Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том VII, 1943

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ДАВЛЕНИИ СИСТЕМЫ ЖЕСТКИХ ПРОФИЛЕЙ

Н. И. ГЛАГОЛЕВ

(Москва)

Общее решение плоской задачи теории упругости со смешанными граничными условиями, когда на одних участках границы заданы напряжения, а на других смещения, дал Д. И. Шерман [1].

Задача о давлении системы жестких профилей на упругую полуплоскость, в предположении отсутствия касательных напряжений вдоль всей границы, рассмотрена А. И. Бегиашвили [2].

В настоящей работе, пользуясь методом Карлемана [3], рассматривается задача о давлении системы жестких профилей при учете касательных напряжений на границе, причем исследуются два вида граничных условий на прямой $y=0$ упругой полуплоскости $y\leqslant 0$:

а) на участках контакта задаются вертикальные смещения и некоторая зависимость между касательными и нормальными напряжениями. Вне участков контакта напряжения равны нулю;

б) на участках контакта задаются вертикальные и горизонтальные смещения, а вне участков контакта напряжения равны нулю.

1. Пусть жесткие профили соприкасаются с границей упругой полуплоскости вдоль участков $a_k\leqslant x\leqslant b_k$ $(k=1, 2,\ldots, n)$, совокупность которых обозначим (S), $x=t_0$—произвольная точка на (S) [1].

Положим, что на граничной прямой заданы напряжения:

на (S)

$$Y_y=-P(x)=-P(t_0),\qquad X_y=T(x)=T(t_0)$$

вне (S)

$$Y_y=X_y=0$$

Тогда функции $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ и связанные с ними $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, дающие выражения смещений и напряжений в упругой полуплоскости, будут иметь вид

$$\Phi(z)=\varphi'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(S)}\frac{P(t)+iT(t)}{t-z}\,dt \tag{1.1}$$

$$\Psi(z)=\psi'(z)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{(S)}\frac{T(t)\,dt}{t-z}-\frac{z}{2\pi i}\int\limits_{(S)}\frac{P(t)+iT(t)}{t-z}\,dt$$

Для напряжений и смещений имеем зависимости

$$\begin{aligned}&X_x+Y_y=4\operatorname{Re}\Phi(z)\\&Y_y-X_x+2iX_y=2\,[\bar z\Phi'(z)+\Psi(z)]\\&2\mu\,(u+iv)=\varkappa\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}\qquad\left(\varkappa=\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\right)\end{aligned}\tag{1.2}$$

где λ и μ—упругие постоянные Ляме для полуплоскости.

---

[1] Будем пользоваться результатами и обозначениями Н. И. Мусхелишвили [4] (§ 81, 86, 87).

В развернутом виде выражения для смещений будут

$$2\mu(u+iv)=-\frac{(\varkappa+1)}{2\pi i}\int\limits_{(S)}[P(t)+iT(t)]\ln|t-z|\,dt-$$

$$-\frac{(\varkappa-1)}{2\pi}\int\limits_{(S)}[P(t)+iT(t)]\arg(t-z)\,dt-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(S)}\frac{[P(t)+iT(t)](t-z)}{(t-\bar{z})}\,dt \quad (1.3)$$

Пусть $z\to(x-i0)=t_0-i_0$, тогда

$$2\mu[u(t_0)+iv(t_0)]=-\frac{(\varkappa+1)}{2\pi i}\int\limits_{(S)}[P(t)+iT(t)]\ln|t-t_0|\,dt+$$

$$+\frac{(\varkappa-1)}{2}\int^{t_0}[P(t)+iT(t)]\,dt+\mathrm{const} \quad (1.4)$$

Возьмем от обеих частей уравнения (1.4) производную по t_0. Замечая, что первый интеграл в правой части содержит логарифмическую особенность, в результате получим

$$2\mu\left[\frac{du(t_0)}{dt_0}+i\frac{dv(t_0)}{dt_0}\right]=\frac{(\varkappa+1)}{2\pi i}\int\limits_{(S)}\frac{P(t)+iT(t)}{t-t_0}\,dt+\frac{(\varkappa-1)}{2}[P(t_0)+iT(t_0)] \quad (1.5)$$

Расходящиеся интегралы понимаем в смысле главного значения.

Введем обозначения

$$\xi(t_0)=-\frac{4\mu\pi i}{(\varkappa+1)}\frac{du(t_0)}{dt_0}; \qquad \eta(t_0)=-\frac{4\mu\pi i}{(\varkappa+1)}\frac{dv(t_0)}{dt_0}, \qquad A=\frac{i(1-\varkappa)\pi}{(1+\varkappa)}$$

Уравнение (1.5) приводится к виду

$$\xi(t_0)+i\eta(t_0)=-\int\limits_{(S)}\frac{P(t)+iT(t)}{t-t_0}\,dt+A[P(t_0)+iT(t_0)] \quad (1.6)$$

Приравняв друг другу мнимые части этого уравнения и предположив, что

$$T(t_0)=k(t_0)P(t_0)$$

где $k(t_0)$—произвольная функция, получим уравнение

$$\eta(t_0)=-\int\limits_{(S)}\frac{P(t)\,dt}{t-t_0}+\zeta(t_0)P(t_0) \qquad \left(\zeta(t_0)=Ai\,k(t_0)\right) \quad (1.7)$$

Уравнение (1.7) позволяет решить первую (*а*), а уравнение (1.6) вторую (*б*) из поставленных задач.

Частный вид уравнения (1.6) исследован Карлеманом [3]. Обобщая его метод, можно получить решение уравнения вида

$$a(x)u^*(x)-\lambda\int\limits_{(S)}\frac{u^*(y)\,dy}{y-x}=b(x) \quad (1.8)$$

где x, y—вещественные переменные, $u^*(x)$—искомая, $a(x)$ и $b(x)$—заданные, вообще говоря, комплексные функции, λ—постоянное положительное число

$$u^*(x)=\frac{a(x)b(x)}{a^2(x)+\pi^2\lambda^2}+\frac{\lambda\exp\omega(x)}{\sqrt{a^2(x)+\pi^2\lambda^2}}\int\limits_{(S)}\frac{b(s)\exp-\omega(s)}{\sqrt{a^2(s)+\pi^2\lambda^2}\,(s-x)}\,ds+$$

$$+\frac{\exp\omega(x)}{\sqrt{a^2(x)+\pi^2\lambda^2}}\sum_{i=1}^{n}\frac{C_i}{b_i-x} \quad (1.9)$$

где

$$\theta(x)=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{a(x)+\lambda\pi i}{a(x)-\lambda\pi i}$$

причем можно принять, что $0\leqslant|\theta(x)|\leqslant1$,

$$\omega(x)=\int\limits_{(S)}\frac{\theta(s)\,ds}{s-x}$$

Наконец, через C_i $(i=1,2,\ldots,n)$ обозначены произвольные постоянные.

2. Решение задачи (*а*), поставленной выше, будет иметь вид

$$P(t_0)=\frac{\eta(t_0)\zeta(t_0)}{\eta^2(t_0)+\pi^2\lambda^2}+\frac{\lambda\exp\omega_1(t_0)}{\sqrt{\eta^2(t_0)+\pi^2\lambda^2}}\int\limits_{(S)}\frac{\zeta(s)\exp-\omega_1(s)\,ds}{\sqrt{\eta^2(s)+\pi^2\lambda^2}\,(s-t_0)}+$$

$$+\frac{\exp\omega_1(t_0)}{\sqrt{\eta^2(t_0)+\pi^2\lambda^2}}\sum_{i=1}^{n}\frac{C_i}{(b_i-t_0)} \tag{2.1}$$

где C_i—произвольные постоянные,

$$\theta_1(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{\eta(t_0)+\lambda\pi i}{\eta(t_0)-\lambda\pi i}, \qquad \omega_1(t_0)=\int\limits_{(S)}\frac{\theta_1(s)\,ds}{s-t_0}$$

Решение задачи (*б*) будет

$$P(t_0)+iT(t_0)=\frac{A[\xi(t_0)+i\eta(t_0)]}{(A^2+\pi^2)}+$$

$$+\frac{1}{(A^2+\pi^2)}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{b_k-t_0}{a_k-t_0}\right)^{\theta_2}\int\limits_{(S)}\frac{1}{(s-t_0)}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{b_k-s}{a_k-s}\right)^{-\theta_2}[\xi(s)+i\eta(s)]\,ds+$$

$$+\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{b_k-t_0}{a_k-t_0}\right)^{\theta_2}\sum_{i=1}^{n}\frac{C_i}{b_i-t_0} \tag{2.2}$$

где C_i—произвольные постоянные,

$$\theta_2=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{A+\pi i}{A-\pi i}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{1}{\varkappa}$$

Система жестких профилей представляет единое жесткое целое или же каждый профиль может производить давление самостоятельно. Произвольные постоянные определяются в случае, например, самостоятельной передачи давления каждым профилем из следующих n уравнений

$$\int\limits_{a_k}^{b_k}P(t_0)\,dt_0=P_k \qquad (k=1,2,\ldots,n) \tag{2.3}$$

где P_k—давление, передаваемое профилем нумера k. Зная напряжения на границе, напряжения во всей полуплоскости можно получить согласно формулам (1.2).

3. Найдем выражения контактных напряжений в случае давления двух плоских профилей при абсолютном сцеплении подошвы профилей и основания, приходящихся на участки границы $-a\leqslant x\leqslant -b$, $b\leqslant x\leqslant a$.

Выражение (2.2) в этом случае будет иметь вид

$$P(t_0)+iT(t_0)=M+Nt_0\frac{[(a-t_0)(t_0+b)]^{\theta_2-1}}{[(a+t_0)(t_0-b)]^{\theta_2}}=$$

$$=\frac{M+Nt_0}{\sqrt{(a^2-t_0^2)(t_0^2-b^2)}}\left[\frac{(a-t_0)(t_0+b)}{(a+t_0)(t_0-b)}\right]^{\frac{i}{2\pi}\ln\varkappa} \tag{3.1}$$

где M и N—постоянные.

Будем считать для определенности $\sqrt{(a^2-t_0^2)(t_0^2-b^2)}$ отрицательным на нижнем крае разреза $(-a,-b)$ и положительным на нижнем крае разреза (b,a).

Таким образом

$$P(t_0)=\pm\frac{M+Nt_0}{\sqrt{(a^2-t_0^2)(t_0^2-b^2)}}\cos\left(\frac{1}{2n}\ln\varkappa\ln\frac{(a-t_0)(t_0+b)}{(a+t_0)(t_0-b)}\right) \tag{3.2}$$

где верхний знак для участка (b,a), нижний для участка $(-a,-b)$.

Примем, что осадка профилей одинакова и каждый передает усилие $\frac{1}{2}P$, т. е.

$$P(-t_0)=P(t_0)$$

и, следовательно, $M=0$.

Для определения постоянной N воспользуемся зависимостями

$$\int_{-a}^{-b} P(t_0)\,dt_0 = \int_{b}^{a} P(t_0)\,dt_0 = \frac{1}{2}P, \qquad \int_{-a}^{-b} T(t_0)\,dt_0 + \int_{b}^{a} T(t_0)\,dt_0 = 0$$

Имеем

$$\int_{-a}^{-b} [P(t_0) + iT(t_0)]\,dt_0 + \int_{b}^{a} [P(t_0) + iT(t_0)]\,dt_0 = P = \frac{N\pi}{\sin \pi\theta}$$

откуда

$$N = \frac{P(1+\varkappa)}{2\pi\sqrt{\varkappa}}$$

Таким образом напряжения $P(t_0)$ и $T(t_0)$ будут иметь вид

$$\begin{aligned} P(t_0) &= \pm \frac{P(1+x)\,t_0}{2\pi\sqrt{\varkappa}\sqrt{(a^2-t_0^2)(t_0^2-b^2)}} \cos\left(\frac{1}{2\pi}\ln\varkappa\ln\frac{(a-t_0)(t_0+b)}{(a+t_0)(t_0-b)}\right) \\ T(t_0) &= \pm \frac{P(1+\varkappa)\,t_0}{2\pi\sqrt{\varkappa}\sqrt{(a^2-t_0^2)(t_0^2-b^2)}} \sin\left(\frac{1}{2\pi}\ln\varkappa\ln\frac{(a-t_0)(t_0+b)}{(a+t_0)(t_0-b)}\right) \end{aligned} \qquad (3.3)$$

Выясним изменение в распределении напряжений в зависимости от удаления профилей друг от друга. Для сравнения воспользуемся формулами распределения напряжений в случае одного изолированного профиля, передающего усилие $\frac{1}{2}P$ на участке (b, a)

$$\begin{aligned} P^*(t_0) &= \frac{P(1+\varkappa)}{4\pi\sqrt{\varkappa}\sqrt{(a-t_0)(t_0-b)}} \cos\left(\frac{1}{2\pi}\ln\varkappa\ln\frac{a-t_0}{t_0-b}\right) \\ T^*(t_0) &= \frac{P(1+\varkappa)}{4\pi\sqrt{\varkappa}\sqrt{(a-t_0)(t_0-b)}} \sin\left(\frac{1}{2\pi}\ln\varkappa\ln\frac{a-t_0}{t_0-b}\right) \end{aligned} \qquad (3.4)$$

Эти формулы, полученные В. М. Абрамовым[5], вытекают также из формул (3.3) как частный случай при $b=0$ и переносе начала координат. Введем обозначения

$$\bar{P} = \frac{P}{2(a-b)}, \quad \zeta = \frac{t_0}{a}, \quad \beta = \frac{b}{a}, \quad \frac{P}{\bar{P}} = p, \quad \frac{P^*}{\bar{P}} = p^*, \quad \frac{T}{\bar{P}} = \tau, \quad \frac{T^*}{\bar{P}} = \tau^*$$

Формулы для напряжений (3.3) и (3.4) примут вид

$$\begin{aligned} p &= \frac{(1-\beta)(1+\varkappa)\zeta}{\pi\sqrt{\varkappa}\sqrt{(1-\zeta^2)(\zeta^2-\beta^2)}} \cos\left(\frac{1}{2\pi}\ln\varkappa\ln\frac{(1-\zeta)(\zeta+\beta)}{(1+\zeta)(\zeta-\beta)}\right) \\ \tau &= \frac{(1-\beta)(1+\varkappa)\zeta}{\pi\sqrt{\varkappa}\sqrt{(1-\zeta^2)(\zeta^2-\beta^2)}} \sin\left(\frac{1}{2\pi}\ln\varkappa\ln\frac{(1-\zeta)(\zeta+\beta)}{(1+\zeta)(\zeta-\beta)}\right) \\ p^* &= \frac{(1-\beta)(1+x)}{2\pi\sqrt{\varkappa}\sqrt{(1-\zeta)(\zeta-\beta)}} \cos\left(\frac{1}{2\pi}\ln\varkappa\ln\frac{1-\zeta}{\zeta-\beta}\right) \\ \tau^* &= \frac{(1-\beta)(1+\varkappa)}{2\pi\sqrt{\varkappa}\sqrt{(1-\zeta)(\zeta-\beta)}} \sin\left(\frac{1}{2\pi}\ln\varkappa\ln\frac{1-\zeta}{\zeta-\beta}\right) \end{aligned} \qquad (3.5)$$

При отсутствии трения ($\varkappa = 1$) формулы для нормальных напряжений примут вид

$$\begin{aligned} p &= \frac{2(1-\beta)\zeta}{\pi\sqrt{(1-\zeta^2)(\zeta^2-\beta^2)}} \\ p^* &= \frac{(1-\beta)}{\pi\sqrt{(1-\zeta)(\zeta-\beta)}} \end{aligned} \qquad (3.6)$$

Чтобы сравнить изменение нормальных напряжений, которые нас будут интересовать, в случае одного и двух профилей, при различных значениях β, удобно составить отношение

$$\delta_s = \frac{p - p^*}{p^*} = 2\left\{\frac{\zeta}{\sqrt{(1+\zeta)(\zeta+\beta)}}\cos\left(\frac{1}{2\pi}\ln\varkappa\ln\frac{(1-\zeta)(\zeta+\beta)}{(1+\zeta)(\zeta-\beta)}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2\pi}\ln\varkappa\ln\frac{1-\zeta}{\zeta-\beta}\right)\right\}\sec\left(\frac{1}{2\pi}\ln\varkappa\ln\frac{1-\zeta}{\zeta-\beta}\right)$$

или, при условии отсутствия трения,

$$\delta = 2\left[\frac{\zeta}{\sqrt{(1+\zeta)(\zeta+\beta)}} - \frac{1}{2}\right]$$

В табл. 1 и 2 приведены результаты вычислений значений p, τ, p^* в зависимости от

Таблица 1

$\zeta = \frac{t_0}{a}$	$p(\zeta)$	$\tau(\zeta)$	$p^*(\zeta)$
0.605	2.30	0.92	2.29
0.61	1.85	0.59	1.80
0.62	1.28	0.33	1.24
0.66	0.85	0.13	0.81
0.70	0.78	0.06	0.69
0.74	0.68	0.01	0.63
0.78	0.67	0	0.62
0.80	0.67	0	0.62
0.82	0.71	—0.03	0.64
0.86	0.77	—0.06	0.69
0.90	0.83	—0.11	0.78
0.94	1.03	—0.23	0.97
0.98	1.58	—0.49	1.55
0.99	2.29	—0.88	2.29
0.995	2.94	—1.38	2.98

$\zeta = t_0 / a$ при условии абсолютного сцепления, для $\beta = 0.6$ (табл. 1) и результаты вычислений δ_s и δ для $\beta = 0.4$, 0.6, 0.8 (табл. 2).

Таблица 2

$\beta = 0.4$			$\beta = 0.6$			$\beta = 0.8$		
ζ	δ_s	δ	ζ	δ_s	δ	ζ	δ_s	δ
0.405	—0.24	—0.26	0.605	—0.13	—0.14	0.805	—0.06	—0.06
0.410	—0.23	—0.26	0.610	—0.13	—0.14	0.810	—0.06	—0.06
0.415	—0.23	—0.25	0.62	—0.12	—0.12	0.815	—0.05	—0.05
0.42	—0.20	—0.24	0.66	—0.10	—0.10	0.82	—0.05	—0.05
0.44	—0.18	—0.20	0.70	—0.06	—0.06	0.84	—0.04	—0.04
0.50	—0.14	—0.14	0.74	—0.03	—0.03	0.86	—0.03	—0.03
0.60	—0.07	—0.06	0.78	0.02	0.02	0.88	—0.02	—0.02
0.70	0.02	0.02	0.80	0	0	0.90	0	0
0.80	0.07	0.08	0.82	0.02	0.02	0.92	0.02	0.02
0.90	0.14	0.15	0.86	0.04	0.04	0.94	0.03	0.03
0.92	0.14	0.16	0.90	0.06	0.06	0.96	0.04	0.04
0.94	0.15	0.17	0.94	0.08	0.08	0.98	0.05	0.05
0.98	0.18	0.18	0.98	0.10	0.10	0.985	0.06	0.06
0.985	0.18	0.19	0.99	0.12	0.12	0.990	0.08	0.08
0.99	0.18	0.19	0.995	0.12	0.13	0.995	0.11	0.11

Из сравнения данных таблицы для напряжений видно, что для отношения $a/b = 0.8$ разность напряжений представляет собой 6% в среднем от напряжений изолированного профиля.

Поступила в редакцию
12 IV 1943

Институт механики
Академии Наук СССР

THE CALCULATION OF STRESSES DUE TO THE PRESSURE OF A SYSTEM OF RIGID STAMPS

N. I. GLAGOLEV

(Summary)

Using the results of Mouschelishvili the author deals with the problem of pressure of a system of rigid shapes on an elastic semiplane. The tangential stresses on the boundary are taken into account. The boundary problem is treated by the method of Carleman.

Two forms of the boundary conditions on the straight line $y=0$ of the elastic semiplane $y \leqslant 0$ are considered:

a) On the ranges of the contacts $a_k \leqslant x \leqslant b_k$, the manifold of which is denoted by (S), the vertical displacements and dependency between tangential and normal stresses are given. Out of (S) the stresses are assumed to be equal to zero.

The problem is reduced to the integral equation (1.7), the solution of which is given by formula (2.1).

b) The vertical and horizontal displacements are given for (S) and out of (S) the stresses are assumed to be equal to zero.

In this case the solution of the equation (1.6) is given by formula (2.2).

In conclusion the computations of stresses are detailed for two plane shapes in the case of absolute cohesion of footings and foundation. The influence of the distance between the stamps on the normal stresses is estimated by means of comparison with the stresses produced by on isolated stamp. It is established that for the ratio $b/a=0.8$ (where a is distance and b is width of stamps) the average difference between the normal stresses produced by two stamps each loaded by forces equal to $\frac{1}{2}P$ and those due to an isolated stamp also loaded by a force $\frac{1}{2}P$, is six per cent of the corresponding normal stresses of the isolated stamp.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шерман Д. И. Плоская задача со смешанными предельными условиями. Труды Сейсмологического института АН СССР. 1938. 88.
2. Бегиашвили А. И. Решение задачи давления системы жестких профилей на прямолинейную границу упругой полуплоскости. ДАН. 1940. XXVII. 9.
3. Carleman. T. Sur la résolution de certaines equations integrales. Arkiv för Matematik Astronomi och Fysik. 1922. 16. 26.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые задачи теории упругости. Изд. АН СССР. 1935.
5. Абрамов В. М. Проблема контакта упругой полуплоскости с абсолютно жестким фундаментом при учете сил трения. ДАН СССР. 1937. XVII. 4.