Институт механики Академии Наук Союза ССР

Прикладная математика и механика. Том VII, 1943

О СЖАТИИ БЕСКОНЕЧНОГО ПОЛОГО КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА ДАВЛЕНИЕМ, ПРИЛОЖЕННЫМ НА УЧАСТКЕ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Г. С. ШАПИРО

(Москва)

Вопрос о сжатии бесконечного кругового цилиндра давлением, приложенным на конечной длине его боковой поверхности, рассматривался A. и L. Föppl [1] и A. Freudenthal [2]. Совсем недавно на эту тему появилась работа M. Barton [3], давшего приближенное решение задачи в рядах Фурье. Во всех указанных работах рассматривается сплошной цилиндр. Решений для полого цилиндра, доведенных до числовых результатов, в литературе нет. Между тем этот вопрос представляет интерес, в особенности для цилиндров со стенками средней и большой толщины, для которых непригодна теория тонких оболочек. Ниже приводятся результаты вычислений для цилиндров с отношениями внутреннего радиуса к внешнему 0,5, 0.6 и 0.7. Давление предполагается на внешней поверхности.

Пусть a — внутренний, b — внешний радиусы цилиндра, $2c$ — длина загруженного участка, p — интенсивность распределенного давления; расположение системы координат показано на фиг. 1. Для давления, сосредоточенного по окружности, интенсивность нагрузки будем обозначать через P.

Решение находим, пользуясь функцией напряжений A. Love, совпадающей для случая осевой симметрии с функцией Б. Г. Галеркина:

$$\varphi = \int_0^\infty [A I_0(\alpha r) + B\alpha r I_1(\alpha r) + C K_0(\alpha r) + D\alpha r K_1(\alpha r)] \sin \alpha z \, d\alpha \tag{1}$$

где $I_0(\alpha r)$ и $I_1(\alpha r)$ — функции Вебера, $K_0(\alpha r)$, $K_1(\alpha r)$ — функции Макдональда.

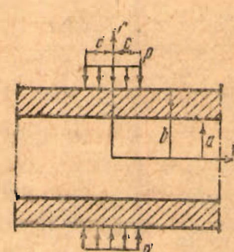
Напряжения и смещения выражаются через функцию φ:

$$\widehat{rr} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma\nabla^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right)$$

$$\widehat{zz} = \frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\sigma)\nabla^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right] \tag{2}$$

$$\widehat{rz} = \frac{\partial}{\partial r}\left[(1-\sigma)\nabla^2\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right]$$

$$u = -\frac{1+\sigma}{E}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial z} \tag{3}$$



Фиг. 1

Величины A, B, C и D, входящие в (1), определяются из граничных условий

$$\widehat{rr} = 0, \quad \widehat{rz} = 0 \quad \text{при} \quad r = a; \qquad \widehat{rr} = -\frac{P}{\pi}\int_0^\infty \cos \alpha z \, d\alpha, \quad \widehat{rz} = 0 \quad \text{при} \quad r = b \tag{4}$$

Не останавливаясь на выкладках [4], приведем окончательные выражения для напряжений и смещений на поверхностях цилиндра. При $r = a$

$$\widehat{zz} = \frac{P}{\pi b}\int_0^\infty \frac{2}{k\beta}\left[A_1\beta + (1-\sigma)\,B_1 - \frac{1-\sigma}{k}C_1 - \frac{k^2\beta^2 + 2(1-\sigma)}{k\beta}D_1\right]\frac{\cos\beta\zeta}{\Delta}\,d\beta \tag{5}$$

$$\widehat{\theta\theta} = \frac{P}{\pi b}\int_0^\infty 2\left[\frac{\sigma}{k}A_1 - \frac{1-\sigma}{k\beta}B_1 - \sigma\left(1 + \frac{2(1-\sigma)}{k^2\beta^2}\right)D_1 + \frac{1-\sigma}{k^2\beta}C_1\right]\frac{\cos\beta\zeta}{\Delta}\,d\beta \tag{6}$$

$$u = -\frac{2(1-\sigma^2)P}{\pi E}\int_0^\infty \left(B_1 - \frac{C_1}{k}\right)\frac{\cos\beta\zeta}{\beta\Delta}\,d\beta \tag{7}$$

При $r = b$

$$\widehat{zz} = \frac{P}{\pi b}\int_0^\infty \Big\{k[\beta^2(A_1^2 - B_1^2 - C_1^2 + D_1^2) + 2\beta(A_1B_1 - C_1D_1) + 1] +$$
$$+ \frac{1}{k}\left[2(1-\sigma)\left(D_1^2 - C_1^2 - \frac{2}{\beta}C_1D_1 + \frac{1}{\beta^2}\right) + 1\right]\frac{\cos\beta\zeta}{\Delta}\,d\beta \tag{8}$$

$$\widehat{\theta\theta} = \frac{P}{\pi b}\int_0^\infty \Big\{2\sigma k\beta(A_1B_1 - C_1D_1) - 4\sigma(1-\sigma)\frac{C_1D_1}{k\beta} - 2(1-\sigma)(B_1^2 - D_1^2 +$$
$$+ \frac{4(1-\sigma)^2}{k\beta^3}D_1^2 + \frac{2(1-\sigma)}{k\beta^2}\Big\}\frac{\cos\beta\zeta}{\Delta}\,d\beta \tag{9}$$

$$u = -\frac{(1+\sigma)P}{\pi E}\int_0^\infty \left\{2(1-\sigma)k\beta B_1^2 - 2(1-\sigma)\left[k\beta + \frac{2(1-\sigma)}{k\beta}\right]D_1^2 - \frac{2(1-\sigma)}{k\beta}\right\}\frac{\cos\beta\zeta}{\Delta}\,d\beta \tag{10}$$

Здесь

$$k = \frac{a}{b}, \quad \beta = \alpha b, \quad \zeta = \frac{z}{b}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= I_0(k\beta)K_0(\beta) - K_0(k\beta)I_0(\beta)\\ B_1 &= I_0(k\beta)K_1(\beta) + K_0(k\beta)I_1(\beta)\\ C_1 &= I_1(k\beta)K_0(\beta) + K_1(k\beta)I_0(\beta)\\ D_1 &= I_1(k\beta)K_1(\beta) - K_1(k\beta)I_1(\beta)\end{aligned} \tag{11}$$

$$\Delta = k\beta^2[A_1^2 - B_1^2 - C_1^2 + D_1^2] + 2(1-\sigma)\left[kB_1^2 - \frac{C_1^2}{k} + \right.$$
$$\left. + \left(k + \frac{1}{k} + \frac{1}{k\beta^2}\right)D_1^2\right] + k + \frac{1}{k} + \frac{4(1-\sigma)}{k\beta^2}$$

В случае нагрузки p, распределенной по кольцу шириной $2c$, в формулах (5)—(10) величину P следует заменить на $2p\sin\gamma\beta$, причем $\gamma = \frac{c}{b}$.

При вычислениях интервал интегрирования разбивается на две части: от 0 до 16 и от 16 до ∞. В соответствии с этим, формулы (5) и (8) для напряжений $\widehat{zz}$ и формулы (7) и (10) для смещений u можно представить соответственно в виде сумм:

$$\widehat{zz} = J_{\widehat{zz}}^1 + J_{\widehat{zz}}^2, \qquad u = J_u^1 + J_u^2$$

Первые слагаемые в этих суммах вычисляются по правилу Симпсона; во вторых слагаемых подинтегральные функции заменяются их асимптотическими выражениями, что позволяет выразить эти интегралы через табулированные функции. При этом используются асимптотические представления функций Вебера и Макдональда

$$\begin{aligned} I_n(x) &\sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left[1 - \frac{4n^2-1}{8x} + \frac{(4n^2-1)(4n^2-3^2)}{2(8x)^2}\right],\\ K_n(x) &\sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,e^{-x}\left[1 + \frac{4n^2-1}{8x} + \frac{(4n^2-1)(4n^2-3^2)}{2(8x)^2}\right]\end{aligned} \tag{12}$$

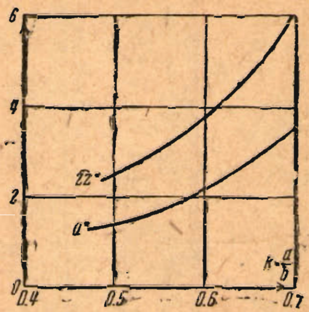
помощью которых величины A_1, B_1, C_1 и D_1 могут быть выражены в виде

$$\begin{aligned} A_1 &\sim -\frac{e^{(1-k)\beta}}{2\sqrt{k\beta}}\left[1 - \frac{1-k}{8k\beta} + \frac{9-2k+9k^2}{128k^2\beta^2}\right]\\ B_1 &\sim \frac{2^{(1-k)\beta}}{2\sqrt{k\beta}}\left[1 - \frac{1+3k}{8k\beta} + \frac{3(3+2k-5k^2)}{128k^2\beta^2}\right]\\ C_1 &\sim \frac{e^{(1-k)\beta}}{2\sqrt{k\beta}}\left[1 + \frac{3+k}{8k\beta} - \frac{3(-5+2k+3k^2)}{128k^2\beta^2}\right]\\ D_1 &\sim \frac{e^{(1-k)\beta}}{2\sqrt{k\beta}}\left[1 + \frac{3(1-k)}{8k\beta} - \frac{3(15+18k+15k^2)}{128k^2\beta^2}\right]\end{aligned} \tag{13}$$

Пользуясь (13) для $J_{\widehat{zz}}^2$ и J_u^2, получаем при $r=a$ и $\zeta=0$ для нагрузки P, сосредоточенной по окружности:

$$J_{\widehat{zz}}^2=\frac{4}{\pi b\sqrt{k}}\,e^{-16(1-k)}\left(16+\frac{1}{1-k}\right)$$

$$J_u^2=-\frac{4(1-\sigma^2)P}{\pi E}\left[e^{-16(1-k)}+\frac{(3+2k+3k^2)}{8k}\,Ei\,[-16(1-k)]\right] \tag{14}$$



Фиг. 2

для нагрузки p, распределенной по кольцу шириной $2c$:

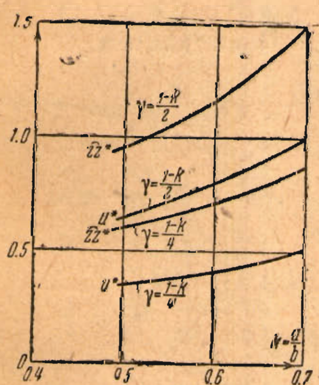
$$J_{\widehat{zz}}^2=\frac{8p}{\pi\sqrt{k}\,[(1-k)^2+\gamma^2]}\,[(1-k)\sin 16\gamma+\gamma\cos 16\gamma] \tag{15}$$

$$J_u^2\approx 0$$

При $r=b$ и $\zeta=0$ и нагрузке p, распределенной по кольцу шириной $2c$, получим

$$J_{\widehat{zz}}^2=\frac{2P}{\pi}\,\mathrm{si}\,16\gamma$$

$$J_u^2=-\frac{(1-\sigma^2)pb^3}{4\pi E}\left[\sin 16\gamma-16\gamma\,\mathrm{ci}\,16\gamma+\frac{1-\sigma}{k}\left(\frac{\sin 16\gamma}{32}+\gamma\cos 16\gamma+16\gamma^2\,\mathrm{si}\,16\gamma\right)\right] \tag{16}$$



Фиг. 3

Подобного же вида формулы можно вывести и для $\zeta\neq 0$.

Приводим результаты числовых вычислений, причем коэффициент Пуассона σ принят равным 0.3.

1. Для нагрузки P, сосредоточенной по окружности, на внутренней поверхности цилиндра $(r=a)$ для $z=0$

k	$\widehat{zz}^*=\frac{\widehat{zz}b}{P}$	$u^*=\frac{uE}{P}$
0.5	2.549	— 1.443
0.6	3.768	— 2.169
0.7	6.079	— 3.529

По этим данным построены графики фиг. 2.

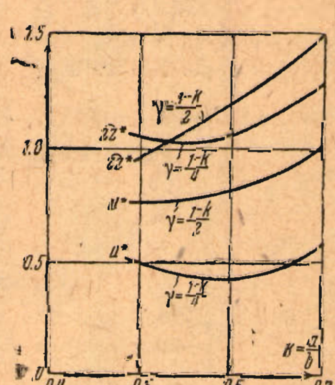
2. Для нагрузки p, распределенной по кольцу шириной $2c$, на внутренней поверхности $(r=a)$ для $z=0$.

k	$\widehat{zz}^*=\frac{\widehat{zz}}{p}$, $\gamma=\frac{1-k}{4}$	$\widehat{zz}^*$, $\gamma=\frac{1-k}{2}$	$u^*=\frac{uE}{pb}$, $\gamma=\frac{1-k}{4}$	u^*, $\gamma=\frac{1-k}{2}$
0.5	0.590	0.953	— 0.351	— 0.651
0.6	0.703	1.177	— 0.425	— 0.803
0.7	0.863	1.486	— 0.520	— 1.000

По этим данным построены графики на фиг. 3.

3. Для нагрузки, распределенной по кольцу шириной $2c$, на внешней поверхности цилиндра $(r=b)$ для $z=0$ (фиг. 4).

k	$\widehat{zz}^*=\frac{\widehat{zz}}{p}$, $\gamma=\frac{1-k}{4}$	$\widehat{zz}^*$, $\gamma=\frac{1-k}{2}$	$u^*=\frac{uE}{pb}$, $\gamma=\frac{1-k}{4}$	u^*, $\gamma=\frac{1-k}{2}$
0.5	— 1.077	— 0.968	— 0.495	— 0.779
0.6	— 1.075	— 1.197	— 0.531	— 0.882
0.7	— 1.292	— 1.518	— 0.591	— 1.038



Фиг. 4

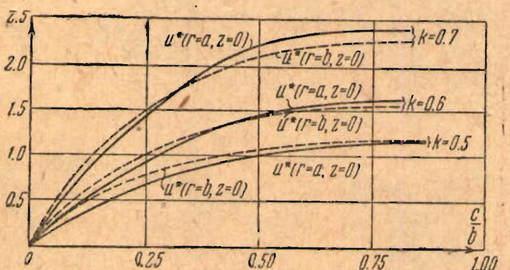
На фиг. 5 представлены смещения $u(a)$ и $u(b)$ точек внутренней и наружной поверхностей при разных длинах загружения. Эти кривые построены на основании данных:

$k = 0.5$

$\gamma = \frac{c}{b}$	$u^* = \frac{u(a)E}{pb}$	$u^* = \frac{u(b)E}{pb}$
0.125	−0.351	−0.495
0.25	−0.651	−0.779
0.5	−1.022	−1.082
0.8	−1.145	−1.170
∞	−1.333	−1.367

$k = 0.6$

$\gamma = \frac{c}{b}$	$u^* = \frac{u(a)E}{pb}$	$u^* = \frac{u(b)E}{pb}$
0.1	−0.425	−0.531
0.2	−0.803	−0.882
0.5	−1.481	−1.465
0.8	−1.630	−1.583
∞	−1.875	−1.825



Фиг. 5

$k = 0.7$

$\gamma = \frac{c}{b}$	$u^* = \frac{u(a)E}{pb}$	$u^* = \frac{u(b)E}{pb}$
0.125	−0.520	−0.591
0.25	−1.000	−1.038
0.5	−2.279	−2.176
0.8	−2.424	−3.312
∞	−2.745	−2.622

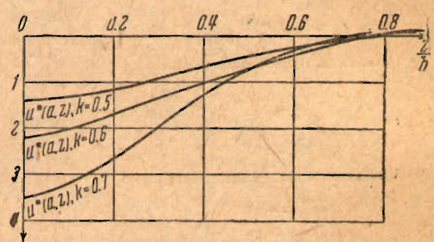
При малых длинах загруженного участка (меньше толщины цилиндра) смещения на внешней поверхности $u(b)$ больше, чем смещения на внутренней поверхности $u(a)$; при увеличении длины загружения, наоборот, $u(a) > u(b)$.

При удлинении участка до бесконечности приходим к задаче Ляме, для которой

$$u(a) = -\frac{2kpb}{E(1-k^2)}, \qquad u(b) = -\frac{pb}{E}\left(\frac{1+k^2}{1-k^2} - \sigma\right)$$

Результаты, практически близкие к решению Ляме, достигаются уже когда $2c = 2b$.

Результаты подсчетов смещений $u(a)$ на внутренней поверхности по длине цилиндра ($\zeta \neq 0$) даны на фиг. 6, из которой видно, что уже при $z \approx 0.7\,b$ смещения близки к нулю.



Фиг. 6

При малых длинах загруженного участка (меньше толщины цилиндра) распределение напряжений заметно отличается от даваемого теориями оболочек. Так, если отношение длины загруженного участка к толщине цилиндра равно половине, то напряжения $\widehat{zz}$ на внешней поверхности цилиндра $\approx$ в 1,5 раза превышают по величине напряжения на внутренней поверхности.

Поступила в редакцию
24 XII 1942

Институт механики
Академии Наук СССР

AN INFINITE HOLLOW CIRCULAR CYLINDER LOADED BY AN EXTERNAL PRESSURE ON A FINITE RANGE OF ITS LENGTH

G. S. SHAPIRO

(Summary)

Using the solution expounded in a previously published article [4] the author gives the results of numerical calculations of the stresses $\widehat{zz}$ as well as radial displacements in cylinders for which the ratios of internal and external radii are equal to 0.5, 0.6 and 0.7.

ЛИТЕРАТУРА

1. Föppl A. и L. Drang u. Zwang. 1928.
2. Freudenthal A. Forscherarbeiten auf dem Gebiete des Eisenbetons. 1933. № 40.
3. Barton M. Journal of Applied Mechanics. 1941. V 8. № 3. P. A 97—104.
4. Шапиро Г. ДАН. 1942. Т. 37. № 9.