Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том VII, 1943

ЗАМЕТКИ

К РАСЧЕТУ УПРУГИХ СИСТЕМ НА ДЕЙСТВИЕ ПЕРЕМЕННЫХ НАГРУЗОК

Я. Г. ПАНОВКО

(Иошкар-Ола)

1. В случаях, когда упругой системе с одной степенью свободы сообщаются возмущающие силы $P(t)$, заданные произвольным образом, как известно, решение удобно представить в форме

$$y(t) = \frac{1}{M\varphi} \int_0^t P(\tau) \sin \varphi (t-\tau)\, d\tau \tag{1.1}$$

где $y = y(t)$ — обобщенная координата, M — масса упругоподвешенного груза, φ — частота свободных колебаний системы.

Для систем с n степенями свободы, испытывающих действие сил $P_1(t)$, $P_2(t)$, ..., $P_n(t)$, следует считать также весьма удобным для практического применения истокообразное представление решения в виде

$$y_i(t) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^t P_k(\tau) R_{ik}(t;\tau)\, d\tau \tag{1.2}$$

которое обладает такими же свойствами общности, что и решение (1.1).

Подобно решению (1.1) выражение (1.2) обещает особенные удобства в случаях негармонических возмущающих сил $P_k(t)$; к таким случаям относятся задачи действия ветровой нагрузки, многократных (быть может даже непериодических) ударов, действие на мосты движущейся нагрузки и т. д.

Единственной проблемой в построении решения (1.2) является определение разрешающей функции влияния $R_{ik}(t;\tau)$; эта функция по своему физическому смыслу выражает перемещение по направлению i в момент t от единичного импульса, приложенного в направлении k в момент τ $(\tau < t)$.

2. Для построения[1] разрешающей функции влияния нужно:

a) Из заданной системы образовать фиктивную систему, введя упругие опоры в местах сосредоточения масс M_1, M_2, ..., M_n (по направлениям их возможных перемещений); жесткости опор следует принять равными $M_k p^2$, где p — комплексный параметр, значение которого выясняется ниже. В случае, если M_1, M_2, ..., M_n не представляют собой точечных масс, а обладают инерцией вращения, при образовании фиктивной системы[2] необходимо вводить еще упругие защемления, жесткости которых принимаются равными $J_k p^2$, где J_k — полярный момент инерции массы номера k.

b) В образованной таким способом фиктивной, статически неопределимой системе найти единичное перемещение δ_{ik} и представить его в виде

$$\delta_{ik} = \frac{a_0^{ik} + a_1^{ik} p^2 + \ldots + a_{n-1}^{ik} p^{2n-2}}{c_0 + c_1 p^2 + \ldots + c_n p^{2n}} \tag{2.1}$$

[1] Обоснование предлагаемого способа построения разрешающих функций влияния $R_{ik}(t,\tau)$ см. в работе автора [1].

[2] Замена действительного сооружения фиктивным при решении задач динамики сооружений в ином виде применялась другими авторами (см. [2], [3]). Для систем с распределенной массой замена, подобно излагаемой нами, была предложена несколько лет назад А. И. Лурье [4].

c) Приравняв нулю знаменатель выражения (2.1), найти корни $p_1^2, p_2^2, \ldots, p_n^2$ полученного уравнения (все они будут отрицательными) и тем самым согласно равенства $\varphi_k^2 = -p_k^2$ вычислить величины $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, являющиеся частотами свободных колебаний заданной упругой системы.

d) Образовать выражение

$$A^{ik} = \frac{a_0^{ik} + a_1^{ik} p^2 + a_2^{ik} p^4 + \ldots + a_{n-1}^{ik} p^{2n-2}}{\varphi\,(c_1 + 2c_2 p^2 + 3c_3 p^4 + \ldots + nc_n p^{2n-2})} \tag{2.2}$$

где величины $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ и $c_1, c_2, \ldots, c_n$ заимствуются из выражения (2.1), а затем очередной подстановкой $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ и (2.2) вычислить величины $A_1^{ik}, A_2^{ik}, \ldots, A_n^{ik}$.

e) Построить функцию влияния [1]

$$R_{ik}(t;\tau) = \sum_{r=1}^{n} A_r^{ik} \sin \varphi_r (t-\tau) \tag{2.3}$$

Заметим, что объем вычислительной работы зависит от числа степеней свободы и, вообще говоря, несколько превосходит объем вычислений по определению собственных частот.

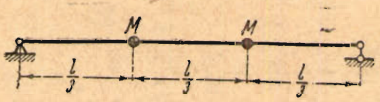
Из равенства $\delta_{ik} = \delta_{ki}$, выражающего взаимное равенство единичных перемещений фиктивной системы, следует

$$R_{ik}(t;\tau) = R_{ki}(t;\tau) \tag{2.4}$$

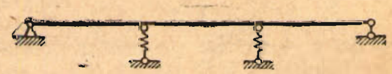
т. е. взаимность разрешающих функций влияния; отсюда в свою очередь вытекает взаимность коэффициентов функции влияния $A_r^{ik} = A_r^{ki}$.

3. В качестве примера рассмотрим построение разрешающих функций влияния для системы с двумя степенями свободы.

Пусть расчетной динамической схемой двухопорной свободно опертой балки является система с двумя степенями свободы (фиг. 1); обе сосредоточенные массы полагаем равными друг другу.



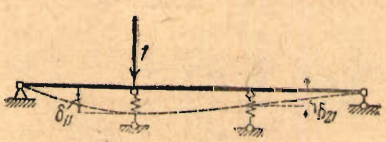
Фиг. 1



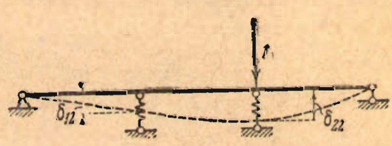
Фиг. 2

a) образуем фиктивную систему (фиг. 2). Коэффициенты жесткости введенных упругих опор полагаем равными Mp^2.

b) Рассматриваем поочередно действие единичных сил, приложенных к массам M_1 и M_2



Фиг. 3



Фиг. 4

(фиг. 3 и 4); решая статически неопределимую систему, находим реакции фиктивных упругих опор

$$r_{11} = \frac{15p^4a^2 + 8p^2a}{15p^4a^2 + 16p^2a + 1}; \qquad r_{21} = \frac{7p^2a}{15p^4a^2 + 16p^4a + 1} \qquad \left(a = \frac{Ml^3}{486EJ}\right) \tag{3.1}$$

По симметрии $r_{22} = r_{11}$ и по принципу взаимности реакций $r_{12} = r_{21}$. Соответственно этому единичные перемещения будут

$$\delta_{11} = \frac{r_{11}}{Mp^2} = \frac{a}{M}\cdot\frac{8 + 15p^2a}{1 + 16p^2a + 15p^4a^2} = \delta_{22}, \qquad \delta_{21} = \frac{r_{21}}{Mp^2} = \frac{a}{M}\cdot\frac{7}{1 + 16p^2a + 15p^4a^2} = \delta_{12}$$

---

[1] В случаях периодических возмущающих сил преобразование Düffing [5, 6] позволяет интегрирование в интервале $(0, \ldots, t)$ заменить интегрированием в пределах одного периода возмущающей силы.

c) Для уравнения $1+16p^2a+15p^4a^2=0$ находим корни

$$p_1^2=-\frac{1}{15a},\qquad p_2^2=-\frac{1}{a}$$

Следовательно, собственные частоты системы будут

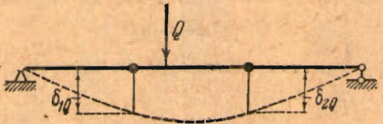
$$\varphi_1=\frac{1}{\sqrt{15a}},\qquad \varphi_2=\frac{1}{\sqrt{a}}$$

d) Образуем выражения A^{ik} согласно (2.2)

$$A^{11}=\frac{a(8-15a\varphi^2)}{M\varphi(16a-30\varphi^2a^2)}=\frac{1}{2M\varphi}=A^{22},\quad A^{12}=\frac{7a}{M\varphi(16a-30\varphi^2a^2)}=\frac{7}{M\varphi(16-30\varphi^2a)}=A^{21}\qquad(3.3)$$

Вычисляем A_n^{ik} для $R_{11}=R_{22}$

$$A_1^{11}=\frac{\sqrt{15a}}{2M}=42.68\sqrt{\frac{l^3}{MEJ}},\qquad A_2^{11}=\frac{\sqrt{a}}{M}=11.02\sqrt{\frac{l^3}{MEJ}}$$



Фиг. 5

и для $R_{12}=R_{21}$

$$A_1^{12}=\frac{7\sqrt{15a}}{M\left(16-30\dfrac{1}{15a}a\right)}=42.68\sqrt{\frac{l^3}{MEJ}},\qquad A_2^{12}=\frac{7\sqrt{a}}{M\left(16-30\dfrac{1}{a}a\right)}=-11.02\sqrt{\frac{l^3}{MEJ}}$$

e) Составляем разрешающие функции влияния:

$$R_{11}=R_{22}=42.68\sqrt{\frac{l^3}{MEJ}}\sin\frac{1}{\sqrt{15a}}(t-\tau)+11.02\sqrt{\frac{l^3}{MEJ}}\sin\frac{1}{\sqrt{a}}(t-\tau)$$
$$R_{12}=R_{21}=42.68\sqrt{\frac{l^3}{MEJ}}\sin\frac{1}{\sqrt{15a}}(t-\tau)-11.01\sqrt{\frac{l^3}{MEJ}}\sin\frac{1}{\sqrt{a}}(t-\tau)\qquad(3.4)$$

4. Выполнению квадратур (1.2) должно предшествовать выяснение обобщенных сил $P_k(t)$; в отдельных случаях это требует дополнительных вычислительных операций.

Покажем последние на примере рассмотренной системы для случая постоянной по величине движущейся силы Q (фиг. 5). Очевидно, что

$$y_1=-M_1y_1''\delta_{11}-M_2y_2''\delta_{12}+Q\delta_{1Q},\qquad y_2=-M_1y_1''\delta_{21}-M_2y_2''\delta_{22}+Q\delta_{2Q}\qquad(4.1)$$

Необходимо иметь в виду, что в отличие от предыдущего здесь δ_{11}, δ_{12}, δ_{21}, δ_{22}, δ_{1Q} и δ_{2Q} представляют собой единичные перемещения в заданной, а не в фиктивной системе. Положим

$$Q\delta_{1Q}=P_1(t)\delta_{11}+P_2(t)\delta_{12}\qquad Q\delta_{2Q}=P_1(t)\delta_{21}+P_2(t)\delta_{22}\qquad(4.2)$$

Отсюда

$$P_1(t)=Q\frac{\delta_{1Q}\delta_{22}-\delta_{2Q}\delta_{12}}{\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}^2},\qquad P_2(t)=Q\frac{\delta_{1Q}\delta_{21}-\delta_{2Q}\delta_{11}}{\delta_{12}^2-\delta_{11}\delta_{22}}\qquad(4.3)$$

Функциями времени здесь являются δ_{1Q} и δ_{2Q}.

Вообще, при любом характере возмущения необходимо приведение уравнения движения к виду

$$y_i=-\sum_{k=1}^{n}M_ky_k''\delta_{ik}+\sum_{k=1}^{n}P_k(t)\delta_{ik}\qquad(4.4)$$

Условия приведения, подобные (4.2), всегда позволят выяснить обобщенные силы $P_k(t)$.

5. В случае системы линейного протяжения с непрерывным распределением масс, также может оказаться удобным понятие о разрешающей функции влияния $R(x_1, s;\ t, \tau)$, необходимой для выполнения квадратуры

$$y(x;\ t)=\int_0^l\int_0^t P(s;\ \tau)R(x, s;\ t, \tau)\,d\tau\,ds\qquad(5.1)$$

Здесь $P(s; \tau)$ — возмущающая сила, являющаяся функцией положения точки s и времени τ; величина $R(x, s; t, \tau)$ по своему физическому смыслу представляет собой перемещение точки с абсциссой x в мгновение t от действия единичного импульса в точке s в мгновение τ. Путь построения функции $R(x, s; t, \tau)$ подобен изложенному в пункте 2.

a) Из заданной системы необходимо образовать фиктивную систему, введя сплошное упругое основание; коэффициент жесткости последнего $k = mp^2$, где m — погонная масса. При желании учесть инерцию вращения нужно наделить фиктивное основание свойствами упругого сопротивления поворотам сечения, положив соответствующий коэффициент жесткости равным jp^2, где j — момент инерции массы единицы длины балки.

b) В образованной таким образом системе необходимо найти перемещение $\delta(x; s)$, выразив его в виде частного двух трансцендентных функций

$$\delta(x; s) = \frac{f_1(x, s; p^2)}{f_2(p^2)}$$

c) Приравняв нулю знаменатель $f_2(p^2) = 0$, нужно найти корни полученного уравнения $p_1^2, p_2^2, \ldots$ (все они окажутся отрицательными). Таким образом согласно равенству

$$\varphi_k^2 = -p_k^2$$

будут вычислены величины $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, являющиеся частотами свободных колебаний заданной упругой системы.

d) После этого образуем выражение

$$A^{xs} = \frac{f_1(x, s; p^2)}{\varphi f_2'(p^2)}$$

Здесь штрих означает производную по p^2. Замена p^2 на $-\varphi^2$ и поочередная подстановка $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ дает величины $A_1^{xs}, A_2^{xs}, A_3^{xs}, \ldots$

e) Функция влияния $R(x, s, t, \tau)$ определяется разложением

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k^{xs} \sin \varphi_k (t - \tau)$$

Поступила в редакцию
19 VI 1941

CALCULATION OF ELASTIC SYSTEMS SUBJECTED TO VARIABLE LOADS

J. G. PANOVKO

(Summary)

1. The author extends the well known expression (1.1) of an elastic system with one degree of freedom to elastic systems with n-degrees of freedom subject to the action of disturbing forces $P_1(t), \ldots, P_n(t)$.

2. The author indicates a means for determining the influence function $R_{ik}(t, \tau)$ (2.3) in the general expression (1.2) of the above-mentioned solution.

3. A numerical example is worked out for a system with two degrees of freedom (fig. 1, 2, 3, 4).

4. In the above example a calculation of the so-called generalized forces is also given.

5. The considered procedure is also extended to an elastic system with continuous distribution of mass.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пановко Я. Г. К построению общего решения задачи о вынужденных колебаниях системы с несколькими степенями свободы. Прикладная математика и механика. Т. 5. В. 1. 1941.
2. Bielitz. Die Umkehrung der linearen mechanischen Schwingungen. VDI, 1934. Vorschungsheft 368.
3. Гогенемзер К. и Прагер В. Динамика сооружений. М. 1936. Стр. 108—109.
4. Лурье А. И. Операционное исчисление. 1938.
5. Düffing. Erzwungene Schwingungen mit veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung. Braunschweig. 1918. S. 14.
6. Лойцянский Л. Г. и Лурье А. И. Теоретическая механика. 1934. Ч. III. § 41.