Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том VII, 1943

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ

А. Ю. ИШЛИНСКИЙ

(Москва)

В предыдущей работе [1] нами была рассмотрена задача об устойчивости вязкопластического течения круглого прута, боковая поверхность которого имеет периодические осесимметричные возмущения. Ниже решается аналогичная задача о течении круглой пластины под действием нормальных сил, приложенных по ее цилиндрической границе. Постановка задач об устойчивости вязкопластического течения принадлежит А. А. Ильюшину [2].

Рассмотрим тело вращения, симметричное относительно некоторой срединной плоскости, которую примем за плоскость xy. Пусть

$$z = \pm [h + \zeta(r)], \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1}$$

уравнения поверхностей, ограничивающих в рассматриваемый момент времени это тело, где $\zeta(r)$—некоторая функция, принимающая малые значения по сравнению с величиной h и такая, что она может быть разложена в ряды по функциям Бесселя порядка нуль.

Пусть указанное тело деформируется под действием осесимметрической нагрузки, приложенной по боковой цилиндрической поверхности тела.

Можно ожидать, что вследствие малости функции $\zeta(r)$ деформирование тела будет мало отличаться от деформирования круглой пластинки толщиной $2h$ под действием нормальных условий, распределенных по ее цилиндрической поверхности.

Обозначим через σ_r^0, τ_{rz}^0, σ_z^0 и σ_θ^0 компоненты тензора напряжений круглой пластины, а через u_r^0, u_z^0, u_θ^0 компоненты скоростей ее точек относительно цилиндрической системы координат r, θ, z. Перечисленные величины назовем величинами, определяющими основное деформирование, а соответствующие величины σ_r', τ_{rz}', σ_z', σ_θ' и u_r', u_z', u_θ', относящиеся к телу вращения, назовем величинами, определяющими «возмущенное» движение.

На основании вышесказанного мы будем рассматривать разности $\sigma_r' - \sigma_r^0$, $\tau_{rz}' - \tau_{rz}^0$, $\sigma_z' - \sigma_z^0$, $\sigma_\theta' - \sigma_\theta^0$, а также $u_r = u_r' - u_r^0$, $u_z = u_z' - u_z^0$ и $u_\theta = u_\theta' - u_\theta^0$ как малые величины и называть их возмущениями величин, определяющих основное движение. То же относится к разности давлений $p = p_1 - p_0$, где

$$p_1 = -\tfrac{1}{3}(\sigma_r' + \sigma_z' + \sigma_\theta') \quad \text{и} \quad p_0 = -\tfrac{1}{3}(\sigma_r^0 + \sigma_z^0 + \sigma_\theta^0)$$

Определим сначала компоненты тензора напряжений и тензора скоростей деформирования, относящихся к основному движению. Предположим для определенности, что пластина растягивается нормальными силами, равномерно распределенными по боковой поверхности с интенсивностью q.

В силу осевой симметрии движения $u_\theta=0$. В случае несжимаемой среды

$$\frac{\partial u_r{}^0}{\partial r}+\frac{u_r{}^0}{r}+\frac{\partial u_z{}^0}{\partial z}=0 \tag{2}$$

Учитывая однородность деформации пластины, положим

$$\varepsilon_z{}^0=\frac{\partial u_z{}^0}{\partial z}=-\omega(t) \tag{3}$$

Тогда, как нетрудно видеть,

$$u_r{}^0=\tfrac{1}{2}\omega r+\frac{A}{r} \tag{4}$$

где A — постоянная интеграции, которую следует положить равной нулю из-за конечности $u_r{}^0$ на оси симметрии ($r=0$). Согласно предложенным нами уравнениям пространственного деформирования вязкопластической среды[2], представим главные напряжения среды σ_1, σ_2 и σ_3 в виде

$$\sigma_i=-p+S_i-\Gamma \qquad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{5}$$

где

$$\Gamma=\tfrac{1}{3}(S_1+S_2+S_3),\quad p=-\tfrac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)$$

Величины S_i, которые называются компонентами напряжений формоизменения, будем считать подчиняющимися закону

$$S_i=K\operatorname{sign}s_i+\mu s_i \tag{6}$$

где s_i — компоненты скоростей формоизменения. Последние связаны с главными скоростями деформаций ε_1, ε_2 и ε_3 соотношениями

$$s_i=\varepsilon_i-\tfrac{1}{3}\theta \tag{7}$$

где $\theta=\frac{1}{3}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)$ — скорость объемного деформирования.

Так как в данном случае направления r, z и θ являются главными осями тензора напряжения и тензора скоростей деформирования, то положим согласно общей теории деформирования вязкопластической среды

$$S_r=K+\mu\varepsilon_r,\qquad S_z=-K+\mu\varepsilon_z,\qquad S_\theta=K+\mu\varepsilon_\theta \tag{8}$$

При этом учтено, что

$$\varepsilon_r{}^0=\frac{\partial u_r{}^0}{\partial r}=\tfrac{1}{2}\omega>0,\qquad \varepsilon_z{}^0=-\omega<0,\qquad \varepsilon_\theta{}^0=\frac{u_r{}^0}{r}=\tfrac{1}{2}\omega>0$$

и компоненты формоизменения $s_r{}^0$, $s_z{}^0$ и $s_\theta{}^0$ вследствие несжимаемости среды не отличаются от скоростей деформирования $\varepsilon_r{}^0$, $\varepsilon_z{}^0$ и $\varepsilon_\theta{}^0$. Далее имеем

$$3\Gamma^0=S_r{}^0+S_z{}^0+S_\theta{}^0=K\quad \text{так как}\quad \varepsilon_r{}^0+\varepsilon_z{}^0+\varepsilon_\theta{}^0=0$$

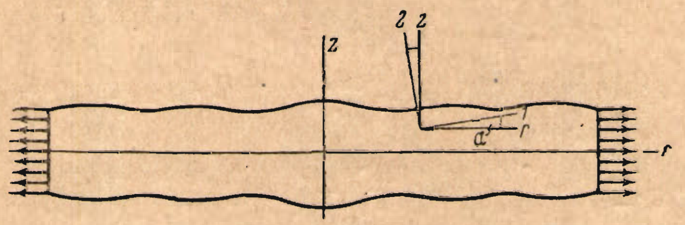
и, следовательно,

$$\begin{aligned}\sigma_r{}^0&=-p_0+S_r{}^0-\Gamma=-p_0+\tfrac{2}{3}K+\tfrac{1}{2}\mu\omega\\ \sigma_z{}^0&=-p_0+S_z{}^0-\Gamma=-p_0-\tfrac{4}{3}K-\mu\omega\\ \sigma_\theta{}^0&=-p_0+S_\theta{}^0-\Gamma=-p_0+\tfrac{2}{3}K+\tfrac{1}{2}\mu\omega\end{aligned} \tag{9}$$

Так как верхнее и нижнее основание пластины ($z=\pm h$) свободны от усилий, то следует положить $\sigma_z{}^0=0$, вследствие чего

$$p_0=-\mu\omega-\tfrac{4}{3}K,\qquad \sigma_r{}^0=\sigma_\theta{}^0=2K+\tfrac{3}{2}\mu\omega \tag{10}$$

Последнее соотношение определяет величину ω, характеризующую скорость деформирования пластины, ибо вследствие граничных условий на боковой ее поверхности следует положить $\sigma_r{}^0=q$. Если пластина не растягивается, а сжимается, то достаточно во всех написанных выше выражениях изменить знак у пластической постоянной. Для возмущенного движения направления главных осей тензора напряжения будут несколько отличаться от направлений осей основного движения. Именно, ось *3*, соответствующая направлению θ, останется в силу симметрии неизменной, оси же *1* и *2*, соответствующие направлениям r и z, отклонятся от этих направлений на малый угол α (фиг. 1).

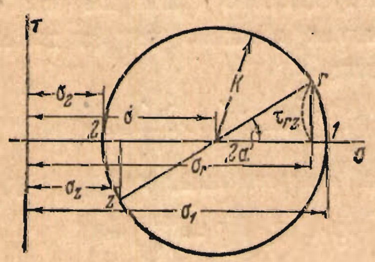


Фиг. 1

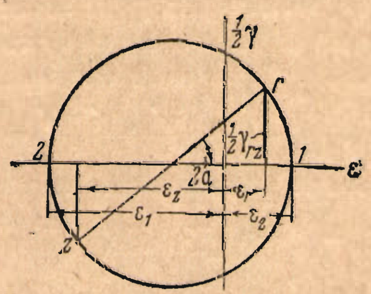
Вводя в рассмотрение круг Мора (фиг. 2), легко получим соотношения

$$\sigma_r' = \frac{\sigma_1'+\sigma_2'}{2} + \frac{\sigma_1'-\sigma_2'}{2}\cos 2\alpha, \quad \sigma_z = \frac{\sigma_1'+\sigma_2'}{2} - \frac{\sigma_1'-\sigma_2'}{2}\cos 2\alpha, \quad \tau_{zz}' = \frac{\sigma_1'-\sigma_2'}{2}\sin 2\alpha$$

где σ_1' и σ_2' — главные напряжения, относящиеся к возмущенному движению.



Фиг. 2



Фиг. 3

Аналогично (фиг. 3) для скоростей деформирования имеем

$$\varepsilon_r' = \frac{\varepsilon_1'+\varepsilon_2'}{2} + \frac{\varepsilon_1'-\varepsilon_2'}{2}\cos 2\alpha, \quad \varepsilon_z' = \frac{\varepsilon_1'+\varepsilon_2'}{2} - \frac{\varepsilon_1'-\varepsilon_2'}{2}\cos 2\alpha, \quad \gamma_{rz}' = (\varepsilon_1'-\varepsilon_2')\sin 2\alpha$$

где ε_1' и ε_2' — главные скорости деформирования, относящиеся к возмущенному движению. Так как оси *1* соответствует ось r, а оси *2* — ось z, то

$$\sigma_1' = -p_1 + \tfrac{2}{3}K + \mu\varepsilon_1', \quad \sigma_2' = -p_1 - \tfrac{4}{3}K + \mu\varepsilon_2' \tag{11}$$

или

$$\frac{\sigma_1'+\sigma_2'}{2} = -p_1 - \tfrac{1}{3}K + \mu\frac{\varepsilon_1'+\varepsilon_2'}{2}, \qquad \frac{\sigma_1'-\sigma_2'}{2} = K + \mu\frac{\varepsilon_1'-\varepsilon_2'}{2} \tag{12}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sigma_r' &= -p_1 - \tfrac{1}{3}K + K\cos 2\alpha + \mu\varepsilon_r', \\ & \qquad\qquad \tau_{rz}' = K\sin 2\theta + \tfrac{1}{2}\mu\gamma_{zr}' \\ \sigma_z' &= -p_1 - \tfrac{1}{3}K - K\cos 2\alpha + \mu\varepsilon_z', \end{aligned} \tag{13}$$

В этих равенствах

$$\begin{aligned} \varepsilon_r' &= \frac{\partial u_r'}{\partial r} = \frac{\partial u_r^0}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{1}{2} + \frac{\partial u_r}{\partial r}, \qquad \gamma_{rz}' = \frac{\partial u_r'}{\partial z} + \frac{\partial u_z'}{\partial r} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ \varepsilon_z' &= \frac{\partial u_z'}{\partial z} = \frac{\partial u_z^0}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\omega + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \qquad p_1 = p_0 + p \end{aligned} \tag{14}$$

причем u_r и u_z—возмущения компонент основного движения, а p—возмущение давления. Учитывая малость α, равенства (13) можно привести к виду

$$\begin{aligned}\sigma_r' &= -p_0 + \frac{2}{3}K + \frac{1}{2}\mu\omega - p + \mu\frac{\partial u_r}{\partial r} = \sigma_r^\circ - p + \mu\frac{\partial u_r}{\partial r}\\ \sigma_z' &= -p_0 - \frac{4}{3}K - \mu\omega - p + \mu\frac{\partial u_z}{\partial z} = \sigma_z^\circ - p + \mu\frac{\partial u_z}{\partial z}\end{aligned} \qquad (15)$$

или, так как $\sigma_r^\circ = 2K + \frac{3}{2}\mu\omega$ и $\sigma_z^0 = 0$, то

$$\sigma_r' = 2K + \frac{3}{2}\mu\omega - p + \mu\frac{\partial u_r}{\partial r}, \qquad \sigma_z' = -p + \mu\frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Далее имеем (фиг. 3)

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\gamma_{rz}'}{\varepsilon_r' - \varepsilon_z'} \approx \left[\left(\frac{1}{2}\omega + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right) - \left(-\omega + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\right]^{-1}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right)$$

или с точностью до малых второго порядка

$$2\alpha = \frac{2}{3\omega}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right)$$

Поэтому третье из равенств (13) может быть преобразовано к виду

$$\tau_{rz}' = \left(\frac{2K}{3\omega} + \frac{1}{2}\mu\right)\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) = \mu\beta\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right) \qquad \left(\beta = \frac{1}{2} + \frac{2K}{3\mu\omega}\right) \qquad (16)$$

В дифференциальных уравнениях возмущенного движения мы отбросим инерционные члены и массовые силы, считая влияние их на движение незначительным. После этого они примут вид

$$\frac{\partial \sigma_r'}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}'}{\partial z} + \frac{\sigma_z' - \sigma_\theta'}{r} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_{rz}'}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_z'}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}'}{r} = 0 \qquad (17)$$

Подставляя сюда компоненты тензора напряжений, получим уравнения

$$\begin{aligned}&-\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \mu\beta\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r\,\partial z}\right) + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2}\right) = 0\\ &-\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \mu\beta\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r\,\partial z}\right) + \mu\beta\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right) = 0\end{aligned} \qquad (18)$$

связывающие три неизвестные функции p, u_r и u_z. Для получения третьего уравнения следует воспользоваться условием несжимаемости среды

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \qquad (19)$$

Отсюда следует, что функции u_r и u_z могут быть представлены в виде

$$u_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial \chi}{\partial z}, \qquad u_z = \frac{1}{r}\frac{\partial \chi}{\partial r} \qquad (20)$$

где χ—некоторая функция, зависящая также и от времени.

Подставляя выражения u_r и u_z в уравнения (18), получаем

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r} &= -\beta\frac{1}{r}\chi_{zzz} - (1-\beta)\left(\frac{1}{r}\chi_{rrz} - \frac{1}{r^2}\chi_{rz}\right)\\ \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z} &= \beta\left(\frac{1}{r}\chi_{rrr} - \frac{1}{r^2}\chi_{rr} + \frac{1}{r^3}\chi_r\right) + (1-\beta)\,\chi_{rzz}\end{aligned} \qquad (21)$$

Дифференцируя первое уравнение по переменной z, а второе по r и вычитая одно уравнение из другого, приходим к уравнению для функции

$$\chi_{rrrr} - \frac{2}{r}\chi_{rrr} + \frac{3}{r^2}\chi_{rr} - \frac{3}{r^3}\chi_r + 2\nu\left(\chi_{rrzz} - \frac{1}{r}\chi_{rzz}\right) + \chi_{zzzz} = 0 \qquad (22)$$

где

$$\nu = \frac{1-\beta}{\beta} = \frac{3\mu\omega - 4K}{3\mu\omega + 4K}$$

Так как в рассматриваемом случае $\omega > 0$, то всегда $-1 < \nu < 1$.

Найдем частное решение уравнения, определяющего функцию χ, в виде

$$\chi = R(r) Z(z) \tag{23}$$

Получаем выражение

$$\left(R^{IV} - \frac{2}{r} R' + \frac{3}{r^2} R'' - \frac{3}{r^3} R'\right) Z + 2\nu\left(R'' - \frac{1}{r} R'\right) Z'' + RZ^{IV} = 0 \tag{24}$$

которое, если ввести обозначение

$$Q = R'' - \frac{1}{r} R'$$

может быть записано в виде

$$\left(Q'' - \frac{1}{r} Q'\right) Z + 2\nu A Z'' + RZ^{IV} = 0 \tag{25}$$

Переменные, зависящие от r, сократятся, если потребовать одновременно

$$Q'' - \frac{1}{r} Q' = mQ, \qquad Q = R'' - \frac{1}{r} R' = nR$$

что возможно лишь при условии $m = n$, причем функция $R(r)$ должна быть решением дифференциального уравнения

$$R'' - \frac{1}{r} R' + a^2 R = 0, \qquad \text{где} \qquad a^2 = -m \tag{26}$$

В этом случае

$$Q'' - \frac{1}{r} Q' = -a^2 Q = a^4 R, \qquad Q = -a^2 R$$

и выражение приводится после сокращения на $R(r)$ к виду

$$Z^{IV} - 2\nu a^2 Z'' + a^4 Z = 0 \tag{27}$$

представляющему собой линейное уравнение с постоянными коэффициентами.

Его характеристическое уравнение $\lambda^4 - 2\nu a^2 \lambda^2 + a^4 = 0$ имеет корни

$$i\gamma = i(\alpha + \beta i)a, \quad -i\gamma, \quad i\bar{\gamma} = i(\alpha - \beta i)a, \quad -i\bar{\gamma}, \quad \left(\alpha = \sqrt{\frac{1-\nu}{2}}, \ \beta = \sqrt{\frac{1-\nu}{2}}\right)$$

и, следовательно, общее решение дифференциального уравнения имеет вид.

$$Z(z) = C_1 \sin\gamma a z + C_2 \cos\gamma a z + C_3 \sin\bar{\gamma} a z + C_4 \cos\bar{\gamma} a z \tag{28}$$

Из условия симметрии движения относительно срединной плоскости $(z = 0)$

$$u_z(-z) = u_z(+z) \tag{29}$$

или, так как

$$u_z = \frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r} = \frac{1}{r} R'(r) Z(z) \tag{30}$$

то $Z(z) = -Z(-z)$, т. е. функция $Z(z)$ должна быть нечетной и, следовательно, произвольные постоянные C_2 и C_4 должны обращаться в нуль.

Выражение для $Z(z)$ будет вещественным, если взять его в форме

$$Z(z) = A \sin\gamma a z + \bar{A} \sin\bar{\gamma} a z \tag{31}$$

где A и $\bar{A}$ — две сопряженные константы.

Уравнение для $R(r)$ решается в функциях Бесселя. Решение имеет вид

$$R(r) = B_1 r J_1(ar) + B_2 r N_1(ar) \tag{32}$$

Так как u_r и u_z ограничены при $r = 0$, то B_2 надлежит положить равной нулю. Таким образом частное решение уравнения для χ имеет вид

$$\chi = (A \sin\gamma a z + \bar{A} \sin\bar{\gamma} a z) r J_1(ar) \tag{33}$$

Константа B_1 здесь опущена как несущественная.

Для определения функции p обратимся к первому из соотношений (21), написанных ранее для частных производных этой функции. Имеем

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r} = -\beta\frac{1}{r}\chi_{zzz} - (1-\beta)\left(\frac{1}{r}\chi_{rrz} - \frac{1}{r^2}\chi_{rz}\right)$$

Подставляя сюда выражение (23), получаем

$$\frac{1+\nu}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{1}{r}RZ''' - \nu\frac{1}{r}\left(R'' - \frac{1}{r}R'\right)Z', \quad \text{так как } \beta = \frac{1}{1+\nu}$$

Далее замечаем, что

$$\frac{1}{r}R'' - \frac{1}{r^2}R' = \frac{d}{dr}\left(\frac{R'}{r}\right)$$

и, кроме того, согласно уравнению (26), определяющему R, имеем

$$\frac{R}{r} = -\frac{1}{a^2}\left(\frac{R''}{r} - \frac{R'}{r^2}\right) = -\frac{1}{a^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{R'}{r}\right)$$

Производя интегрирование рассматриваемого соотношения, получаем

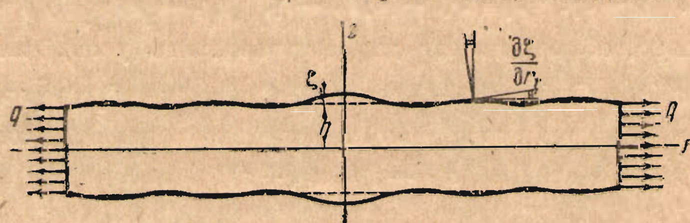
$$\frac{1+\nu}{\mu}p = \frac{R'}{r}\left[\frac{1}{a^2}Z''' - \nu Z'\right] + f(z) \qquad (34)$$

С помощью второго соотношения (21) и уравнений (26) и (27), которым удовлетворяют функции $R(r)$ и $Z(z)$, нетрудно убедиться, что $f'(z) = 0$ и, следовательно, произвольная функция сводится к некоторой постоянной. Для определения этой постоянной, а также комплексной постоянной A, входящей в выражение (31) для $Z(z)$, следует обратиться к граничным условиям.

Верхнее и нижнее основания тела вращения, деформирование которого мы рассматриваем, свободны от напряжения, поэтому на поверхностях $z = \pm[h + \zeta(r)]$ должны удовлетворяться условия

$$\sigma_r' \cos\nu r + \tau_{rz}' \cos\nu z = 0, \qquad \tau_{rz}' \cos\nu r + \sigma_z' \cos\nu z = 0 \qquad (35)$$

Вследствие малых углов отклонения нормали ν от оси z можно положить (фиг. 4) $\cos\nu z \approx 1$ и $\cos\nu r \approx -\partial\zeta/\partial r$. Кроме того, вследствие малости воз-



Фиг. 4

мущения границы $\zeta(r)$ достаточно требовать удовлетворения этих условий не на криволинейных граничных поверхностях, а на плоскостях $z = \pm h$.

Таким образом условия приводятся к виду

$$\sigma_z' = 0 \text{ и } \tau_{rz}' = \sigma_r'\frac{\partial\zeta}{\partial r} \quad \text{при} \quad z = \pm h \qquad (36)$$

В последнем условии напряжение σ_r' может быть заменено на σ_r^0, так как происходящая от этой замены погрешность имеет второй порядок малости.

Выражение (15) для σ_z' может быть преобразовано

$$\sigma_z' = -p + \mu\frac{\partial u_z}{\partial z} = -p + \mu\frac{1}{r}\frac{\partial^2\chi}{\partial r\,\partial z} = -\frac{\mu}{1+\nu}\frac{R'}{r}\left[\frac{1}{a^2}Z''' - \nu Z'\right] + \frac{\nu}{r}R'Z' + \text{const}$$

Так как при $z = \pm h$ напряжение σ_z' обращается в нуль при любом значении r, то заключаем, прежде всего, что константа, входящая в выражения для p, должна быть равна нулю и затем должно иметь место равенство

$$Z''' - a^2(1+2\nu)Z' = 0 \quad \text{при} \quad z = h \qquad (37)$$

Подставляя сюда выражение (31) для Z, получаем

$$\gamma(1+2\nu+\gamma^2)A\cos\gamma ah+\bar{\gamma}(1+2\nu+\bar{\gamma}^2)\bar{A}\cos\bar{\gamma}ah=0 \tag{38}$$

Так как

$$\gamma^2=\left(\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}+i\sqrt{\frac{1+\nu}{2}}\right)^2=-\nu+i\sqrt{1-\nu^2},\qquad \gamma\bar{\gamma}=1$$

то

$$2\nu=-\gamma^2-\bar{\gamma}^2,\qquad \gamma(1+2\nu+\gamma^2)=\gamma(1-\bar{\gamma}^2)=\gamma-\bar{\gamma},\qquad \bar{\gamma}(1+2\nu+\bar{\gamma}^2)=-(\gamma-\bar{\gamma})$$

Поэтому равенство (38) может быть представлено в виде пропорции

$$\frac{A}{\cos\bar{\gamma}ah}=\frac{\bar{A}}{\cos\gamma ah}=D \tag{39}$$

где константа D имеет действительное значение, так как первые два отношения являются взаимно сопряженными. Таким образом имеем

$$Z(z)=(\cos\bar{\gamma}ah\,\sin\gamma az+\cos\gamma ah\,\sin\bar{\gamma}az)\,D \tag{40}$$

Далее имеем

$$\tau_{rz}'=\mu\beta\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)=\frac{\mu}{1+\nu}\frac{1}{r}\left(\chi_{rr}-\frac{1}{r}\chi_r-\chi_{zz}\right)=$$

$$=\frac{\mu}{1+\nu}\frac{1}{r}\left[\left(R''-\frac{1}{r}R'\right)Z-RZ''\right]=-\frac{\mu}{1+\nu}\frac{1}{r}R(Z''+a^2Z) \tag{41}$$

Подставляя сюда выражение для функции Z, получаем

$$\tau_{rz}'=-\frac{\mu a^2}{1+\nu}\frac{R}{r}D[(1-\gamma^2)\cos\bar{\gamma}ah\sin\gamma az+(1-\bar{\gamma}^2)\cos\gamma ah\sin\bar{\gamma}az] \tag{42}$$

Полагая в этом выражении величину $z=h$ и замечая, что $1-\gamma^2=$ $=1-\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta i=2\beta(\beta-i\alpha)$ и точно также $1-\bar{\gamma}^2=2\beta(\beta+i\alpha)$, получаем

$$\tau_{rz}'=-\frac{\mu\beta a^2}{1+\nu}\frac{R(r)}{r}D(2\beta\sin 2\alpha ah+2\alpha\,\mathrm{sh}\,2\beta ah) \tag{43}$$

Следовательно, второе граничное условие приводится к виду

$$\sigma_r^0\frac{\partial\zeta}{\partial r}=-\frac{\mu\beta a^2}{1+\nu}\frac{R(r)}{r}D(2\beta\sin 2\alpha ah+2\alpha\,\mathrm{sh}\,2\beta ah) \tag{44}$$

Это условие может быть выполнено лишь при определенном виде функции ζ, именно $\zeta=\delta J_0(ar)$ Действительно, в этом случае

$$\frac{\partial\zeta}{\partial r}=a\delta J_0'(ar)=-a\delta J_1(ar)=-a\delta\frac{R(r)}{r} \tag{45}$$

и для константы D получаем значение

$$D=\frac{(1+\nu)\sigma_r^0}{\mu\beta a}\,\frac{\delta}{2\beta\sin 2\alpha ah+2\alpha\,\mathrm{sh}\,2\beta ah} \tag{46}$$

В общем случае будем считать функцию $\zeta(r)$ такой, что она допускает разложение в ряды по функциям Бесселя или представление в виде интеграла Фурье-Бесселя. В этом случае решение рассматриваемой задачи получится в виде комбинации частных решений, найденных выше. Мы ограничимся поэтому исследованием частного вида возмущения поверхности.

Рассмотрим составляющую скорости какой-либо точки этой поверхности, направленную параллельно оси вращения тела. Эта скорость отличается на величину u_z от соответствующей скорости u_z^0 основного движения. Так как в основном движении не происходит искажения плоских границ пластины, то если знак u_z совпадает со знаком возмущения $\zeta(r)$, то это возмущение имеет тенденцию к увеличению, и обратно, при разных знаках этих величин имеет место тенденция к известному сглаживанию возмущенной границы.

Для величины u_z имеем выражение

$$u_z = \frac{1}{r}\frac{\partial Z}{\partial r} = \frac{R'(r)}{r} Z = \frac{1}{r}\left[J_1(ar) + arJ_1'(ar)\right] D\left(\cos \gamma ah \sin \gamma az + \cos \overline{\gamma} ah \sin \overline{\gamma} az\right)$$

Подставляя сюда значение D и замечая, что, согласно известным формулам теории бесселевых функций $J_1(ar) + arJ_1'(ar) = arJ_0(ar)$, получаем

$$u_z = \frac{(1+\nu)\,\sigma_z^0 \delta J_0(ar)}{\mu\beta} \; \frac{\cos \overline{\gamma} ah \sin \gamma az + \cos \gamma ah \sin \overline{\gamma} az}{2\beta \sin 2\alpha ah + 2\alpha \, sh \, 2\beta ah} \tag{47}$$

Знак отношения $u_z / \zeta(r)$ решает вопрос о тенденции возмущения к возрастанию или убыванию. Подставляя сюда значение функции u_z при $z = h$ и выражение (45) для $\zeta(r)$, получаем, что для точек границы тела

$$\frac{u_z}{\zeta} = \frac{(1+\nu)\,\sigma_r^0}{\mu\beta} \; \frac{\sin 2\alpha ah}{2\beta \sin 2\alpha ah + 2\alpha \,\mathrm{sh}\, 2\beta ah} \tag{48}$$

Знаменатель отношения положителен, поэтому знак его определяется знаком функции $\sin 2\alpha ah$. Так как

$$\alpha = \sqrt{\frac{1-\nu}{2}} = \sqrt{\frac{4K}{3\mu\omega + 4K}} \qquad \left(\nu = \frac{3\mu\omega - 4K}{3\mu\omega + 4K}\right) \tag{49}$$

то при достаточно большой скорости деформирования $\varepsilon_z = -\omega$ $(\omega > 0)$ любое возмущение поверхности тела по закону $\zeta = iJ_0(ar)$ имеет тенденцию к возрастанию (неустойчивая деформация по терминологии А. Ильюшина [2]), — можно всегда подобрать такую скорость деформирования, чтобы имело место $0 < 2\alpha ah < \pi$. Параметр a определяет расстояния между нулями графика функции $J_0(ar)$. При убывании параметра a волны функции $J_0(ar)$ становятся более пологими. Так как $\alpha < 1$, то при $2ah < \pi$ имеет место $\sin 2\alpha ah > 0$, и возмущение при любой скорости имеет тенденцию к возрастанию. Таким образом достаточно большое растяжение вязкопластической круглой пластины практически невозможно из-за наличия возмущений поверхности, растущих по мере деформирования пластины. При сжатии, как можно убедиться соответствующим повторением выкладок, имеет место обратная картина, и тенденцию к возрастанию могут иметь лишь возмущения с достаточно малой длиной волны, с соответственно подобранной скоростью деформирования.

Поступила в редакцию
26 V 1943

STABILITY OF PLASTICO-VISCOUS FLOW OF A CIRCULAR PLATE

A. J. ISHLINSKY

(Summary)

The author deals with a flow of a plastic body of revolution, approaching a circular plate. The normal load is assumed to be uniformly distributed over the side surface of the body. The equations of the flow and the method of solution are the same as in the previous paper published in this journal [1].

The conditions for the stability of such a flow are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. Об устойчивости вязкопластического течения полосы и круглого прута. Прикладная математика и механика. 1943. Т. VII. Вып. 2. (Стр. 109).
2. Ильюшин А. А. Деформация вязкопластического тела. Ученые записки МГУ. 1940. Вып. 39.