Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том VII, 1943

РАВНОВЕСИЕ УПРУГОЙ СИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

А. И. ЛУРЬЕ

(Ленинград—Свердловск)

В опубликованной в шестом томе этого журнала работе Б. Г. Галеркина [1] дано исчерпывающее решение задачи о равновесии полой симметрично нагруженной сферы. При решении задачи о сферической оболочке, т. е. теле, ограниченном сферами $r=a$ и $r=b$ и срезами по коническим поверхностям $\vartheta=\alpha$ и $\vartheta=\beta$, необходимо еще удовлетворить краевым условиям на этих срезах, для чего нужно располагать еще одной системой частных решений уравнений теории упругости в сферических координатах. Эти решения должны быть таковы, чтобы добавление их не противоречило краевым условиям на поверхностях сфер $r=a$ и $r=b$; иными словами, соответствующие напряжения σ_r и $\tau_{r\vartheta}$ должны обращаться в нуль на этих поверхностях [1]. Таких (отличных от нуля) решений, регулярных во всей области $b\leqslant r\leqslant a$, $0\leqslant\vartheta\leqslant\pi$, конечно, не существует; но поскольку речь идет об оболочке, достаточно, чтобы искомые решения были регулярными в области, не содержащей полюса $\vartheta=\pi$ в случае оболочки, замкнутой в вершине $\vartheta=0$ (сферический сегмент), или обоих полюсов $\vartheta=0$ и $\vartheta=\pi$, когда оболочка срезана в вершине (сферический пояс). В дальнейшем решения уравнения теории упругости, оставляющие поверхности сфер $r=b$ и $r=a$ свободными от напряжений, будем называть решениями первого класса. Решения второго класса— это решения, для которых напряжения σ_r и $\tau_{r\vartheta}$ на поверхностях $r=b$ и $r=a$ принимают заданные значения.

В случае тонкой оболочки решения первого класса находятся в тесной связи с теми решениями, которые в теории оболочек Кирхгоффа—Лява служат для учета краевого эффекта [3]. Это сопоставление точного решения с приближенным, повидимому впервые осуществляемое в настоящей работе, позволяет надлежащим образом оценить пределы применимости исходных гипотез теории тонких оболочек и указать на бесполезность попыток уточнения решений, получаемых на базе этих гипотез.

1. В этом параграфе приводится построение вышеуказанных решений первого класса. Через $T_n(\vartheta)$ обозначается решение дифференциального уравнения Лежандра

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{dT_n}{d\vartheta}\right)+n(n+1)T_n=0 \tag{1.1}$$

[1] Эта же идея построения частных решений в применении к задаче о равновесии плиты использована в нашей работе [2].

При любом n и при $\nu=0,1,2,\ldots$ функции

$$\varphi_1=r^n\frac{d^\nu T_n}{d\vartheta^\nu}\begin{Bmatrix}\cos\nu\varphi\\ \sin\nu\varphi\end{Bmatrix}\qquad \varphi_2=r^{-n-1}\frac{d^\nu T_n}{d\vartheta^\nu}\begin{Bmatrix}\cos\nu\varphi\\ \sin\nu\varphi\end{Bmatrix}$$

будут решениями уравнения Лапласа, а функции $r^2\varphi_1$ и $r^2\varphi_2$ решениями бигармонического уравнения $\nabla^2\nabla^2F=0$. В качестве функций Галеркина дающих решение уравнений теории упругости, примем

$$\Psi_1=\Psi\cos\varphi,\qquad \Psi_3=\frac{\alpha_n}{n^2-1}\left(\frac{r}{b}\right)^{n+1}T_{n+1}+\frac{\beta_n}{n(n+2)}\left(\frac{r}{b}\right)^{-n}T_{n-1}+$$

$$\Psi_2=\Psi\sin\varphi,\qquad +\frac{\gamma_n(n+1)}{2n+5}\left(\frac{r}{b}\right)^{n+3}T_{n+1}+\frac{\delta_n n}{2n-3}\left(\frac{r}{b}\right)^{-n+2}T_{n-1}$$

где обозначено

$$\Psi=-\frac{\gamma_n}{2n+5}\left(\frac{r}{b}\right)^{n+3}\frac{dT_{n+1}}{d\vartheta}+\frac{\delta_n}{2n-3}\left(\frac{r}{b}\right)^{-n+2}\frac{dT_{n-1}}{d\vartheta}$$

По формулам, приведенным в [1], находим напряжения σ_r и $\tau_{r\vartheta}$:

$$\sigma_r=\left[-n\alpha_n\left(\frac{r}{b}\right)^{n-2}+(n+1)\beta_n\left(\frac{r}{b}\right)^{-n-3}+\varphi_1(n)\gamma_n\left(\frac{r}{b}\right)^{n}+\right.$$
$$\left.+\varphi_2(n)\delta_n\left(\frac{r}{b}\right)^{-n-1}\right]T_n \tag{1.2}$$

$$\tau_{r\vartheta}=-\left[\alpha_n\left(\frac{r}{b}\right)^{n-2}+\beta_n\left(\frac{r}{b}\right)^{-n-3}+\psi_1(n)\gamma_n\left(\frac{r}{b}\right)^{n}+\psi_2(n)\delta_n\left(\frac{r}{b}\right)^{-n-1}\right]\frac{dT_n}{d\vartheta}$$

где через σ обозначен коэффициент Пуассона и для краткости принято

$$\varphi_1(n)=(n+1)^2(2-n)+2\sigma(n+1),\qquad \psi_1(n)=n(n+2)-1+2\sigma$$
$$\varphi_2(n)=n^2(n+3)-2\sigma n,\qquad \psi_2(n)=n^2-2+2\sigma$$

Мы ищем решения, оставляющие поверхности сфер свободными от напряжений, т. е. при $r=a$ и при $r=b$ должно быть $\sigma_r=0$, $\tau_{r\vartheta}=0$. Если воспользоваться (1.2), то эти требования записываются в виде системы четырех линейных однородных уравнений для коэффициентов α_n, β_n, γ_n, δ_n; определитель этой системы должен обращаться в нуль, а сами коэффициенты при этом условии можно принять пропорциональными минорам первой строки этого определителя. Вычисляя, получим (обозначая отношение a/b буквой λ)

$$\begin{aligned}
\alpha_n&=\lambda^{-1}(\varphi_1\psi_2-\varphi_2\psi_1)-\psi_1[(n+1)\psi_2-\varphi_2]\lambda^{-2n-4}+\psi_2\lambda^{-3}[(n+1)\psi_1-\varphi_1]\\
\beta_n&=-\lambda^{-1}(\varphi_1\psi_2-\varphi_2\psi_1)-\psi_1(n\psi_2+\varphi_2)\lambda^{-3}+\psi_2(n\psi_1+\varphi_1)\lambda^{2n-2}\\
\gamma_n&=\lambda^{-2n-4}[(n+1)\psi_2-\varphi_2]+\lambda^{-3}(n\psi_2+\varphi_2)-(2n+1)\lambda^{-5}\psi_2\\
\delta_n&=-\lambda^{-3}[(n+1)\psi_1-\varphi_1]-\lambda^{2n-2}(n\psi_1+\varphi_1)+(2n+1)\lambda^{-5}\psi_1
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Условие обращения в нуль определителя системы дает уравнение для n

$$\left(\lambda^{\frac{2n+1}{2}}-\lambda^{-\frac{2n+1}{2}}\right)^2[(n+1)\psi_2-\varphi_2](n\psi_1+\varphi_1)-(2n+1)(\lambda-\lambda^{-1})^2(\varphi_1\psi_2-\varphi_2\psi_1)=0$$

Нетрудно предвидеть (и непосредственно проверить), что это выражение не меняет своего вида при замене n на $-(n+1)$; поэтому удобно ввести в рассмотрение параметр $\alpha=\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$; предыдущее уравнение примет вид

$$\left(\frac{\lambda^{\sqrt{\alpha}}-\lambda^{-\sqrt{\alpha}}}{\lambda-\lambda^{-1}}\right)^2=\alpha\frac{\alpha^2-\frac{5}{2}\alpha+\frac{73}{16}-4\sigma^2}{\alpha^2+\alpha\left(4(1-\sigma^2)-\frac{5}{2}\right)+\frac{9}{16}} \tag{1.4}$$

Очевидные корни этого уравнения $\alpha=0$ и $\alpha=1$ не представляют интереса.

Действительно, при $\alpha=0$, т. е. при $n=-\frac{1}{2}$, получается

$$\varphi_1=\varphi_2=\frac{5}{8}+\sigma, \qquad \psi_1=\psi_2=-\frac{7}{4}+2\sigma$$

и по (1.3) находим

$$\alpha_n=\beta_n=\gamma_n=\delta_n=0.$$

При $\alpha=1$ имеем:

а) или $n=\frac{1}{2}$, т. е.

$$\alpha_n=\frac{7}{4}-2\sigma, \qquad \delta_n=1, \qquad \beta_n=\gamma_n=0$$

б) или $n=-\frac{3}{2}$, т. е.

$$\alpha_n=\delta_n=0, \qquad \beta_n=\frac{7}{4}-2\sigma, \qquad \gamma_n=1$$

Подстановка в (1.2) также обнаруживает, что эти случаи соответствуют решениям, тождественно равным нулю. Вещественных корней, кроме $\alpha=0$ и $\alpha=1$, уравнение (1.4) не имеет; оно не имеет и чисто мнимых корней.

Пусть $\alpha_k=(\beta_k+i\gamma_k)^2$ — корень уравнения (1.4), $\bar\alpha_k=(\beta_k-i\gamma_k)^2$ — сопряженный ему корень; соответствующие значения n будут

$$n_k=\beta_k-\frac{1}{2}+i\gamma_k, \quad \bar n_k=\beta_k-\frac{1}{2}-i\gamma_k$$

Из двух значений $\sqrt{\alpha_k}$ можно сохранить одно, — второе соответствует замене n_k на $-(n_k+1)$ и уже содержится в написанном выше решении.

Решение T_{n_k} дифференциального уравнения (1.1) может быть представлено в виде суммы двух независимых частных решений, представляющих комплексные функции переменного ϑ; корню $\bar n_k$ соответствует решение $T_{\bar n_k}$, сопряженное T_{n_k}. По приведенным выше формулам теперь следует определить α_n, β_n, γ_n, δ_n, составить вещественные выражения функций Галеркина, а по ним перемещения и напряжения, для чего берутся полусуммы решений, соответствующих n_k и $\bar n_k$. Результат этих элементарных, хотя и весьма утомительных выкладок удобно представить в виде

$$u_r=-b\,\frac{1+\sigma}{E}\left(\frac{r}{b}\right)^{-\frac{3}{2}}\operatorname{Re}\left\{\left(r_1+\frac{r^2}{a^2}r_5\right)\operatorname{ch}\sqrt{\alpha}\ln\frac{r}{b}+\left(r_2+\frac{r^2}{a^2}r_6\right)\operatorname{sh}\sqrt{\alpha}\ln\frac{r}{b}+\right.$$
$$\left.+\frac{\lambda^{\sqrt{\alpha}}-\lambda^{-\sqrt{\alpha}}}{1-\lambda^2}\left[\left(r_3+\frac{r^2}{b^2}r_7\right)\operatorname{ch}\sqrt{\alpha}\ln\frac{r}{a}+\left(r_4+\frac{r^2}{b^2}r_8\right)\operatorname{sh}\sqrt{\alpha}\ln\frac{r}{a}\right]\right\}T_n(\vartheta) \qquad (1.5)$$

где для краткости принято

$$\begin{aligned}
&\left(1-\frac{9}{4}\varepsilon^2\right)r_1=\varepsilon-\frac{5}{2}\varepsilon^3+\left(\frac{73}{16}-4\sigma^2\right)\varepsilon^5\\
&\left(1-\frac{9}{4}\varepsilon^2\right)r_2=\left(1-\frac{3}{4}\varepsilon^2\right)\left[1-\frac{5}{2}\varepsilon^2+\left(\frac{73}{16}-4\sigma^2\right)\varepsilon^4\right]\\
&\left(1-\frac{9}{4}\varepsilon^2\right)r_3=-\varepsilon^2+\varepsilon^4+\left(\frac{21}{16}-\frac{3}{2}\sigma\right)\varepsilon^6-\\
&\qquad-\left(1-\frac{3}{4}\varepsilon^2\right)\left[\left(1-2\sigma\right)\varepsilon^2+\left(\frac{3}{4}+\frac{7}{2}\sigma-4\sigma^2\right)\varepsilon^4\right]\\
&\left(1-\frac{9}{4}\varepsilon^2\right)r_4=-\left(1-2\sigma\right)\left[\varepsilon^3+\left(\frac{3}{4}+\frac{7}{2}\sigma-4\sigma^2\right)\varepsilon^5\right]-\\
&\qquad-\left(1-\frac{3}{4}\varepsilon^2\right)\left[\varepsilon-\varepsilon^3-\left(\frac{21}{16}-\frac{3}{2}\sigma\right)\varepsilon^5\right]
\end{aligned} \qquad (1.6)$$

$$r_5=(3-4\sigma)\,\varepsilon-\left(\frac{19}{4}-13\sigma+8\sigma^2\right)\varepsilon^3,\qquad r_7=-2\,(1-\sigma)\varepsilon^2-\left(\frac{3}{2}-\frac{11}{2}\sigma+4\sigma^2\right)\varepsilon^4,$$

$$r_6=-1+\varepsilon^2-\left(\frac{35}{16}-6\sigma+4\sigma^2\right)\varepsilon^4,\qquad r_8=\varepsilon-\Big(\frac{1}{2}-6\sigma+8\sigma^2\,\Big(\,\varepsilon^3-\left(\frac{15}{16}-\frac{3}{2}\sigma\right)\varepsilon^5$$

причем буквой ε обозначено $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

Выражение для u_ϑ представляется в том же виде, что u_r, с заменой T_n на $dT_n\,/\,d\vartheta$ и с заменой коэффициентов r_i на ϑ_i:

$$\begin{aligned}
&\left(1-\frac{9}{4}\varepsilon^2\right)\vartheta_1=\varepsilon-\frac{5}{2}\varepsilon^3+\left(\frac{73}{16}-4\sigma^2\right)\varepsilon^5\\
&\left(1-\frac{9}{4}\varepsilon^2\right)\vartheta_2=\frac{3}{2}\left[\,\varepsilon^2-\frac{5}{2}\varepsilon^4+\left(\frac{73}{16}-4\sigma^2\right)\varepsilon^6\right]\\
&\left(1-\frac{9}{4}\varepsilon^2\right)\vartheta_3=-\varepsilon^2-\left(\frac{1}{2}-3\sigma\right)\varepsilon^4+\left(\frac{3}{16}-\frac{27}{4}\sigma+6\sigma^2\right)\varepsilon^6\\
&\left(1-\frac{9}{4}\varepsilon^2\right)\vartheta_4=-\left(\frac{5}{2}-2\sigma\right)\varepsilon^3+\left(\frac{3}{4}-\frac{7}{2}\sigma+4\sigma^2\right)\varepsilon^5+\left(\frac{63}{32}-\frac{9}{4}\sigma\right)\varepsilon^7\\
&\vartheta_5=-\varepsilon+\left(\frac{25}{4}-6\sigma\right)\varepsilon^3,\qquad \vartheta_6=-\left(\frac{7}{2}-4\sigma\right)\varepsilon^2+\left(\frac{63}{8}-16\sigma+8\sigma^2\right)\varepsilon^4\\
&\vartheta_7=\varepsilon^2+\left(\frac{3}{4}-9\sigma+8\sigma^2\right)\varepsilon^4,\quad \vartheta_8=\left(\frac{9}{2}-6\sigma\right)\varepsilon^3+\left(\frac{27}{8}-3\sigma\right)\varepsilon^5
\end{aligned}\tag{1.7}$$

Выражения для напряжения σ_r представим в аналогичной форме:

$$\sigma_r=-\left(\frac{r}{b}\right)^{-\frac{5}{2}}\operatorname{Re}\left\{\left(\sigma_1+\frac{r^2}{a^2}\sigma_5\right)\operatorname{ch}\sqrt{\alpha}\ln\frac{r}{b}+\left(\sigma_2+\frac{r^2}{a^2}\sigma_6\right)\operatorname{sh}\sqrt{\alpha}\ln\frac{r}{b}+\right.$$
$$\left.+\frac{\lambda^{\sqrt{\alpha}}-\lambda^{-\sqrt{\alpha}}}{1-\lambda^2}\left[\left(\sigma_3+\frac{r^2}{b^2}\sigma_7\right)\operatorname{ch}\sqrt{\alpha}\ln\frac{r}{a}+\left(\sigma_4+\frac{r^2}{b^2}\sigma_8\right)\operatorname{sh}\sqrt{\alpha}\ln\frac{r}{a}\right]\right\}T_n(\vartheta)\tag{1.8}$$

где обозначено

$$\begin{aligned}
&\sigma_1=-\sigma_5=\frac{1}{\varepsilon}-\frac{5}{2}\varepsilon+\left(\frac{73}{16}-4\sigma^2\right)\varepsilon^3,\qquad \sigma_2=-\frac{1}{2}+\frac{5}{4}\varepsilon^2-\left(\frac{73}{32}-2\sigma^2\right)\varepsilon^4\\
&\sigma_3=-\sigma_7=-1+\left(\frac{3}{2}-\sigma\right)\varepsilon^2+\left(\frac{27}{16}+\frac{1}{4}\sigma-2\sigma^2\right)\varepsilon^4\\
&\sigma_4=-\left(\frac{1}{2}-2\sigma\right)\varepsilon-\left(\frac{5}{4}+\frac{7}{2}\sigma-4\sigma^2\right)\varepsilon^3-\left(\frac{21}{32}-\frac{3}{4}\sigma\right)\varepsilon^5\\
&\sigma_6=\frac{5}{2}-\left(\frac{17}{4}-2\sigma\right)\varepsilon^2-\left(\frac{35}{32}+\frac{1}{2}\sigma-2\sigma^2\right)\varepsilon^4\\
&\sigma_8=-\left(\frac{3}{2}+2\sigma\right)\varepsilon-\left(\frac{7}{4}-\frac{7}{2}\sigma-4\sigma^2\right)\varepsilon^3-\left(\frac{15}{32}+\frac{3}{4}\sigma\right)\varepsilon^5
\end{aligned}\tag{1.9}$$

В той же форме (1.8) представляется выражение $\tau_{r\vartheta}$, причем $T_n(\vartheta)$ надо заменить на $dT_n\,/\,d\vartheta$, а коэффициенты σ_i на τ_i

$$\begin{aligned}
&\tau_1=\tau_5=0,\qquad \tau_2=-1+\frac{5}{2}\varepsilon^2-\left(\frac{73}{16}-4\sigma^2\right)\varepsilon^4\\
&\tau_3=-\tau_7=\left(1-2\sigma\right)\varepsilon^2+\left(\frac{3}{4}+\frac{7}{2}\sigma-4\sigma^2\right)\varepsilon^4\\
&\tau_4=-\tau_8=\varepsilon-\varepsilon^3-\left(\frac{21}{16}-\frac{3}{2}\sigma\right)\varepsilon^5,\qquad \tau_6=1-\left(\frac{9}{2}-4\sigma\right)\varepsilon^2+\left(\frac{49}{16}-7\sigma+4\sigma^2\right)\varepsilon^4
\end{aligned}\tag{1.10}$$

Легко непосредственно проверить по этим выражениям, что $\tau_{r\vartheta}$ при $r=a$ и $r=b$, а также σ_r при $r=a$ обращаются в нуль тождественно, тогда как σ_r при $r=b$ также обращается в нуль, но в силу уравнения (1.4).

Наконец, выражения для разности $\sigma_\vartheta-\sigma_\varphi$ и суммы $\sigma_\vartheta+\sigma_\varphi$ нормальных напряжений σ_ϑ и σ_φ также представляются в виде (1.8), причем в первом случае (т. е. для $\sigma_\vartheta - \sigma_\varphi$) функция T_n заменяется на $\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)T_n - 2\frac{dT_n}{d\vartheta}\operatorname{ctg}\vartheta$, а $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_8$ на $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_8$ согласно (1.7); во втором случае (т. е. для $\sigma_\vartheta + \sigma_\varphi$) при том же множителе T_n, что и в (1.8), коэффициенты $\sigma_1, \ldots, \sigma_8$ заменяются на $a_1, \ldots, a_8$, определяемые по формулам

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2r_1 + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\vartheta_1, &\quad (1-2\sigma)\,a_5 &= (2+\sigma)\,r_5 + 2\sigma\frac{r_6}{\varepsilon} + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\vartheta_5\\
a_2 &= 2r_2 + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\vartheta_2, &\quad (1-2\sigma)\,a_6 &= (2+\sigma)\,r_6 + 2\sigma\frac{r_5}{\varepsilon} + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\vartheta_6\\
a_3 &= 2r_3 + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\vartheta_3, &\quad (1-2\sigma)\,a_7 &= (2+\sigma)\,r_7 + 2\sigma\frac{r_8}{\varepsilon} + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\vartheta_7\\
a_4 &= 2r_4 + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\vartheta_4, &\quad (1-2\sigma)\,a_8 &= (2+\sigma)\,r_8 + 2\sigma\frac{r_7}{\varepsilon} + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\vartheta_8
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Таковы решения уравнений теории упругости, оставляющие поверхности сфер $r=b$ и $r=a$ свободными от напряжений, названные выше решениями первого класса. К числу решений этого класса можно отнести также тривиальное решение

$$u_r = A\cos\vartheta, \qquad u_\vartheta = -A\sin\vartheta, \qquad \sigma_r = \tau_{r\vartheta} = \sigma_\varphi = \sigma_\vartheta = 0 \tag{1.12}$$

соответствующее перемещению сферы, без деформации, вдоль оси z.

2. В этом разделе приводим, следуя Б. Г. Галеркину, решения уравнений теории упругости, позволяющие в своей совокупности удовлетворить произвольным наперед заданным симметричным условиям загружения поверхностей сфер $r=b$ и $r=a$. Эти решения (второго класса) разбиваем на три группы.

а) Решение Ляме, соответствующее радиальному смещению,

$$u_r = -\frac{1+\sigma}{E}\left(C_0\frac{1-2\sigma}{1+\sigma}\,r - \frac{B_0}{r^2}\right), \qquad u_\vartheta = 0 \tag{2.1}$$

$$\sigma_r = C_0 - \frac{2B_0}{r^3}, \qquad \sigma_\vartheta = \sigma_\varphi = C_0 + \frac{B_0}{r^3}, \qquad \tau_{r\vartheta} = 0$$

б) Решение, соответствующее нагрузкам, равнодействующая которых (направленная по оси оболочки) отлична от нуля:

$$\begin{aligned}
u_r = &-\frac{1+\sigma}{E}\Big\{A_1\{[\ln r\,(1+\cos\vartheta)+1]\cos\vartheta - 1\} + \frac{2B_1}{r^3}\cos\vartheta -\\
&-(1-4\sigma)C_1r^2\cos\vartheta - \frac{4(1-\sigma)}{r}D_1\cos\vartheta\Big\}\\
u_\vartheta = &-\frac{1+\sigma}{E}\Big\{-A_1\left\{[\ln r\,(1+\cos\vartheta)]\sin\vartheta + \frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{1+\cos\vartheta}\right\} + \frac{B_1}{r^3}\sin\vartheta -\\
&-(3-2\sigma)\,C_1r^2\sin\vartheta + \frac{3-4\sigma}{r}D_1\sin\vartheta\Big\}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Соответствующие напряжения будут

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \left[-\frac{A_1}{r} + \frac{6B_1}{r^4} + 2(1+\sigma)\,C_1r - (4-2\sigma)\frac{D_1}{r^2}\right]\cos\vartheta\\
\sigma_\vartheta &= \left[\frac{A_1}{r} - \frac{3B_1}{r^4} + 4(1+\sigma)\,C_1r + (1-2\sigma)\frac{D_1}{r^2}\right]\cos\vartheta - \frac{A_1}{r}\frac{1}{1+\cos\vartheta}\\
\sigma_\varphi &= \left[\frac{A_1}{r(1+\cos\vartheta)} - \frac{3B_1}{r^4} + 4(1+\sigma)C_1r + (1-2\sigma)\frac{D_1}{r^2}\right]\cos\vartheta\\
\tau_{r\vartheta} &= \left[\frac{A_1}{r} + \frac{3B_1}{r^4} + (1+\sigma)C_1r + (1-2\sigma)\frac{D_1}{r}\right]\sin\vartheta
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Это решение находится в тесной связи с известным «элементарным решением второго типа» Буссинеска (см. [3], стр. 198).

в) Решения, удовлетворяющие произвольным условиям загружения поверхностей сфер $r=b$ и $r=a$, когда равнодействующая нагрузок равна нулю:

$$u_r=-\frac{1+\sigma}{E}\Big[A_n n r^{n-1}+B_n(n+1)r^{-n-2}+ \\ +C_n(n-2+4\sigma)r^{n+1}+D_n(n+3-4\sigma)r^{-n}\Big]P_n(\cos\vartheta) \tag{2.4}$$

$$u_\vartheta=-\frac{1+\sigma}{E}\Big[A_n r^{n-1}-B_n r^{-n-2}+C_n\frac{n+5-4\sigma}{n+1}r^{n+1}-D_n\frac{n-4+4\sigma}{n}r^{-n}\Big]\frac{dPn}{d\vartheta}$$

$$\sigma_r=\{-A_n n(n-1)r^{n-2}+B_n(n+1)(n+2)r^{-n-3}+ \\ +C_n[(n+1)(2-n)+2\sigma]r^n+D_n(n^2+3n-2\sigma)r^{-n-1}\}P_n(\cos\vartheta)$$

$$\sigma_\vartheta-\sigma_\varphi=\Big\{-A_n r^{n-2}+B_n r^{-n-3}-C_n\frac{n+5-4\sigma}{n+1}r^n+ \\ +D_n\frac{n-4+4\sigma}{n}r^{-n-1}\Big\}\left(\frac{d^2P_n}{d\vartheta^2}-\frac{dP_n}{d\vartheta}\operatorname{ctg}\vartheta\right) \tag{2.5}$$

$$\sigma_\vartheta+\sigma_\varphi=\{A_n n(n-1)r^{n-2}-B_n(n+1)(n+2)r^{-n-3}+C_n[n^2+3n+ \\ +4\sigma n+4(1+\sigma)]r^n+D_n(-n^2+n+4\sigma n-2)r^{-n-1}\}P_n(\cos\vartheta)$$

$$\tau_{r\vartheta}=-\Big\{A_n(n-1)r^{n-2}+B_n(n+2)r^{-n-3}+C_n\frac{n(n+2)-1+2\sigma}{n}r^n+ \\ +D_n\frac{n^2-2+2\sigma}{n}r^{-n-1}\Big\}\frac{dPn}{d\vartheta}$$

при $n=2, 3, 4, \ldots$

Приведем еще частные решения, соответствующие технически наиболее важным случаям наличия внешних объемных сил.

а) Сила веса (γ — вес единицы объема)

$$u_r=\frac{\gamma(1+\sigma)}{2E}r^2\left(\cos^2\vartheta-\frac{\sigma}{1+\sigma}\right)\cos\vartheta,\qquad \sigma_r=\gamma r\left[\frac{3}{5}\cos\vartheta+\frac{2}{5}P_3(\cos\vartheta)\right] \tag{2.6}$$

$$u_\vartheta=-\frac{\gamma(1+\sigma)}{E}r^2\left(\cos^2\vartheta+\frac{\sigma}{1+\sigma}\right)\sin\vartheta,\quad \tau_{r\vartheta}=-\gamma r\left[\frac{1}{5}\sin\vartheta-\frac{2}{15}\frac{dP_3}{d\vartheta}\right] \tag{2.7}$$

где $P_n(\cos\vartheta)$—полином Лежандра порядка n.

б) Центробежные силы при вращении сферы с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси оболочки

$$u_r=-\frac{\omega^2\gamma(1+\sigma)(1-2\sigma)}{8gE(1-\sigma)}r^2\sin^4\vartheta,\quad u_\vartheta=-\frac{\omega^2\gamma(1+\sigma)(1-2\sigma)}{8gE(1-\sigma)}r^3\sin^3\vartheta\cos\vartheta$$

$$\sigma_r=-\frac{\omega^2\gamma}{8g(1-\sigma)}r^2\left[\frac{24}{35}(1-2\sigma)P_4(\cos\vartheta)-\frac{30-4\sigma}{21}P_2(\cos\vartheta)+\frac{78+124\sigma}{105}\right]$$

$$\sigma_\vartheta=-\frac{\omega^2\gamma}{8g(1-\sigma)}r^2[4\sigma\sin^2\vartheta+3(1-2\sigma)\cos^2\sigma\sin^2\vartheta] \tag{2.8}$$

$$\sigma_\varphi=-\frac{\omega^2\gamma}{8g(1-\sigma)}r^2(1+2\sigma)\sin^2\vartheta$$

$$\tau_{r\vartheta}=-\frac{\omega^2\gamma}{8g(1-\sigma)}3(1-2\sigma)r^2\left[-\frac{4}{21}\frac{dP_2}{d\vartheta}+\frac{2}{35}\frac{dP_4}{d\vartheta}\right]$$

Практику применения этих решений проще всего пояснить примером.

Рассмотрим равновесие тяжелой полой полусферы, покоящейся на гладкой обсолютно жесткой плоскости. В первую очередь строим решение, относящееся к случаю тяжелой полой сферы, для чего нужно взять сумму решений (2.6), (2.2) и (2.4) для $n=3$, причем восемь постоянных $A_1, \ldots, D_1, A_3, \ldots, D_3$ определятся из условия обращения в нуль напряжений σ_r и $\tau_{r\vartheta}$ при $r=b$ и $r=a$. К этому решению далее следует добавить решения первого класса, также оставляющие поверхности $r=b$ и $r=a$ свободными от напряжений.

Каждое из этих решений, соответствующее некоторому корню α_k уравнения (1.4), содержит четыре вещественных произвольных постоянных, входящих в выражение общего интеграла дифференциального уравнения Лежандра (1.1). Две из этих постоянных определяются условием регулярности решения в полюсе $\vartheta=0$, две другие должны быть подобраны так чтобы удовлетворялись условия на краю $\vartheta=\frac{1}{2}\pi$ полусферы, которые в рассматриваемом примере суть $u_\vartheta=0$ и $\tau_{r\vartheta}=0$ (при $\vartheta=\frac{1}{2}\pi$). Задача, с которой здесь приходится иметь дело, не проста: речь идет о представлении двух заданных функций переменной r (т. е. значений u_ϑ и $\tau_{r\vartheta}$ при $\vartheta=\frac{1}{2}\pi$ в решении для сферы) в виде ряда по неортогональным функциям, вид которых определяется решениями первого класса и которые зависят от корней заданного трансцендентного уравнения (1.4)[1].

Математическим задачам этого типа посвящено большое число исследований, здесь достаточно указать на работу Г. А. Гринберга[4].

Для построения приближенного решения следует довольствоваться удовлетворением условиям на краю $\vartheta=\frac{1}{2}\pi$ в духе решения Сен-Венана для призматического стержня. В нашем примере можно ограничиться требованием обращения в нуль на этом краю перерезывающей силы, изгибающего момента и перемещения u_ϑ при $r=r_0=\frac{1}{2}(a+b)$. Нужно располагать тремя произвольными постоянными, для чего используется одно регулярное в полюсе $\vartheta=0$ решение первого класса, соответствующее определенному корню уравнения (1.4), и тривиальное решение (1.12). Конечно, это решение будет тем точнее, чем меньше толщина оболочки.

3. Займемся теперь рассмотрением случая весьма тонкой оболочки. Начнем с решения уравнения (4) в предположении, что отношение толщины оболочки $h=a-b$ к ее среднему радиусу $r_0=\frac{1}{2}(a+b)$ весьма мало

$$k^2=\frac{h}{r_0}\ll 1$$

Полагая

$$\lambda=\frac{a}{b}=e^u=\frac{r_0+\frac{1}{2}h}{r_0-\frac{1}{2}h}=\frac{1+\frac{1}{2}k^2}{1-\frac{1}{2}k^2},\qquad u=\ln\lambda=k^2+\frac{1}{12}k^6+\ldots$$

и принимая $\alpha=\beta/u$, ищем β в виде ряда по степеням малого параметра u

$$\beta=\beta_0+\beta_1 u+\beta_2 u^2+\ldots$$

Вычисление, подробностей которого не приводим, дает

$$\beta_0^2=-12(1-\sigma^2),\quad \beta_1=\frac{5}{4}-\frac{6}{5}(1-\sigma^2),\quad \beta_2=\left[\frac{9}{40}-\frac{23}{210}(1-\sigma^2)-\frac{1}{24}\frac{1}{1-\sigma^2}\right]\beta_0,\ldots$$

Отсюда следует, что искомую неизвестную α можно представить в виде

$$\alpha=\frac{A}{k^2}\qquad\text{или}\qquad k^2=A\varepsilon^2 \tag{3.1}$$

где для краткости обозначено

$$A=\sqrt{12(1-\sigma^2)}\,i\left\{1-\frac{1}{\sqrt{12(1-\sigma^2)}}\left(\frac{5}{4}-\frac{6}{5}(1-\sigma^2)\right)ik^2+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{17}{120}-\frac{23}{210}(1-\sigma^2)-\frac{1}{24}\frac{1}{1-\sigma^2}\right]k^4+\ldots\right\}$$

Перейдем теперь к составлению приближенных выражений для пере-

---

[1] Не приводим доказательства, что это уравнение имеет бесчисленное множество комплексных корней.

мещений, и напряжений, соответствующих решениям первого класса, для чего нужно представить точные решения этого класса, приведенные в разделе **1**, в виде рядов по степеням k^2. Положим

$$r = r_0 + \frac{h}{2}x = r_0\left(1 + \frac{1}{2}k^2 x\right)$$

Переменная x меняется в интервале $(-1,1)$, краям которого соответствуют внутренняя $(r = b)$ и внешняя $(r = a)$ поверхности сфер. Если использовать соотношения

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2}k^2(x-1) + \ldots, \qquad \operatorname{sh}\sqrt{\alpha}\ln\frac{r}{a} = \frac{1}{2}A\varepsilon(x-1) + \ldots$$

$$\frac{r}{b} = 1 + \frac{1}{2}k^2(x+1) + \ldots, \qquad \operatorname{ch}\sqrt{\alpha}\ln\frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{8}A^2\varepsilon^2(x-1)^2 + \ldots$$

и т. д., то после вычислений получим искомые формулы, которые приводим в первом приближении, ограничиваясь первыми членами указанных выше рядов; получение дальнейших приближений требует проведения еще более значительной вычислительной работы, но не может быть связано с принципиальными затруднениями. Находим

$$\begin{gathered}
u_r = r_0 \operatorname{Re} T_n(\vartheta), \qquad u_\vartheta = \frac{1}{2}k^2 r_0 \operatorname{Re} T_n'(\vartheta)\left(\frac{2(1+\sigma)}{A} - x\right) \\
\sigma_r = \frac{3}{2}Ek^2(x^2-1)\operatorname{Re} T_n(\vartheta)\left(\frac{1}{6}x - \frac{1+\sigma}{A}\right), \qquad \tau_{r\vartheta} = \frac{3}{2}Ek^2(x^2-1)\operatorname{Re}\frac{T_n'(\vartheta)}{A} \\
\sigma_\vartheta = \frac{Ex}{2(1-\sigma^2)}\operatorname{Re} AT_n(\vartheta) - Ek^2\operatorname{Re}\frac{T_n'(\vartheta)}{A}\left(1 - \frac{Ax}{2(1+\sigma)}\right)\operatorname{ctg}\vartheta \\
\sigma_\varphi = \frac{E\sigma x}{2(1-\sigma^2)}\operatorname{Re} AT_n(\vartheta) + E\operatorname{Re} T_n(\vartheta) + Ek^2\operatorname{Re}\frac{T_n'(\vartheta)}{A}\left(1 - \frac{Ax}{2(1+\sigma)}\right)\operatorname{ctg}\vartheta
\end{gathered} \tag{3.2}$$

Здесь через T_n обозначено решение уравнения Лежандра (1.1), отличающееся от так же обозначенного решения этого уравнения в разделе **1** постоянным множителем. Конечно, σ_r и $\tau_{r\vartheta}$ обращаются в нуль при $x = \pm 1$. При той степени точности, с какой здесь даны формулы (3.2), выражение A должно быть взято в виде

$$A = \sqrt{12(1-\sigma^2)}\, i = 2s^2 i, \qquad s = \sqrt[4]{3(1-\sigma^2)} \tag{3.3}$$

Если для проверки этих результатов обратиться к уравнениям статики

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\tau_{r\vartheta}}{\partial\vartheta} + \tau_{r\vartheta}\operatorname{ctg}\vartheta\right) + \frac{2\sigma_r - \sigma_\varphi - \sigma_\vartheta}{r} = 0, \qquad \frac{\partial\tau_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{3\tau_{r\vartheta}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\vartheta}{\partial\vartheta} + \frac{\sigma_\vartheta - \sigma_\varphi}{r}\operatorname{ctg}\vartheta = 0$$

то вычисление покажет, что первое из этих уравнений удовлетворяется, если пренебречь членами порядка k^2, а второе—если пренебречь членами порядка k, именно слагаемым $k^2\,\partial T_n/\partial\vartheta$, имеющим, как будет показано, этот порядок. При вычислении надо иметь в виду, что поскольку

$$\frac{df}{dr} = \frac{2}{r_0 k^2}\frac{df}{dx}$$

то, например, $\partial\sigma_r/\partial r$ нужно сохранить, тогда как σ_r/r следует пренебречь.

Имея формулы для напряжений, легко составить выражения для усилий и моментов, рассматриваемых обычно в теории тонких оболочек; с той степенью точности, которая здесь проводится, следует принять, например,

$$S_\vartheta = \int_b^a \sigma_\vartheta\frac{r}{r_0}\,dr \approx \frac{h}{2}\int_{-1}^{1}\sigma_\vartheta\,dx, \qquad M_\vartheta = \int_b^a \sigma_\vartheta\frac{r}{r_0}(r - r_0)\,dr \approx \frac{h^2}{4}\int_{-1}^{1}\sigma_\vartheta x\,dx$$

Таким образом, находим растягивающие усилия и перерезывающую силу

$$S_\vartheta = -\frac{Eh^2}{r_0\sqrt{12(1-\sigma^2)}}\,\mathrm{Im}\,T_n'(\vartheta)\,\mathrm{ctg}\,\vartheta, \qquad Q = -\frac{Eh^2}{r_0\sqrt{12(1-\sigma^2)}}\,\mathrm{Im}\,T_n'(\vartheta) \quad (3.4)$$

$$S_\varphi = Eh\,\mathrm{Re}\,T_n(\vartheta) + \frac{Eh^2}{r_0\sqrt{12(1-\sigma^2)}}\,\mathrm{Im}\,T_n'(\vartheta)\,\mathrm{ctg}\,\vartheta$$

и, наконец, изгибающие моменты

$$\begin{aligned} M_\vartheta &= -\frac{Eh^2}{\sqrt{12(1-\sigma^2)}}\,\mathrm{Im}\,T_n + \frac{Eh^3}{12(1+\sigma)r_0}\,\mathrm{Re}\,T_n'(\vartheta)\,\mathrm{ctg}\,\vartheta \\ M_\varphi &= -\frac{Eh^2\sigma}{\sqrt{12(1-\sigma^2)}}\,\mathrm{Im}\,T_n - \frac{Eh^3}{12(1+\sigma)r_0}\,\mathrm{Re}\,T_n'(\vartheta)\,\mathrm{ctg}\,\vartheta \end{aligned} \qquad (3.5)$$

Уравнения статики теории тонких оболочек (при отсутствии нагрузки)

$$S_\vartheta = Q\,\mathrm{ctg}\,\vartheta, \qquad \frac{dQ}{d\vartheta} = S_\varphi, \qquad \frac{dM_\vartheta}{d\vartheta} + (M_\vartheta - M_\varphi)\,\mathrm{ctg}\,\vartheta = Qr_0$$

конечно, при этом удовлетворяются с указанной степенью точности.

4. Остается сделать указание о выборе решений дифференциального уравнения Лежандра (1.1), имеющих нужную степень точности.

В случае замкнутой в вершине оболочки нужно выбрать решение этого уравнения, регулярное в полюсе $\vartheta = 0$; такое решение, равное 1 при $\vartheta = 0$, обозначим через $P_n(\cos\vartheta)$; при любом n его можно представить интегралом Мелера, (см. [5], стр. 108)

$$P_n(\cos\vartheta) = \frac{2}{\pi}\int_0^\vartheta \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\vartheta)}}\,d\varphi = \frac{2\vartheta}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta\psi}{\sqrt{2(\cos\vartheta\psi - \cos\vartheta)}}\,d\psi \qquad (4.1)$$

При малых ϑ этот интеграл можно вычислить следующим путем. Имеем

$$\left[2\,\frac{\cos\vartheta\psi - \cos\vartheta}{\vartheta^2}\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\psi^2}}\left[1 + \frac{\vartheta^2}{24}(1+\psi^2) + \frac{\vartheta^4}{48}\left(\frac{7}{120} + \frac{11}{60}\psi^2 + \frac{7}{120}\psi^4\right) + \cdots\right]$$

Делая подстановку $\sin\lambda = \psi$ и вспоминая, что

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta\sin\lambda\right]d\lambda = J_0\left(\left[n+\frac{1}{2}\right]\vartheta\right)$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta\sin\lambda\right]\cos 2m\lambda\,d\lambda = J_{2m}\left(\left[n+\frac{1}{2}\right]\vartheta\right)$$

получим

$$P_n(\cos\vartheta) = J_0\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\vartheta\right)a_1(\vartheta) - J_2\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\vartheta\right)a_2(\vartheta) + J_4\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\vartheta\right)a_3(\vartheta) + \ldots \quad (4.2)$$

где для краткости обозначено

$$a_1(\vartheta) = 1 + \frac{\vartheta^2}{16} + \frac{11}{3072}\vartheta^4 + \ldots, \quad a_2(\vartheta) = \frac{\vartheta^2}{48}\left(1 + \frac{29}{240}\vartheta^2 + \ldots\right), \quad a_3(\vartheta) = \frac{\vartheta^4}{46080} + \ldots$$

Отметим еще, что $n + \frac{1}{2} = \sqrt{\alpha} \approx \frac{s}{k}\sqrt{2i}$; поэтому аргументом бесселевых функций служит $\frac{s\vartheta}{k}\sqrt{2i} = \frac{s\vartheta}{k}(1+i)$. Для этого аргумента имеются таблицы в сборниках Янке-Эмде, Шпильрейна и др. При конечных значениях ϑ, $|(n+\frac{1}{2})\vartheta| \gg 1$, и для вычисления P_n можно пользоваться[1] асимптотическим

[1] Не следует пользоваться содержащими неточность формулами Лява [3] на стр. 618.

представлением [5], (стр. 135). Если воспользоваться еще формулой асимптотического, представления функции гамма [5] то с той степенью точности, с которой мы ведем вычисление, следует принять

$$P_n(\cos\vartheta) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi(n+\frac{1}{2})\sin\vartheta}}\left[\sin\varphi - \frac{1}{8(n+\frac{1}{2})}\operatorname{ctg}\vartheta\cos\varphi\right] \tag{4.3}$$

где $\varphi = (n+\frac{1}{3})\vartheta + \frac{1}{4}\pi$. Заменив $n+\frac{1}{2}$ приведенным выше значением, получим, отбрасывая слагаемые, содержащие множитель $\exp(-s\vartheta/k)$,

$$P_n(\cos\vartheta) \sim \sqrt{\frac{k}{2\sqrt{2\pi s}\sin\vartheta}}\left(1+\frac{k(1+i)}{16s}\operatorname{ctg}\vartheta\right)\left[\cos\left(\frac{s\vartheta}{k}-\frac{\pi}{8}\right)-\right.$$
$$\left.-i\sin\left(\frac{s\vartheta}{k}-\frac{\pi}{8}\right)\right]\exp\frac{s\vartheta}{k} \tag{4.4}$$

Для вычислений нужно располагать величиной $\frac{1}{2}k^2\frac{dP_n}{d\vartheta}$. С точностью, соответствующей формулам раздела 3, можно ограничиться главным членом

$$\frac{dP_n}{d\vartheta} \sim \sqrt{\frac{4}{\sqrt{2\pi k}\sin\vartheta}}\left[\cos\left(\frac{s\vartheta}{k}+\frac{\pi}{8}\right)-i\sin\left(\frac{s\vartheta}{k}+\frac{\pi}{8}\right)\right]\exp\frac{s\vartheta}{k} \tag{4.5}$$

В случае открытой оболочки могут представить интерес только формулы асимптотических представлений. В справочнике [6] приводится формула для второго решения дифференциального уравнения Лежандра (1.1)

$$Q_n(\cos\vartheta) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2(n+\frac{1}{2})\sin\vartheta}}\left[\cos\varphi + \frac{1}{8(n+\frac{1}{2})}\operatorname{ctg}\vartheta\sin\varphi\right]$$

Для вычисления, однако, следует предпочесть решение

$$H_n(\cos\vartheta) = P_n(\cos\vartheta) - \frac{2i}{\pi}Q_n(\cos\vartheta)$$

Его асимптотическое представление имеет вид

$$H_n(\cos\vartheta) \sim \sqrt{\frac{k\sqrt{2}}{\pi s\sin\vartheta}}\left(1+\frac{k(1-i)}{16s}\operatorname{ctg}\vartheta\right)\left[\sin\left(\frac{s\vartheta}{k}+\frac{\pi}{8}\right)-\right.$$
$$\left.-i\cos\left(\frac{s\vartheta}{k}+\frac{\pi}{8}\right)\right]\exp-\frac{s\vartheta}{k} \tag{4.6}$$

Главный член в асимптотическом представлении $dH_n/d\vartheta$ дается формулой

$$\frac{dH_n}{d\vartheta} = \sqrt{\frac{2s\sqrt{2}}{\pi k\sin\vartheta}}\left[\sin\left(\frac{s\vartheta}{k}-\frac{\pi}{8}\right)-i\cos\left(\frac{s\vartheta}{k}-\frac{\pi}{8}\right)\right]\exp-\frac{s\vartheta}{k} \tag{4.7}$$

Укажем в заключение на простой способ получения главного члена асимптотических представлений решения уравнения Лежандра (1.1).

При помощи известной подстановки уничтожим сначала в уравнении член, содержащий первую производную. В данном случае нужно принять

$$l_n = \frac{T_n(\vartheta)}{\sqrt{\sin\vartheta}}$$

Функция l_n удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$l_n'' + \left[(n+\tfrac{1}{2})^2 + \frac{1}{4\sin^2\vartheta}\right]l_n = 0$$

или

$$l_n'' + \left(\frac{2s^2 i}{k}+\frac{1}{4\vartheta^2}\right)l_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\vartheta^2}-\frac{1}{\sin^2\vartheta}\right)l_n \tag{4.8}$$

Коэффициент при l_n в правой части остается ограниченным при всех ϑ в замкнутом слева интервале $(0, \pi)$, а по численному значению весьма мал по сравнению с s^2/k^2. Поэтому главный член решения при $s/k \gg 1$ дается решением уравнения Бесселя

$$l_n'' + \left(\frac{2s^2 i}{k^2} + \frac{1}{4\vartheta^2}\right) l_n = 0, \qquad l_n = \sqrt{\vartheta}\, Z_0\left(\frac{s\vartheta}{k}\sqrt{2i}\right)$$

где Z_0 — общее решение уравнения Бесселя нулевого порядка.

Легко уточнить этот способ рассуждения и указать на способ оценки погрешности, построив на основании (4.8) интегральное уравнение Вольтерра, которому удовлетворяет l_n, но здесь мы опускаем эти подробности. Полагая

$$Z_0\left(\frac{s\vartheta}{k}\sqrt{2i}\right) = J_0\left(\frac{s\vartheta}{k}\sqrt{2i}\right)$$

и воспользовавшись известным асимптотическим представлением функции Бесселя, получим

$$T_n(\vartheta) \approx \sqrt{\frac{\vartheta}{\sin\vartheta}}\, J_0\left(\frac{s\vartheta}{k}\sqrt{2i}\right) \sim \sqrt{\frac{k}{2\sqrt{2}\pi s \sin\vartheta}}\left[\cos\left(\frac{s\vartheta}{k} - \frac{\pi}{8}\right) - \right.$$
$$\left. - i\sin\left(\frac{s\vartheta}{k} - \frac{\pi}{8}\right)\right] \exp\frac{s\vartheta}{k}$$

Мы получили главный член в (4.4), что и следовало ожидать, так как рассматривались решения уравнения Лежандра, равные 1 при $\vartheta = 0$. Полагая

$$Z_0\left(\frac{s\vartheta}{k}\sqrt{2i}\right) = H_0^1\left(\frac{s\vartheta}{k}\sqrt{2i}\right)$$

т. е. первой функции Ганкеля нулевого порядка, получим

$$T_n(\vartheta) \approx \sqrt{\frac{\pi\vartheta}{\sin\vartheta}}\, H_0^1\left(\frac{s\vartheta}{k}\sqrt{2i}\right) \sim \sqrt{\frac{k\sqrt{2}}{\pi s \sin\vartheta}}\left[\sin\left(\frac{s\vartheta}{k} + \frac{\pi}{8}\right) - \right.$$
$$\left. - i\cos\left(\frac{s\vartheta}{k} + \frac{\pi}{8}\right)\right] \exp -\frac{s\vartheta}{k}$$

т. е. главный член в формуле (4.6).

5. В разделах **3** и **4** дается весь необходимый аппарат формул, решающих в первом приближении задачу о равновесии тонкой симметрично нагруженной сферической оболочки. Конечно, имея точные решения, приведенные в **1** и **2**, можно было бы получить и все последующие приближения (впрочем, уже формулы второго приближения весьма громоздки, и следует ожидать, что пользоваться третьим приближением было бы сложнее, чем точным решением). Важно отметить, что уже в первом приближении полученные формулы отличаются от тех, которые можно получить на базе гипотез, применяемых в приближенной теории тонких оболочек. Из основных предложений этой теории, именно, что $\sigma_r = 0$, u_r не зависит от r и что линейные элементы, до деформации нормальные к срединному слою, остаются после деформации нормальными к деформированному срединному слою, первое оказывается неверным уже в нашем приближении, а два прочих не оправдываются в следующих приближениях. Например, во втором приближении получается

$$u_r = r_0 \operatorname{Re} T_n \left\{1 + \frac{1}{2}k^2\left[\frac{3\sigma(1+\sigma)}{A}x^2 - \sigma(x-1) + \frac{1}{A}(5\sigma^2 - \sigma - 8)\right]\right\}$$

что противоречит второму и третьему предложениям. Случай сферической оболочки не является, конечно, исключением. Итак, следует сделать заключение, что использование теории тонких оболочек следует ограничить приближением, отбрасывая все члены, первым имеющие порядок k^2.

Поступила в редакцию 15 VIII 1943

Уральский индустриальный институт им. С. М. Кирова

EQUILIBRIUM OF AN ELASTIC SYMMETRICALLY LOADED SPHERICAL SHELL

A. I. LOURIE

(Summary)

1. The author constructs the solutions for which the loads on the surfaces of spheres $r=a$ and $r=b$ vanish. These so-called solutions of the first type depend upon the complex roots of equation (1.4) and can be presented as a product of a solution $T_n(\vartheta)$ of the Legendre equation (1.1) and a function of r.

2. The basic formulae giving the solution for the problem of equilibrium of a hollow sphere under the action of arbitrary loads over its surfaces $r=a$ and $r=b$ are given. The scheme for solving the problem of equilibrium of a spherical shell by superimposing on this solution the solution of the above-mentioned first type satisfying the boundary conditions on a conic section of the sphere is given.

3. From the first type solutions formulae for the first approximation corresponding to the case of a very thin shell are obtained. These formulae are closely related to those given in the Kirchoff-Love theory of thin shells for taking into account the boundary effect.

4. For the differential equation of Legendre with large modulus of the complex parameter the author gives formulae yielding the same approximation as the formulae in paragraph 3. An asymptotic representation employing a series in terms of the small values of ϑ is given.

5. The author shows that the fundamental hypotheses of the thin shells theory do not completely accord with the first approximation to the exact solution; the second approximation to this solution gives corrections, which also contradict these hypotheses. This permits us to conclude that the thin shells theory must be developed taking into account only terms of a lower order relative to the parameter $\sqrt{h/r_0}$ (h — thickness, r_0 — average radius of the shell), since the higher approximations do not correspond to the accuracy of the original hypotheses of the theory.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галеркин Б. Г. Равновесие упругой сферической оболочки. Прикладная математика и механика. 1942. Т. VI. [Стр. 487—496].
2. Лурье А. И. К теории толстых плит. Прикладная математика и механика. 1942. Т. VI. [Стр. 151—168].
3. Ляв Я. Математическая теория упругости. М.—Л. 1935. [Стр. 615—619 и др.].
4. Гринберг Г. А. О разложении функции в ряды вида $f(x)=\Sigma A_k F(a_k x)$. Известия Ленинградского политехнического института. Т. XXXIII. [Стр. 22—45].
5. Уиттекер Е. Т. и Ватсон Г. Н. Курс современного анализа М.—Л. 1934. Ч. II. [Стр. 108, 135, 62 и др.].
6. Jahnke-Emde. Funktionentafeln. Leipzig. 1933. [Стр. 183, 218 и др.].