.

[2] См. цитированную книгу Н. И. Мусхелишвили [1].

Функции $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ имеют вид

$$\varphi_1(z)=\varphi(z)-\frac{1}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{j=1}^{m}(X_j+iY_j)\ln(z-a_j) \tag{1.3}$$

$$\psi_1(z)=\psi(z)+\frac{\varkappa}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{j=1}^{m}(X_j-iY_j)\ln(z-a_j) \tag{1.4}$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — функции, регулярные в области S, a_j — некоторые произвольно фиксированные точки, лежащие в областях S_j $(j=1,\ldots,m)$, и X_j+iY_j — главные векторы внешних сил, действующих на кривых L_j $(j=1,\ldots,m)$.

Обозначая через N неизвестную пока нормальную составляющую внешних сил, будем иметь

$$X_j+iY_j=\int_{L_j}(N+iT)e^{i\alpha}\,ds \qquad (j=1,2,\ldots,m) \tag{1.5}$$

причем согласно принятому условию обход L_j предполагается совершающимся по часовой стрелке.

Искомые функции $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ будем искать в виде

$$\varphi_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(t)}{t-z}dt-\frac{1}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{j=1}^{m}\ln(z-a_j)\int_{L_j}\theta(t)\,ds \tag{1.6}$$

$$\psi_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\theta(t)}{t-z}dt+\frac{\varkappa}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{j=1}^{m}\ln(z-a_j)\int_{L_j}\overline{\theta(t)}\,ds \tag{1.7}$$

где $\omega(t)$ и $\theta(t)$ — некоторые новые неизвестные функции.

Перейдем в этих формулах к пределу, устремляя точку z к некоторой точке t_0 кривой L, и подставим значения для $\varphi_1(t_0)$ и $\psi_1(t_0)$ в равенства (1.1) и (1.2). Кроме того, к правым частям тех же равенств прибавим соответственно предельные значения изнутри области S операторов

$$G_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\left\{ie^{-2i\alpha}\left(\overline{t\omega''(t)}+\overline{\theta'(t)}\right)+ie^{2i\alpha}\left(\bar t\omega''(t)+\theta'(t)\right)\right\}\frac{dt}{t-z} \tag{1.8}$$

$$G_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\left\{-e^{-i\alpha}\left(\varkappa\omega(t)+\overline{t\,\omega'(t)}+\overline{\theta(t)}\right)+e^{i\alpha}\left(\overline{\varkappa\omega(t)}+\bar t\omega'(t)+\theta(t)\right)\right\}\frac{dt}{t-z} \tag{1.9}$$

и функционалы $A(\omega,\theta)$ и $B(\omega,\theta)$, принимающие на L_j чисто мнимые значения

$$A=iA_j=i\int_{L_j}\left[e^{-2i\alpha}\{\overline{t\omega''(t)}+\overline{\theta'(t)}\}+e^{2i\alpha}\{\bar t\omega''(t)+\theta'(t)\}\right]ds \tag{1.10}$$

$$B=iB_j=\int_{L_j}\left[e^{-i\alpha}\{\varkappa\omega(t)+\overline{t\omega'(t)}+\overline{\theta(t)}\}-e^{i\alpha}\{\overline{\varkappa\omega(t)}+\bar t\omega'(t)+\theta(t)\}\right]ds$$

для $j=1,2,\ldots,m$ и равные

$$A=iA_{m+1}=0,\qquad B=iB_{m+1}=0 \qquad \text{на } L_{m+1} \tag{1.11}$$

Тогда после некоторых преобразований будем иметь

$$f_1(t_0)=\{t_0\overline{\omega''(t_0)}+\overline{\theta'(t_0)}\}+K_1\{\omega(t),\,\theta(t),\,t_0\} \tag{1.12}$$

$$g_1(t_0)=\varkappa e^{2i\alpha_0}\overline{\omega(t_0)}-\{t_0\overline{\omega'(t_0)}+\overline{\theta(t_0)}\}+M_1\{\omega(t),\,\theta(t),\,t_0\} \tag{1.13}$$

где для краткости введены обозначения

$$K_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\omega(t)}\, d\frac{d}{dt}\left\{ t_0 \frac{d}{dt}\ln\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0} - \frac{te^{2i\alpha_0}-t_0e^{2i\alpha}}{t-t_0}\right\} -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\theta(t)}\, d\left\{\frac{d}{dt}\ln\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0} + \frac{e^{2i\alpha}-e^{2i\alpha_0}}{t-t_0}\right\} +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L \omega(t)\, d\frac{d}{dt}\left\{ e^{2i\alpha_0}\frac{\bar t e^{2i\alpha}-\bar t_0 e^{2i\alpha_0}}{t-t_0}\right\} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \theta(t)\, d\left\{e^{2i\alpha_0}\frac{e^{2i\alpha}-e^{2i\alpha_0}}{t-t_0}\right\} +$$

$$+\frac{1}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{j=1}^{m}\left[\left\{\frac{t_0}{(\bar t_0-\bar a_j)^2} - \varkappa\frac{e^{4i\alpha_0}}{(t_0-a_j)}\right\}\int_{L_j}\overline{\theta(t)}\, ds - \left\{\frac{e^{4i\alpha_0}\bar t_0}{(t_0-a_j)^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\varkappa}{(\bar t_0-\bar a_j)}\right\}\int_{L_j}\theta(t)\, ds\right] - ie^{2i\alpha_0}A(\omega,\theta) \tag{1.14}$$

$$M_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\omega(t)}\left[\varkappa e^{i\alpha_0}\frac{e^{i\alpha}-e^{i\alpha_0}}{t-t_0}\, dt + d\left\{\varkappa e^{2i\alpha_0}\ln\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0} + t_0\frac{d}{dt}\ln\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - e^{i\alpha}\frac{te^{i\alpha_0}-t_0e^{i\alpha}}{t-t_0}\right\}\right] - \frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\theta(t)}\left\{d\ln\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0} + \frac{e^{-i(\alpha-\alpha_0)}-1}{t-t_0}\, dt\right\} -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_L \omega(t)\left\{\varkappa\frac{e^{-i(\alpha-\alpha_0)}-1}{t-t_0}\, dt + de^{i\alpha_0}\frac{te^{i\alpha}-\bar t_0e^{i\alpha_0}}{t-t_0}\right\} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \theta(t)\, e^{i\alpha_0}\frac{e^{i\alpha}-e^{i\alpha_0}}{t-t_0}\, dt -$$

$$-\frac{1}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{j=1}^{m}\left[\varkappa\left\{\int_{L_j}\theta(t)\, ds + e^{2i\alpha_0}\int_{L_j}\overline{\theta(t)}\, ds\right\}\left\{\ln(t_0-a_j) + \overline{\ln(t_0-a_j)}\right\} - \right.$$

$$\left. - \left\{\frac{t_0}{(\bar t_0-\bar a_j)}\int_{L_j}\overline{\theta(t)}\, ds + \frac{t_0e^{2i\alpha_0}}{t_0-a_j}\int_{L_j}\theta(t)\, ds\right\}\right] + e^{i\alpha_0}B(\omega,\theta) \tag{1.15}$$

$$f_1(t_0) = -2iTe^{2i\alpha_0}, \qquad g_1(t_0) = 4\mu e^{i\alpha_0}v_n \tag{1.16}$$

Функционалы $A(\omega,\theta)$ и $B(\omega,\theta)$ на кривых L_j нужно брать в виде, к которому они могут быть приведены интегрированием по частям: (1.17)

$$A(\omega,\theta) = -i\int_{L_j}\left\{\overline{\omega(t)}\, d\frac{d}{dt}\left(t\frac{ds}{dt}\right) + \omega(t)\, d\frac{d}{dt}\left(\bar t\frac{ds}{dt}\right) - \overline{\theta(t)}\, d\frac{ds}{dt} - \theta(t)\, d\frac{ds}{dt}\right\}$$

$$B(\omega,\theta) = i\int_{L_j}\left[(\varkappa-1)\{\omega(t)\, d\bar t + \overline{\omega(t)}\, dt\} + \{\overline{\theta(t)}\, d\bar t + \theta(t)\, dt\}\right] \tag{1.18}$$

При этом, как указано, на L_{m+1} их следует считать равными нулю.

Продифференцируем обе части равенства (1.13) на каждой из кривых L_j по t_0 и сложим почленно вновь полученное равенство с (1.12). Будем иметь

$$\varkappa\overline{\omega(t_0)}\frac{de^{2i\alpha_0}}{dt_0} + (1+\varkappa)\, e^{2i\alpha_0}\,\overline{\omega'(t_0)} = f_2(t_0) - K_2\{\omega,\theta,t_0\}, \tag{1.19}$$

где положено

$$K_2 = K_1 + \frac{dM_1}{dt_0}, \qquad f_2(t_0) = f_1(t_0) + \frac{dg_1(t_0)}{dt_0} \tag{1.20}$$

Интегрируя уравнение (1.19) и определив постоянные интегрирования из условия непрерывности функции $\omega(t_0)$ на кривых L_j, получим

$$\overline{\omega(t_0)} = f(t_0) - K\{\omega(t),\theta(t),t_0\} \tag{1.21}$$

где для оператора $K\{\omega(t),\theta(t),t_0\}$ и известной функции $f(t_0)$ будем иметь следующие выражения:

$$K=\frac{1}{1+\varkappa}\exp-\frac{2i\varkappa\alpha}{1+\varkappa}\left\{\left(\exp\mp\frac{4\pi\varkappa i}{1+\varkappa}-1\right)^{-1}\int_L K_2\exp-\frac{2i\alpha}{1+\varkappa}\overline{dt}+\right.$$

$$\left.+\int_0^{t_0}K_2\exp-\frac{2i\alpha}{1+\varkappa}\overline{dt}\right\} \tag{1.22}$$

$$f(t_0)=\frac{1}{1+\varkappa}\exp-\frac{2i\varkappa\alpha_0}{1+\varkappa}\left\{\left(\exp\mp\frac{4\pi\varkappa i}{1+\varkappa}-1\right)^{-1}\int_{L_j}f_2(t)\exp-\frac{2i\alpha}{1+\varkappa}\overline{dt}+\right.$$

$$\left.+\int_0^{t_0}f_2(t)\exp-\frac{2i\alpha}{1+\varkappa}\overline{dt}\right\} \tag{1.23}$$

В этих формулах при интегрировании обход кривых $L_j\,(j=1,2,\ldots,m)$ следует производить по часовой стрелке и из знаков $\mp$ брать верхний, а обход кривой L_{m+1} — против часовой стрелки и из знаков $\mp$ брать нижний.

Подставляя $\overline{\omega(t_0)}$ из уравнения (1.21) в уравнение (1.13), получим

$$\overline{\theta(t_0)}=g(t_0)-M\{\omega(t),\ \theta(t),\ t_0\} \tag{1.24}$$

где (1.25)

$$M\{\omega(t),\ \theta(t),\ t_0\}=\varkappa e^{2i\alpha_0}K-t_0\frac{dK}{dt_0}-M_1,\quad g(t_0)=\varkappa e^{2i\alpha_0}f(t_0)-t_0\frac{df}{dt_0}-g_1(t_0)$$

Собирая вместе уравнения (1.21) и (1.24), будем иметь окончательно систему уравнений Фредгольма для определения неизвестных $\omega(t)$ и $\theta(t)$

$$f(t_0)=\overline{\omega(t_0)}+K\{\omega(t),\ \theta(t),\ t_0\},\quad g(t_0)=\overline{\theta(t_0)}+M\{\omega(t),\theta(t),t_0\} \tag{1.26}$$

§ 2. Установим некоторые свойства, которыми обладает система (1.26). Предположим, что система (1.26) имеет некоторое решение $\omega(t)$ и $\theta(t)$. Как следует из предыдущего, оно будет удовлетворять предельным условиям

$$2T=ie^{-2i\alpha}\{t\overline{\varphi_1''(t)}+\overline{\psi_1'(t)}\}-ie^{2i\alpha}\{\bar{t}\varphi_1''(t)+\psi_1'(t)\}+G_1(t)+iA_j(\omega,\ \theta) \tag{2.1}$$

$$4\mu\rho_n=e^{-i\alpha}\{\varkappa\varphi_1(t)-t\overline{\varphi_1'(t)}-\overline{\psi_1(t)}\}+e^{i\alpha}\{\varkappa\overline{\varphi_1(t)}-\bar{t}\varphi_1'(t)-\psi_1(t)\}+G_2(t)+iB_j(\omega,\theta)$$

на $L_j\,(j=1,2,\ldots,m+1)$. Здесь под $G_1(t)$ и $G_2(t)$ следует понимать предельные значения интегралов типа Коши $G_1(z)$ и $G_2(z)$ изнутри области S.

Положим

$$G_1(z)=u_1(x,y)+iv_1(x,y),\qquad G_2(z)=u_2(x,y)+iv_2(x,y) \tag{2.2}$$

где u_1, v_1, u_2 и v_2 — вещественные функции, гармонические в области S. Тогда, отделяя в равенствах (2.1) мнимые части, будем иметь

$$v_1+A_j=0,\qquad v_2+B_j=0\qquad \text{на}\quad L_j\,(j=1,2,\ldots,m+1) \tag{2.3}$$

Дифференцируя последние равенства на каждой из кривых L_j по дуге s, найдем, используя условия Коши-Римана,

$$\frac{du_1}{dn}=0,\qquad \frac{du_2}{dn}=0\quad \text{на}\quad L_j\quad (j=1,2,\ldots,m+1)$$

Отсюда следует, что во всех точках области S

$$u_1(x,y)=E_1,\qquad u_2(x,y)=E_2$$

где E_1 и E_2 — некоторые постоянные. Поэтому функции $v_1(x,y)$ и $v_2(x,y)$ также будут равны некоторым постоянным в области S. Принимая же во внимание обращение $v_1(x, y)$ и $v_2(x, y)$ в нуль на кривой L_{m+1}, найдем, что эти постоянные равны нулю. Но тогда из равенств (2.3) получим

$$A_j(\omega, \theta) = 0, \qquad B_j(\omega, \theta) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m+1) \tag{2.4}$$

Кроме того, в области S будем иметь $G_1(z) = E_1$ и $G_2(z) = E_2$.

Далее, из последних равенств и (1.8), (1.9) найдем на L

$$\begin{gathered} ie^{-2i\alpha}\{t\overline{\omega''(t)} + \overline{\theta'(t)}\} + ie^{2i\alpha}\{\bar{t}\omega''(t) + \theta'(t)\} - E_1 = \delta_1(t) \\ e^{i\alpha}\{\varkappa\overline{\omega(t)} + t\omega'(t) + \theta(t)\} - e^{-i\alpha}\{\varkappa\omega(t) + t\overline{\omega'(t)} + \overline{\theta(t)}\} - E_2 = \delta_2(t) \end{gathered} \tag{2.5}$$

где $\delta_1(t)$ и $\delta_2(t)$ — предельные значения некоторых функций $\delta_1(z)$ и $\delta_2(z)$, регулярных в областях S_j и равных нулю на бесконечности.

Рассмотрим равенства (2.5) на кривой L_{m+1}. Вещественные части функций $\delta_1(t)$ и $\delta_2(t)$ равны соответственно постоянным E_1 и E_2. Отсюда, учитывая условия на бесконечности, заключаем, что $\delta_1(z)$ и $\delta_2(z)$ тождественно равны нулю в области S_{m+1}; при этом E_1 и E_2 будут равны нулю и, следовательно,

$$G_1(z) = 0, \qquad G_2(z) = 0 \qquad \text{в области } S. \tag{2.6}$$

После этого найдем, что вещественные части $\delta_1(t)$ и $\delta_2(t)$ равны нулю на остальных кривых $L_j\,(j = 1, 2, \ldots, m)$, в силу чего функции $\delta_1(z)$ и $\delta_2(z)$ должны быть равны чисто мнимым постоянным в областях $S_j \; (j = 1, 2, \ldots, m)$. Обозначая эти постоянные через iC_{1j} и iC_{2j}, представим (2.5) в виде

$$\begin{gathered} e^{-2i\alpha}\{t\overline{\omega''(t)} + \overline{\theta'(t)}\} + e^{2i\alpha}\{\bar{t}\omega''(t) + \theta'(t)\} = C_{1j} \\ e^{i\alpha}\{\varkappa\overline{\omega(t)} + \bar{t}\omega'(t) + \theta(t)\} - e^{-i\alpha}\{\varkappa\omega(t) + t\overline{\omega'(t)} + \overline{\theta(t)}\} = iC_{2j} \end{gathered} \tag{2.7}$$

на $L_j\,(j = 1, \ldots, m+1)$, причем $C_{1,m+1} = C_{2,m+1} = 0$.

Обращаясь же теперь к равенствам (1.10) и (2.4), найдем, что и

$$C_{1j} = C_{2j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

В связи с этим будем иметь на $L_j\,(j = 1, \ldots, m+1)$

$$\begin{gathered} e^{-2i\alpha}\{t\overline{\omega''(t)} + \overline{\theta'(t)}\} + e^{2i\alpha}\{\bar{t}\omega''(t) + \theta'(t)\} = 0 \\ e^{i\alpha}\{\varkappa\overline{\omega(t)} + \bar{t}\omega'(t) + \theta(t)\} - e^{-i\alpha}\{\varkappa\omega(t) + t\overline{\omega'(t)} + \overline{\theta(t)}\} = 0 \end{gathered} \tag{2.8}$$

Таким образом всякое решение системы (1.26) обращает тождественно в нуль операторы $G_1(z)$, $G_2(z)$ и функционалы A_j, B_j и, следовательно, удовлетворяет исходным граничным условиям (1.1) и (1.2). Помимо этого выполняются еще соотношения (2.8).

§ 3. Докажем теперь, что система (1.26) на самом деле имеет единственное решение. Для этого рассмотрим однородную систему

$$\overline{\omega^*(t_0)} + K\{\omega^*(t), \theta^*(t), t_0\} = 0, \quad \overline{\theta^*(t_0)} + M\{\omega^*(t), \theta^*(t), t_0\} = 0 \tag{3.1}$$

Здесь через $\omega^*(t)$ и $\theta^*(t)$ обозначено некоторое ее решение.

Пусть $\varphi_1^*(z)$ и $\psi_1^*(z)$ обозначают функции, которые получим, заменив в правых частях равенств (1.6) и (1.7) $\omega(t)$ и $\theta(t)$ соответственно на $\omega^*(t)$ и $\theta^*(t)$. По доказанному, $\varphi_1^*(z)$ и $\psi_1^*(z)$ будут удовлетворять предельным условиям (1.1) и (1.2) при $T = v_n = 0$. В этом случае по теореме единственности будем иметь тождественно в области S

$$\varphi_1^*(z) = iCz + D_1, \qquad \psi_1^*(z) = D_2 \tag{3.2}$$

где C — некоторое вещественное, а D_1 и D_2 — некоторые комплексные постоянные числа. Из последних равенств следует, что $\varphi_1^*(z)$ и $\psi_1^*(z)$ должны быть однозначны в области S. Поэтому

$$\int_{L_j} \theta^*(t)\,ds = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{3.3}$$

Подставляя, далее, значения для $\varphi_1^*(z)$ и $\psi_1^*(z)$ в условие (1.2) и интегрируя полученное равенство по дуге s, будем иметь

$$(1+\varkappa)\,Ct\bar{t} - i(\varkappa D_1 - \bar{D}_2)\,\bar{t} + i(\varkappa\bar{D}_1 - D_2)\,t + E = 0 \tag{3.4}$$

где E — постоянная интегрирования. Это уравнение определяет окружность. Отсюда заключаем, что

$$C = 0, \quad \varkappa D_1 - \bar{D}_2 = 0, \quad E = 0 \tag{3.5}$$

Равенства (3.2) теперь могут быть записаны в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega^*(t)}{t-z}\,dt = D_1, \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\theta^*(t)}{t-z}\,dt = D_2. \tag{3.6}$$

Введем новые функции

$$\chi_1^*(t) = i\{\omega^*(t) - D_1\}, \qquad \chi_2^*(t) = i\{\theta^*(t) - D_2\} \tag{3.7}$$

Очевидно, $\chi_1^*(t)$ и $\chi_2^*(t)$ будут предельными значениями некоторых функций $X_1^*(z)$ и $X_2^*(z)$, регулярных в областях S_j $(j = 1, 2, \ldots, m+1)$ и равных нулю на бесконечности.

Подставим в соотношения (2.8), которые должны выполняться и для функций $\omega^*(t)$, $\theta^*(t)$, вместо последних их значения через $\chi_1^*(t)$, $\chi_2^*(t)$. Тогда

$$ie^{2i\alpha}\{\bar{t}\chi_1^{*\prime\prime}(t) + \chi_2^{*\prime}(t)\} - ie^{-2i\alpha}\{\overline{t\chi_1^{*\prime\prime}(t)} + \overline{\chi_2^{*\prime}(t)}\} = 0$$

$$e^{i\alpha}\{\varkappa\overline{\chi_1^*(t)} - \bar{t}\chi_1^{*\prime}(t) - \chi_2^*(t)\} + e^{-i\alpha}\{\varkappa\chi_1^*(t) - t\overline{\chi_1^{*\prime}(t)} - \overline{\chi_2^*(t)}\} =$$

$$= i(\varkappa\bar{D}_1 + D_2)e^{i\alpha} - i(\varkappa D_1 + \bar{D}_2)e^{-i\alpha} \quad \text{на} \quad L_j\,(j = 1, \ldots, m+1) \tag{3.8}$$

Рассмотрим сначала эти равенства на кривой L_{m+1}. Очевидно, функции $\chi_1^*(z)$ и $\chi_2^*(z)$ дают решение задачи теории упругости для области S_{m+1} при условии, что на границе L_{m+1} равна нулю касательная составляющая внешних сил, а нормальная составляющая вектора смещения, умноженная на 4μ, равна правой части равенства (3.8). Составляя для этого случая интеграл

$$J = 4\mu \int_{L_{m+1}} \{u_\tau T + v_n N\}\,ds \tag{3.9}$$

где u_τ — касательная составляющая вектора смещения, имеем

$$J = i(\varkappa\bar{D}_1 + D_2)\int_{L_{m+1}} e^{i\alpha}N\,ds - i(\varkappa D_1 + \bar{D}_2)\int_{L_{m+1}} e^{-i\alpha}N\,ds. \tag{3.10}$$

Вследствие регулярности функций $\chi_1^*(z)$ и $\chi_2^*(z)$ главный вектор внешних сил, действующих на L_{m+1}, равен нулю. Поэтому правая часть последнего равенства также должна быть равна нулю. После этого, преобразуя, как обычно, интеграл (3.9) по формуле Грина и учитывая условия на бесконечности, найдем, что $\chi_1^*(z)$ и $\chi_2^*(z)$ равны нулю в области S_{m+1}. Тогда из равенства (3.8) имеем $\varkappa D_1 + \bar{D}_2 = 0$. Отсюда в связи с (3.5) получим

$$D_1 = D_2 = 0 \tag{3.11}$$

Из равенств (3.7) теперь найдем, что

$$\omega^*(t) = \theta^*(t) = 0 \quad \text{на} \quad L_{m+1} \tag{3.12}$$

В силу (3.11) равенства (3.8) на $L_j (j=1, 2, \ldots, m)$ принимают вид

$$\begin{gathered} ie^{2i\alpha}\{\bar{t}\chi_1^{*''}(t)+\chi_2^{*'}(t)\}-ie^{-2i\alpha}\{\overline{t\chi_1^{*''}(t)+\chi_2^{*'}(t)}\}=0 \\ e^{i\alpha}\{\overline{\varkappa\chi_1^*(t)-\bar{t}\chi_1^{*'}(t)-\chi_2^*(t)}\}+e^{-i\alpha}\{\varkappa\chi_1^*(t)-t\overline{\chi_1^{*'}(t)}-\overline{\chi_2^*(t)}\}=0 \end{gathered} \tag{3.13}$$

Рассуждая, как выше, найдем, что

$$\chi_1^*(z)=iC_jz+D_{1j}, \qquad \chi_2^*(z)=D_{2j} \qquad \text{в} \quad S_j (j=1, 2, \ldots, m) \tag{3.14}$$

где C_j — некоторые вещественные, а D_{1j} и D_{2j}, вообще говоря, комплексные постоянные числа. Подставляя эти значения $\chi_1^*(z)$ и $\chi_2^*(z)$ во второе из равенств (3.13), получим после интегрирования по дуге s

$$(1+\varkappa)C_jt\bar{t}-i(\varkappa D_{1j}-\overline{D}_{2j})\bar{t}+i(\varkappa D_{1j}-D_{2j})t+E_j=0 \tag{3.15}$$

на $L_j (j=1, 2, \ldots, m)$, где E_j — постоянные интегрирования.

В силу сделанного выше предположения ни одна из кривых L_j не является окружностью. Отсюда следует, что

$$C_j=0, \qquad \varkappa D_{1j}-\overline{D}_{2j}=0, \qquad E_j=0 \qquad (j=1, \ldots, m) \tag{3.16}$$

При этом из равенств (3.12) и (3.16) получим на $L_j (j=1, 2, \ldots, m+1)$

$$\omega^*(t)=-iD_{1j}, \qquad \theta^*(t)=-i\varkappa\overline{D}_{1j} \qquad \text{где} \qquad D_{1, m+1}=0. \tag{3.17}$$

Наконец, используя (3.3), найдем, что все $D_{1j}=0$ и, следовательно,

$$\omega^*(t)=\theta^*(t)=0 \qquad \text{на} \qquad L \tag{3.18}$$

Итак, однородная система (3.1) имеет только тривиальное решение. Следовательно, неоднородная система (1.26) всегда имеет единственное решение. Определив из нее $\omega(t)$ и $\theta(t)$, найдем по (1.6) и (1.7) функции $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$.

§ 4. Перейдем к случаю, когда некоторые из кривых L_j являются окружностями. Предположим, что, например, кривые $L_j (j=1, 2, \ldots, k)$ суть окружности с центрами в точках a_j и радиусами r_j. В этом случае положим

$$A(\omega, \theta)=iA_j=\int_{L_j}\{\omega(t)\,\overline{dt}-\overline{\omega(t)}\,dt\} \qquad (j=1, 2, \ldots, k) \tag{4.1}$$

Остальные функционалы $A_j(\omega, \theta) (j=k+1, \ldots, m)$ и $B_j(\omega, \theta) (j=1, 2, \ldots, m)$ определим попрежнему. Тогда, поступая аналогично предыдущему, получим для $\omega(t)$ и $\theta(t)$ систему вида (1.26). Операторы K, M и свободные члены $f(t)$, $g(t)$ определятся попрежнему формулами (1.22), (1.23) и (1.25), причем в выражениях для K и M следует под $A(\omega, \theta)$ на $L_j (j=1, \ldots, k)$ понимать их значения согласно (4.1). Исследуя, как раньше, систему (1.26), придем опять к равенствам (2.4), (2.6) и (2.7). Вместо равенств (2.8) получим

$$\begin{gathered} ie^{-2i\alpha}\{\overline{t\omega''(t)+\theta''(t)}\}+ie^{2i\alpha}\{\bar{t}\omega''(t)+\theta'(t)\}=iC_{1j} \\ e^{i\alpha}\{\varkappa\overline{\omega(t)}+\bar{t}\omega'(t)+\theta(t)\}-e^{-i\alpha}\{\varkappa\omega(t)+t\overline{\omega'(t)}+\overline{\theta(t)}\}=0 \end{gathered} \tag{4.2}$$

на $L_j (j=1, 2, \ldots, m+1)$, причем $C_{1j}=0 \ (j=k+1, \ldots, m+1)$.

Для любого решения $\omega^*(t)$ и $\theta^*(t)$ однородной системы (3.1) также последовательно найдем соотношения (3.3), (3.7), (3.11) и (3.12). Вместо же равенств (3.13) в соответствии с (4.2) сначала получим

$$\begin{gathered} ie^{-2i\alpha}\{\overline{t\chi_1^{*''}(t)+\chi_2^{*'}(t)}\}-ie^{2i\alpha}\{\bar{t}\chi_1^{*''}(t)+\chi_2^{*'}(t)\}=C_{1j}^* \\ e^{i\alpha}\{\varkappa\overline{\chi_1^*(t)}-\bar{t}\chi_1^{*'}(t)-\chi_2^*(t)\}+e^{-i\alpha}\{\varkappa\chi_1^*(t)-t\overline{\chi_1^{*'}(t)}-\overline{\chi_2^*(t)}\}=0 \end{gathered} \tag{4.3}$$

на $L_j (j=1, \ldots, m)$ где C_{1j}^* — некоторые постоянные и, аналогично тому как в предыдущих равенствах, $C_{1j}^* = 0$ $(j=k+1, \ldots, m+1)$.

Умножая обе части первого из равенств (4.3) при значениях $j=1, 2, \ldots, k$ на ds и интегрируя по каждой из кривых $L_j (j=1, 2, \ldots, k)$, после некоторых преобразований найдем

$$\int_{L_j} \overline{\chi_2^*(t)}\, \overline{dt} + \int_{L_j} \chi_2^*(t)\, dt = 2\pi r_j^2 C_{1j}^* \qquad (j=1, 2, \ldots, k) \tag{4.4}$$

Так как функция $\chi_2^*(z)$ регулярна в областях S_j, то каждый из интегралов в левой части равенства равен нулю. Поэтому

$$C_{1j}^* = 0 \qquad (j=1, 2, \ldots, k) \tag{4.5}$$

и мы приходим снова к (3.13). Далее, рассуждая попрежнему, получим

$$\omega^*(t) = \theta^*(t) = 0 \qquad \text{на} \quad L_j\, (j=k+1, \ldots, m) \tag{4.6}$$

Для значений $\omega^*(t)$ и $\theta^*(t)$ на $L_j (j=1, 2, \ldots, k)$ будем иметь

$$\omega^*(t) = C_j t - iD_{1j}, \qquad \theta^*(t) = -iD_{2j} \qquad (j=1, 2, \ldots, k) \tag{4.7}$$

где постоянные C_j, D_{1j}, D_{2j} и E_j в силу (3.15) связаны соотношениями

$$i(\varkappa D_{1j} - D_{2j}) = (1+\varkappa) a_j C_j, \qquad E_j = (1+\varkappa)(|a_j|^2 - r_j^2) C_j \qquad (j=1, 2, \ldots, k) \tag{4.8}$$

Обращаясь теперь к первым из равенств (2.4) при $j=1, 2, \ldots, k$ и к равенствам (3.3) и имея в виду формулы (4.1), найдем после подстановки в них вместо $\omega^*(t)$ и $\theta^*(t)$ значений из (4.7)

$$C_j = 0, \qquad D_{2j} = 0 \qquad (j=1, 2, \ldots, k)$$

При этом из равенств (4.8) вытекает, что и

$$D_j = E_j = 0 \qquad (j=1, 2, \ldots, k)$$

Следовательно,

$$\omega^*(t) = \theta^*(t) = 0 \qquad \text{на} \quad L_j\, (j=1, \ldots, k) \tag{4.9}$$

Итак, однородная система (3.1) имеет лишь тривиальное решение также тогда, когда некоторые из кривых L_j являются окружностями. Иначе говоря, и в этом случае неоднородная система (1.26) имеет единственное решение.

Поступила в редакцию 1 III 1943

A MIXED PROBLEM OF THE ELASTICITY THEORY

D. I. SHERMANN

(Summary)

In this paper a solution is given of the problem of defining the strain and displacements in an elactic medium, spreading through a plane multiconnected domain, if on its boundary the tangential component of the active exterior forces and the normal component of the displacement vector are known. The problem is reduced to an integral Fredholm equation by a method, whose principles were expounded by us in Doklady of the Academy of Sciences of the USSR[2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые задачи теории упругости. М. 1935.
2. Шерман Д. И. ДАН СССР. 1941. Т. XXII. № 9.