Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том VII, 1943

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СТАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ЗАДАННЫМИ СМЕЩЕНИЯМИ НА ГРАНИЦЕ

Д. И. ШЕРМАН

(Москва)

Решению пространственной статической задачи теории упругости с заданными смещениями на границе методом интегральных уравнений посвящен ряд работ. Среди них наибольшего внимания заслуживают работы Lauricella[1] и Lichtenstein[2]. Решение Lichtenstein[1], несмотря на исключительное изящество и остроумие, все же приводит к весьма сложным интегральным уравнениям и в этом смысле, несомненно, уступает решению Lauricella, удачно использовавшего классические идеи теории потенциала.

В цитированном мемуаре Lauricella были рассмотрены случаи конечного и бесконечного упругих пространств, ограниченных одной замкнутой поверхностью. В настоящей статье, используя предложенный им метод построения интегральных уравнений, рассмотрим более общий случай, когда упругое пространство ограничено несколько замкнутыми поверхностями. При этом для определенности остановимся на случае, когда пространство конечное.

В заключение покажем, каким образом, несколько видоизменив метод Lauricella, можно значительно упростить решение задачи.

§ 1. Предположим, что упругая среда заполняет в пространстве xyz некоторый конечный объем T, ограниченный поверхностью S, состоящей из совокупности $m+1$ замкнутых поверхностей $S_1, \ldots, S_{m+1}$, не пересекающихся и не касающихся друг друга. При этом пусть S_{m+1} будет внешней границей среды, содержащей внутри себя остальные внутренние границы $S_1, \ldots, S_m$. Далее, обозначим через T_j пространства, внешние к T, ограниченные отдельными поверхностями S_j $(j=1, \ldots, m+1)$. Из них пространство T_{m+1} будет бесконечным. За положительное направление нормали n к поверхности S примем направление изнутри T вовне.

Будем считать, что каждая из поверхностей S_j $(j=1, \ldots, m+1)$ имеет во всех своих точках непрерывную кривизну.

Наконец, начало координат условимся считать лежащим в пространстве T.

Дифференциальные уравнения равновесия в смещениях имеют вид

$$\Delta^2 u + k\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \qquad \Delta^2 v + k\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \qquad \Delta^2 w + k\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \tag{1.1}$$

где Δ^2 — оператор Лапласа, u, v и w — компоненты вектора смещения соот-

[1] Изложение этой работы можно также найти в книге Е. Трэффца[3]

ветственно по осям x, y и z, через θ обозначено относительное объемное расширение, равное $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$, и k — некоторая зависящая от упругих свойств тела постоянная ($k \geqslant 1$).

В дальнейшем рассуждения будем вести для более общего случая $k \geqslant -\frac{2}{3}$.

Будем называть функции u, v и w, определенные в T, правильным решением системы (1.1), если выполняются следующие условия.

1°. Функции u, v и w непрерывны вместе с их частными производными первого порядка в пространстве T вплоть до поверхности S.

2°. В любом пространстве, содержащемся в T, они имеют непрерывные вторые частные производные, удовлетворяющие системе (1.1).

Задача, решению которой посвящена настоящая статья, формулируется следующим образом.

Определить функции u, v и w, непрерывные в T вплоть до поверхности S, образующие правильное решение системы (1.1) *в любом пространстве, содержащемся в T, и принимающие на поверхности S наперед заданные непрерывные значения u_0, v_0 и w_0.*

Полное решение этой задачи будет дано в двух последних параграфах статьи. Теперь же перейдем к выводу некоторых вспомогательных формул и предложений.

Сначала установим некоторые интегральные соотношения, являющиеся обобщением известных формул Грина. Для функций u, v и w, образующих в T правильное решение системы (1.1), имеем

$$\int_T \left\{u\left(\Delta^2 u+k\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)+v\left(\Delta^2 v+k\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)+w\left(\Delta^2 w+k\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)\right\}d\tau=0$$

Отсюда с помощью интегрирования по частям найдем

$$\int_T (\Delta u+\Delta v+\Delta w+k\theta^2)\,d\tau=$$

$$=\int_S\Big[u\left\{\frac{du}{dn}+k\theta\cos(n,x)\right\}+v\left\{\frac{dv}{dn}+k\theta\cos(n;y)\right\}+$$

$$+w\left\{\frac{dw}{\partial n}+k\theta\cos(n;z)\right\}\Big]\,dS \qquad (1.2)$$

где

$$\Delta u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2,\ldots$$

$$\frac{du}{dn}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n,x)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n,y)+\frac{\partial u}{\partial z}\cos(n,z),\ldots$$

Преобразуя так же следующие тождественно равные нулю интегралы

$$\int_T u\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}-\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial x}\right\}d\tau$$

$$\int_T v\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\right\}d\tau$$

$$\int_T w\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}-\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial y}\right\}d\tau$$

будем иметь

$$\int_T \left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z} \right) d\tau =$$
$$= \int_S u \left\{ \frac{\partial v}{\partial x}\cos(n, y) + \frac{\partial w}{\partial x}\cos(n, z) - \frac{\partial v}{\partial y}\cos(n, x) - \frac{\partial w}{\partial z}\cos(n, x) \right\} dS$$

$$\int_T \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y} \right) d\tau = \tag{1.3}$$
$$= \int_S v \left\{ \frac{\partial u}{\partial y}\cos(n, x) + \frac{\partial w}{\partial y}\cos(n, z) - \frac{\partial u}{\partial x}\cos(n, y) - \frac{\partial w}{\partial z}\cos(n, y) \right\} dS$$

$$\int_T \left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y} \right) d\tau =$$
$$= \int_S w \left\{ \frac{\partial u}{\partial z}\cos(n, x) + \frac{\partial v}{\partial z}\cos(n, y) - \frac{\partial u}{\partial x}\cos(n, z) - \frac{\partial v}{\partial y}\cos(n, z) \right\} dS$$

Умножим обе части каждого из равенств (1.3) на $\frac{k}{2+k}$ и сложим их почленно с равенством (1.2). Тогда получим

$$\int_T \left\{ \Delta u + \Delta v + \Delta w + k\theta^2 + \frac{2k}{2+k}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} \right)\right\} d\tau = \int_S (uP + vQ + wR)\, dS \tag{1.4}$$

где

$$P(u, v, w) = \frac{du}{dn} + k\theta\cos(n, x) + \frac{k}{2+k}\left\{ \frac{\partial v}{\partial x}\cos(n, y) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial w}{\partial x}\cos(n, z) - \frac{\partial v}{\partial y}\cos(n, x) - \frac{\partial w}{\partial z}\cos(n, x) \right\}$$

$$Q(u, v, w) = \frac{dv}{dn} + k\theta\cos(n, y) + \frac{k}{2+k}\left\{ \frac{\partial u}{\partial y}\cos(n, x) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial w}{\partial y}\cos(n, z) - \frac{\partial u}{\partial x}\cos(n, y) - \frac{\partial w}{\partial z}\cos(n, y) \right\} \tag{1.5}$$

$$R(u, v, w) = \frac{dw}{dn} + k\theta\cos(n, z) + \frac{k}{2+k}\left\{ \frac{\partial u}{\partial z}\cos(n, x) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial v}{\partial z}\cos(n, y) - \frac{\partial u}{\partial x}\cos(n, z) - \frac{\partial v}{\partial y}\cos(n, z) \right\}$$

Уравнение (1.4) после некоторых преобразований может быть приведено к одному из следующих видов:

$$\int_T \left[\frac{2}{2+k}(\Delta u + \Delta v + \Delta w) + k\frac{1+k}{2+k}\theta^2 + \frac{k}{2+k}\left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} + \frac{2k}{2+k}\left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} \right] d\tau$$
$$= \int_S (uP + vQ + wR)\, dS \tag{1.6}$$

или же

$$\int_T \Big[\frac{(1+k)(2+3k)}{2+k} (\Delta u + \Delta v + \Delta w) - \frac{k}{2+k} \Big\{ \Big(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \Big)^2 +$$

$$+ \Big(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \Big)^2 + \Big(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \Big)^2 + \Big(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \Big)^2 + \Big(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big)^2 \Big\} -$$

$$- 3k \frac{1+k}{2+k} \Big\{ \Big(\frac{\partial u}{\partial y} \Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial z} \Big)^2 + \Big(\frac{\partial v}{\partial x} \Big)^2 + \Big(\frac{\partial v}{\partial z} \Big)^2 + \Big(\frac{\partial w}{\partial x} \Big)^2 + \Big(\frac{\partial w}{\partial y} \Big)^2 \Big\} \Big] d\tau =$$

$$= \int_S (uP + vQ + wR)\, dS \tag{1.7}$$

Предположим теперь, что, помимо u, v и w, заданы еще функции u_1, v_1 и w_1, обладающие теми же свойствами. Тогда, поступая с равным нулю интегралом

$$\int_T \Big\{ u_1 \Big(\Delta^2 u + k \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big) + v_1 \Big(\Delta^2 v + k \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big) + w_1 \Big(\Delta^2 w + k \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big) \Big\} d\tau$$

так же, как при выводе формулы (1.4), получим

$$\int_T \Big[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u_1}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w_1}{\partial z} + k\theta\theta_1 +$$

$$+ \frac{k}{2+k} \Big\{ \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w_1}{\partial y} +$$

$$+ \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial z} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w_1}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial v_1}{\partial y} \Big\} \Big] d\tau =$$

$$= \int_S (u_1 P + v_1 Q + w_1 R)\, dS$$

С другой стороны, рассматривая также равный нулю интеграл

$$\int_T \Big\{ u \Big(\Delta^2 u_1 + k \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \Big) + v \Big(\Delta^2 v_1 + k \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \Big) + w \Big(\Delta^2 w_1 + k \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \Big) \Big\} d\tau$$

придем к равенству, которое, очевидно, можно вывести из предыдущего, переставив местами u, v и w соответственно с u_1, v_1 и w_1. Так как при такой замене объемный интеграл остается неизменным, то, сравнивая эти равенства, будем иметь

$$\int_S (uP_1 + vQ_1 + wR_1)\, dS = \int_S (u_1 P + v_1 Q + w_1 R)\, dS \tag{1.8}$$

где положено

$$P_1 = P(u_1, v_1, w_1), \qquad Q_1 = Q(u_1, v_1, w_1), \qquad R_1 = R(u_1, v_1, w_1)$$

Соотношения (1.6), (1.7) и (1.8) будут нами существенно использованы в дальнейшем.

Следствие 1. Предположим, что функции u, v и w, образующие правильное решение системы (1.1), обращаются в нуль на поверхности S. Тогда, полагая $u = v = w = 0$ в поверхностном интеграле одного из равенств (1.6) или (1.7) (в зависимости от того, имеем $k \geqslant 0$ или $-\frac{2}{3} \leqslant k < 0$) и замечая, что все слагаемые, содержащиеся под знаком тройного интеграла в соответствующем равенстве, неотрицательны, будем иметь:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \ldots = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Отсюда найдем, что

$$u=0,\quad v=0,\quad w=0 \tag{1.9}$$

тождественно в области T.

Следствие 2. Пусть теперь для правильного решения u, v и w системы (1.1) на поверхности S имеют место равенства $P=Q=R=0$. Рассуждая как прежде, получим тождественно в области T

$$u=A,\qquad v=B,\qquad w=C \tag{1.10}$$

где A, B и C — некоторые постоянные.

Следствие 3. Положим в равенстве (1.8) последовательно $u_1=1$, $v_1=w_1=0$; $u_1=w_1=0$, $v_1=1$ и $u_1=v_1=0$, $w_1=1$ тождественно в T. В этих случаях $P_1=Q_1=R_1=0$ и, следовательно,

$$\int\limits_S PdS=0,\qquad \int\limits_S QdS=0,\qquad \int\limits_S RdS=0 \tag{1.11}$$

Примечание. Обозначим через T^* бесконечное пространство, внешнее к T, ограниченное той же поверхностью S. Оно состоит из суммы $\sum\limits_{j=1}^{m+1} T_j$. Условимся называть функции u, v и w правильным решением системы (1.1) в пространстве T^*, если, помимо указанных выше условий 1° и 2°, во всех его точках выполняются неравенства

$$|u|<\frac{A}{R},\quad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|<\frac{A}{R^2},\quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|<\frac{A}{R^2},\quad \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|<\frac{A}{R^2}\qquad \text{(анал. для } v \text{ и } w)$$

где $R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ и A — некоторое фиксированное число.

Для этих функций также будут справедливы равенства (1.6) и (1.7), в которых под P, Q и R следует понимать предельные значения выражений (1.5) изнутри T^* При этом, рассматривая последовательно условия, принятые в следствиях 1 и 2, найдем, что в первом случае также будут иметь место равенства (1.9). Во втором же случае равенства (1.10) нужно заменить следующими:

$$u=A_j,\quad v=B_j,\quad w=C_j \quad \text{в} \quad T_j \ (j=1,\ldots,m+1) \tag{1.12}$$

где A_j, B_j и C_j — некоторые постоянные, причем, в силу обращения функций u, v и w в нуль на бесконечности, следует A_{m+1}, B_{m+1} и C_{m+1} положить равными нулю.

В дальнейшем, где представится удобным, будем предельные значения $P(u, v, w), \ldots$ снабжать индексами i и e в зависимости от того, берутся они соответственно изнутри или извне области T.

§ 2. Введем в рассмотрение функции

$$\begin{aligned}
&u_1=\frac{1}{r}-\frac{k}{2(1+k)}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}, && v_1=-\frac{k}{2(1+k)}\frac{\partial^2 r}{\partial x\partial y}, && w_1=-\frac{k}{2(1+k)}\frac{\partial^2 r}{\partial x\partial z}\\
&u_2=-\frac{k}{2(1+k)}\frac{\partial^2 r}{\partial x\partial y}, && v_2=\frac{1}{r}-\frac{k}{2(1+k)}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}, && w_2=-\frac{k}{2(1+k)}\frac{\partial^2 r}{\partial y\partial z}\\
&u_3=-\frac{k}{2(1+k)}\frac{\partial^2 r}{\partial x\partial z}, && v_3=-\frac{k}{2(1+k)}\frac{\partial^2 r}{\partial y\partial z}, && w_3=\frac{1}{r}-\frac{k}{2(1+k)}\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где r — расстояние между точками $M(x, y, z)$ и $M'(x', y', z')$.

Легко проверить, что u_n, v_n, w_n $(n=1, 2, 3)$ удовлетворяют системе (1.1) во всех точках $M(x, y, z)$ $(M'(x', y', z'))$ бесконечного пространства, не совпадающих с $M'(x', y', z')$ $(M(x, y, z))$. По аналогии с функцией $\frac{1}{r}$ для уравнения Лапласа они образуют элементарные решения системы (1.1).

Наряду с u_n, v_n, w_n $(n=1, 2, 3)$ введем еще функции $X, \ldots, Z_3$, определенные формулами

$$X_1=\left\{\frac{2}{2+k}+\frac{3k}{2+k}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\right\}\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right), \qquad Y_1=\frac{3k}{2+k}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$Z_1=\frac{3k}{2+k}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial z}\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$X_2=\frac{3k}{2+k}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right), \qquad Y_2=\left\{\frac{2}{2+k}+\frac{3k}{2+k}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\right\}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right) \quad (2.2)$$

$$Z_2=\frac{3k}{2+k}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial z}\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$X_3=\frac{3k}{2+k}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial z}\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right), \qquad Y_3=\frac{3k}{2+k}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial z}\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$Z_3=\left\{\frac{2}{2+k}+\frac{3k}{2+k}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2\right\}\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)$$

Для точек $M(x, y, z)$, изменяющихся на поверхности S, после некоторых вычислений получим

$$P(u_n, v_n, w_n)=X_n, \quad Q(u_n, v_n, w_n)=Y_n, \quad R(u_n, v_n, w_n)=Z_n \qquad (n=1, 2, 3) \quad (2.3)$$

Значения функций $X_1, \ldots, Z_3$ в точках $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности S, отличных от $M(x, y, z)$, при $M'(x', y', z')$, стремящейся к $M_0(x_0, y_0, z_0)$ изнутри или извне T, условимся обозначать через $X_{10}, \ldots, Z_{30}$.

Докажем теперь справедливость следующих равенств:

$$\int_S\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)dS=\int_S\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)dS=$$

$$=\int_S\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)dS=-\frac{4\pi}{3} \quad (2.4)$$

если точка $M'(x', y', z')$ лежит внутри T, и

$$\int_S\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)dS=\ldots=0 \quad (2\text{-}5)$$

если $M'(x', y', z')$ лежит вне T. Интегралы же

$$\int_S\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)dS=\int_S\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial z}\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)dS=\int_S\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial z}\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)dS=0 \quad (2.6)$$

в обоих случаях.

Достаточно, например, доказать первые из равенств (2.4) и (2.5). Остальные могут быть доказаны аналогичным образом.

Пусть точка $M'(x', y', z')$ лежит внутри области T. Проведем сферическую поверхность S_ρ малого радиуса ρ с центром в $M'(x', y', z')$, содержащуюся внутри области T. Объем сферы обозначим через T_ρ. Полагая для краткости

$$A=\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right),\quad B=\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right),\quad C=\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)$$

будем иметь по формуле Гаусса

$$\int\limits_S\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)dS+\int\limits_{S_\rho}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)dS=\int\limits_{T-T_\rho}\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)d\tau$$

Непосредственным вычислением легко убедиться, что функция, содержащаяся под знаком объемного интеграла, тождественно равна нулю. Переходя во втором интеграле левой части равенства к сферическим координатам и учитывая принятое направление нормали, получим

$$\int\limits_{S_\rho}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)dS=\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^3\theta\,d\varphi\,d\theta=\frac{4\pi}{3}$$

Откуда следует первое из равенств (2.4).

Если же точка $M'(x',y',z')$ лежит вне области T, то по той же формуле Гаусса будем иметь

$$\int\limits_S\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)dS+\int\limits_{S_\rho}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)dS+\int\limits_{S_R}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)dS=0$$

где S_R — поверхность сферы достаточно большого радиуса R с центром в $M'(x',y',z')$, заключающая внутри себя поверхность S. Последний интеграл в левой части равенства, в силу только что доказанного первого из равенств (2.4), равен $-\frac{4}{3}\pi$, иначе говоря, взятому со знаком минус значению второго интеграла. Поэтому справедливо также первое из равенств (25)[1].

§ 3. С помощью формул (1.9), (2.4); (2.5) и (2.6) нетрудно доказать равенства

$$\begin{aligned}
u(x',y',z')&=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_S\left\{uP_1+vQ_1+wR_1\right\}dS+\frac{1}{4\pi}\int\limits_S\left\{u_1P+v_1Q+w_1R\right\}dS\\
v(x',y',z')&=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_S\left\{uP_2+vQ_2+wR_2\right\}dS+\frac{1}{4\pi}\int\limits_S\left\{u_2P+v_2Q+w_2R\right\}dS\\
w(x',y',z')&=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_S\left\{uP_3+vQ_3+wR_3\right\}dS+\frac{1}{4\pi}\int\limits_S\left\{u_3P+v_3Q+w_3R\right\}dS
\end{aligned}\tag{3.1}$$

где функции u, v и w являются некоторым правильным решением системы (1.1) в пространстве T, а $u_1,\ldots,w_3$ определяются формулами (2.1). Вырежем, как прежде, сферу S_ρ радиуса ρ с центром в точке $M'(x',y',z')$. В пространстве $T-T_\rho$ функции $u_1,v_1,\ldots,w_3$ непрерывны и дифференцируемы любое число раз. Применим формулу (1.8), в которой под u_1, v_1 и w_1 условимся понимать функции, определяемые первой строкой равенств (2.1).

[1] В цитированном мемуаре Lauricella[1] равенства (2.4), (2.5) и (2.6) доказываются несколько иначе.

Будем иметь

$$\int\limits_S (uP_1+vQ_1+wR_1)\,dS+\int\limits_{S_\rho}(uP_1+vQ_1+wR_1)\,dS=$$

$$=\int\limits_S (u_1P+v_1Q+w_1R)\,dS+\int\limits_{S_\rho}(u_1P+v_1Q+w_1R)\,dS$$

Функции P, Q и R непрерывны в любой окрестности $M'(x', y', z')$, содержащейся в T, и не превосходят на S_ρ некоторого фиксированного числа A. Функции же u_1, v_1 и w_1 возрастают при приближении к $M'(x', y', z')$, как $\frac{1}{\rho}$. Отсюда найдем [1]

$$\left|\int\limits_{S_\rho}(u_1P+v_1Q+w_1R)\,dS\right|\leqslant A\int\limits_{S_\rho}(|u_1|+|v_1|+|w_1|)\,dS<4\pi A\,\frac{1+2|k|}{1+k}\,\rho$$

и, следовательно, при ρ, стремящемся к нулю, интеграл в правой части предшествующего равенства, распространенный по S_ρ, стремится к нулю.

Далее, обозначая для краткости $u(x', y', z'), \ldots$ через $u', \ldots$, имеем

$$\int\limits_{S_\rho}\left\{uP_1+vQ_1+wR_1\right\}dS=\int\limits_{S_\rho}\Big\{(u-u')\,P_1+(v-v')\,Q_1+$$

$$+(w-w')\,R_1\Big\}\,dS+u'\int\limits_{S_\rho}P_1\,dS+v'\int\limits_{S_\rho}Q_1\,dS+w'\int\limits_{S_\rho}R_1\,dS$$

Учитывая направление нормали к S_ρ, отметим равенства [2]

$$\int\limits_{S_\rho}P_1\,dS=4\pi,\qquad \int\limits_{S_\rho}Q_1\,dS=\int\limits_{S_\rho}R_1\,dS=0$$

При достаточно малом ρ разности $u-u', \ldots$ остаются меньше сколь угодно малого числа ε, стремящегося к нулю вместе с ρ. Поэтому [3]

$$\left|\int\limits_{S_\rho}\{(u-u')\,P_1+(v-v')\,Q_1+(w-w')R_1\}\,dS\right|<$$

$$<\varepsilon\int\limits_{S_\rho}(|P_1|+|Q_1|+|R_1|)\,dS<2\pi^2\,\frac{2+9|k|}{2+k}\,\varepsilon$$

---

[1] На поверхности S_ρ, переходя к сферическим координатам, имеем

$$|u_1|+|v_1|+|w_1|=\frac{1}{2(1+k)\rho}\Big\{|(2+k)+k\sin^2\theta\cos^2\varphi|+$$

$$+|k\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi|+|k\sin\theta\cos\theta\cos\varphi|\Big\}\leqslant\frac{1+2|k|}{1+k}\,\frac{1}{\rho}$$

[2] Напомним, что $\int\limits_S\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)dS=4\pi$, если точка $M'(x', y', z')$ лежит внутри области T, и $u=0$, если $M'(x', y', z')$ лежит вне T, при нормали, направленной извне T вовнутрь.

[3] Учитывая равенства (2.2), имеем на S_ρ

$$|P_1|+|Q_1|+|R_1|=\frac{1}{\rho^2}\left\{\left|\frac{2}{2+k}+\frac{3k}{2+k}\cos^2\varphi\,\sin^2\theta\right|+\right.$$

$$\left.+\left|\frac{3k}{2+k}\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\theta\right|+\left|\frac{3k}{2+k}\cos\varphi\sin\varphi\cos\theta\right|\right\}\leqslant\frac{2+9|k|}{2+k}\,\frac{1}{\rho^2}$$

и первый из интегралов в правой части предпоследнего равенства также стремится к нулю вместе с ρ. Отсюда следует справедливость первого из равенств (3.1). Остальные могут быть доказаны аналогичным образом.

Как известно, выражения для предельных значений потенциала двойного слоя имеют вид[1]

$$\lim_{M'\to M_0} \int\limits_S \nu \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) dS = \mp 2\pi\nu_0 + \int\limits_S \nu \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r_0}\right) dS \tag{3.2}$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — некоторая точка, лежащая на поверхности S, ν_0 — значение в ней плотности ν и $r_0 = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$, причем, при внеинтегральных членах берется знак минус, если M' стремится к M_0 изнутри области T, и берется знак плюс, если M' стремится к M_0 извне T. Наряду с ними отметим предельные равенства, которые могут быть получены аналогичным образом:

$$\lim_{M'\to M_0} \int\limits_S \nu \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) dS = \mp \frac{2\pi}{3}\nu_0 + \int\limits_S \nu \left(\frac{\partial r_0}{\partial x}\right)^2 \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r_0}\right) dS$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{3.3}$$

В них знак при внеинтегральных членах выбирается так же, как в формуле (3.2).

§ 4. В дальнейшем нами будут существенно использованы функции, определяемые равенствами

$$\begin{aligned} U(x', y', z') &= \int\limits_S (\varphi u_1 + \psi u_2 + \chi u_3)\, dS \\ V(x', y', z') &= \int\limits_S (\varphi v_1 + \psi v_2 + \chi v_3)\, dS \\ W(x', y', z') &= \int\limits_S (\varphi w_1 + \psi w_2 + \chi w_3)\, dS \end{aligned} \tag{4.1}$$

где φ, ψ и χ — некоторые заданные на поверхности S непрерывные функции, удовлетворяющие в любых двух смежных точках $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_0'(x_0', y_0', z_0')$ условиям

$$|\varphi(x_0', y_0', z_0') - \varphi(x_0, y_0, z_0)| < D r_0', \ldots$$

где $r_0' = \sqrt{(x-x_0')^2+(y_0-y_0')^2+(z_0-z_0')^2}$, а D — некоторое фиксированное число.

Как легко видеть, функции U, V и W изменяются непрерывно при переходе $M'(x', y', z')$ сквозь поверхность S и удовлетворяют системе (1.1) во всех точках пространства, не принадлежащих S. Можно также показать; что их частные производные первого порядка имеют на S непрерывные предельные значения[2] (вообще говоря, отличные друг от друга) изнутри и извне T.

[1] См. N. M. Gunther [4].
[2] См. цитированную книгу N. Gunther [4] .

Кроме того, в окрестности бесконечности выполняются условия, указанные в конце § 1. Отсюда заключаем, что функции U, V и W образуют правильное решение[1] системы (1.1) в пространствах T и T^* (внешнем к T).

Построим функции $P(U, V, W)$, $Q(U, V, W)$ и $R(U, V, W)$, устремляя точку $M'(x', y', z')$ к $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на S сначала изнутри, затем извне T. Тогда, учитывая равенства, которые получим, поменяв в (2.3) местами x, y, z с x', y', z', и, поступая так же, как при вычислении нормальной производной потенциала простого слоя, будем иметь[2]

$$
\begin{aligned}
P(U, V, W) &= \pm 2\pi\varphi_0 + \int_S (\varphi X_{01} + \psi Y_{01} + \chi Z_{01})\, dS \\
Q(U, V; W) &= \pm 2\pi\psi_0 + \int_S (\varphi X_{02} + \psi Y_{02} + \chi Z_{02})\, dS \\
R(U, V, W) &= \pm 2\pi\chi_0 + \int_S (\varphi X_{03} + \psi Y_{03} + \chi Z_{03})\, dS
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

где φ_0, ψ_0 и χ_0 — значения функций φ, ψ и χ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$; знак плюс или минус при внеинтегральных членах выбирается в зависимости от того, стремится ли $M'(x', y', z')$ к $M_0(x_0, y_0, z_0)$ соответственно изнутри или извне области T и, наконец, по аналогии с замечанием, следующим за формулами (2.3), введены обозначения

$$
X_{01} = \left\{\frac{2}{2+k} + \frac{3k}{2+k}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\right\} \frac{d}{dn_0}\left(\frac{1}{r}\right), \qquad Y_{01} = \frac{3k}{2+k} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{d}{dn_0}\left(\frac{1}{r}\right),
$$

$$
Z_{01} = \frac{3k}{2+k} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial z} \frac{d}{dn_0}\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{и т. д.} \tag{4.3}
$$

Установим некоторые свойства, которыми обладают функции U, V и W. Пусть функции φ, ψ и χ, не равные одновременно тождественно нулю, удовлетворяют однородной системе Фредгольма[3]

$$
\begin{aligned}
-2\pi\varphi_0 + \int_S (\varphi X_{01} + \psi Y_{01} + \chi Z_{01})\, dS &= 0 \\
-2\pi\psi_0 + \int_S (\varphi X_{02} + \psi Y_{02} + \chi Z_{02})\, dS &= 0 \\
-2\pi\chi_0 + \int_S (\varphi X_{03} + \psi Y_{03} + \chi Z_{03})\, dS &= 0
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

В этом случае, согласно сказанному, предельные значения $P(U, V, W), \ldots$ извне T равны нулю и на основании равенств (1.12) будем иметь

$$
U = A_j, \quad V = B_j, \quad W = C_j \quad \text{в} \quad T_j \ (j = 1, \ldots, m+1) \tag{4.5}
$$

---

[1] Оно является аналогом потенциала простого слоя.

[2] Очевидно, при этом будут иметь место формулы, аналогичные тем, которые получим, заменив в (3.3) n на n_0 и переставив знаки при внеинтегральных членах.

[3] В силу предположений, сделанных выше относительно поверхности S, функции $X_{01}, \ldots, Z_{03}$ будут абсолютно интегрируемы по S.

где A_j, B_j и C_j — некоторые постоянные, причем в силу условий на бесконечности $A_{m+1}=B_{m+1}=C_{m+1}=0$.

Если φ, ψ и χ являются решением системы

$$\begin{gathered}2\pi\varphi_0+\int_S(\varphi X_{01}+\psi Y_{01}+\chi Z_{01})\,dS=0\\ 2\pi\psi_0+\int_S(\varphi X_{02}+\psi Y_{02}+\chi Z_{02})\,dS=0\\ 2\pi\chi_0+\int_S(\varphi X_{03}+\psi Y_{03}+\chi Z_{03})\,dS=0\end{gathered}\tag{4.6}$$

то, рассуждая так же, найдем, что

$$U=A,\qquad V=B,\qquad W=C\tag{4.7}$$

в пространстве T, где A, B и C — некоторые постоянные.

При наличии (4.5) постоянные A_j, B_j и C_j ($j=1, \ldots, m+1$) не могут быть все одновременно равны нулю. В самом деле, допустим противное. Так как функции U, V и W изменяются непрерывно при переходе $M'(x', y', z')$ сквозь поверхность S, то при этом согласно равенствам (1.9) они будут равны нулю и внутри T. Отсюда, в связи с формулами (4.2), придем к системе (4.6). Сравнивая же ее с системой (4.4), найдем, что $\varphi=\psi=\chi=0$, а это по условию невозможно.

Докажем, что система (4.4) не может иметь больше $3m$ линейно независимым решений[1].

Пусть $\varphi^{(n)}$, $\psi^{(n)}$, и $\chi^{(n)}$ ($n=1, \ldots, 3m$) обозначают ее какие-либо $3m$ линейно независимых решения. Построим по формулам (4.1) соответствующие им функции $U^{(n)}$, $V^{(n)}$ и $W^{(n)}$. Для них будем иметь

$$\begin{gathered}U^{(n)}=A_j^{(n)},\qquad V^{(n)}=B_j^{(n)},\qquad W^{(n)}=C_j^{(n)}\\ \text{в}\quad T_j\ (j=1, \ldots, m+1;\ n=1, \ldots, 3m)\end{gathered}\tag{4.8}$$

где $A_j^{(n)}, B_j^{(n)}$ и $C_j^{(n)}$ — некоторые постоянные и $A_{m+1}^{(n)}=B_{m+1}^{(n)}=C_{m+1}^{(n)}=0$.

Сначала покажем, что определитель порядка $3m$, составленный из постоянных $A_j^{(n)}$, $B_j^{(n)}$ и $C_j^{(n)}$

$$\Delta=\begin{vmatrix}A_1^{(1)}\ldots A_m^{(1)} & B_1^{(1)}\ldots B_m^{(1)} & C_1^{(1)}\ldots C_m^{(1)}\\ A_1^{(2)}\ldots A_m^{(2)} & B_1^{(2)}\ldots B_m^{(2)} & C_1^{(2)}\ldots C_m^{(2)}\\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\\ A_1^{(3m)}\ldots A_m^{(3m)} & B_1^{(3m)}\ldots B_m^{(3m)} & C_1^{(3m)}\ldots C_m^{(3m)}\end{vmatrix}$$

отличен от нуля.

Действительно, предположим, что определитель Δ равен нулю. В этом случае система

$$\sum_{n=1}^{3m}A_j^{(n)}h^{(n)}=0,\qquad \sum_{n=1}^{3m}B_j^{(n)}h^{(n)}=0,\qquad \sum_{n=1}^{3m}C_j^{(n)}h^{(n)}=0\quad (j=1, 2, \ldots, m)\tag{4.9}$$

имеет бесчисленное множество нетривиальных решений. С помощью неко-

[1] Ниже будет показано, что она имеет точно $3m$ линейно независимых решений.

торого из них $h^{(n)}$ $(n=1, \ldots, 3m)$ введем функции φ, ψ и χ, равные

$$\varphi=\sum_{n=1}^{3m} h^{(n)}\varphi^{(n)} \qquad \psi=\sum_{n=1}^{3m} h^{(n)}\psi^{(n)}, \qquad \chi=\sum_{n=1}^{3m} h^{(n)}\chi^{(n)} \tag{4.10}$$

и затем соответствующие им функции U, V и W.

Так как φ, ψ и χ также являются решением системы (4.4), то для U, V и W будут справедливы соотношения (4.5). Сопоставляя же равенства (4.1), (4.8), (4.9) и (4.10), легко найдем, что все постоянные $A_j=B_j=C_j=0$ $(j=1, \ldots, m+1)$. Но тогда, как было установлено, $\varphi=\psi=\chi=0$ и, следовательно, решения $\varphi^{(n)}$, $\psi^{(n)}$, $\chi^{(n)}$ $(n=1, \ldots, 3m)$ не являются линейно независимыми, что противоречит условию. Итак определитель Δ отличен от нуля.

Предположим, что наряду с $\varphi^{(n)}$, $\psi^{(n)}$, $\chi^{(n)}$ $(n=1, \ldots, 3m)$ система (4.4) имеет некоторое другое решение φ, ψ, χ. Имея в виду условия (4.5), допустим, что $h^{(n)}$ $(n=1, \ldots, 3m)$ есть решение системы

$$A_j=\sum_{n=1}^{3m} A_j^{(n)}h^{(n)}, \qquad B_j=\sum_{n=1}^{3m} B_j^{(n)}h^{(n)}, \qquad C_j=\sum_{n=1}^{3m} C_j^{(n)}h^{(n)} \qquad (j=1, \ldots, m)$$

Введем далее функции

$$\varphi^*=\varphi-\sum_{n=1}^{3m} h^{(n)}\varphi^{(n)}, \qquad \psi^*=\psi-\sum_{n=1}^{3m} h^{(n)}\psi^{(n)}, \qquad \chi^*=\chi-\sum_{n=1}^{3m} h^{(n)}\chi^{(n)}$$

и им соответствующие U^*, V^* и W^*. Значения, принимаемые последними функциями на S_j $(j=1, \ldots, m+1)$, равны нулю. Поэтому они тождественно равны нулю в пространствах T и T_j $(j=1, \ldots, m+1)$, и рассуждая как прежде, найдем, что $\varphi^*=\psi^*=\chi^*=0$. Таким образом функции φ, ψ, χ и $\varphi^{(n)}$, $\psi^{(n)}$, $\chi^{(n)}$ линейно зависимы между собой и, следовательно, система (4.4) не может иметь больше $3m$ линейно независимых решений.

Докажем теперь, что система (4.4) имеет точно $3m$ линейно независимых решений. Для этого введем в рассмотрение следующие функции:

$$\begin{aligned} u(x', y', z') &= \int_S (\lambda X_1+\mu Y_1+\nu Z_1)\,dS \\ v(x', y', z') &= \int_S (\lambda X_2+\mu Y_2+\nu Z_2)\,dS \\ w(x', y', z') &= \int_S (\lambda X_3+\mu Y_3+\nu Z_3)\,dS \end{aligned} \tag{4.11}$$

где λ, μ и ν — некоторые непрерывные функции на поверхности S. Непосредственным вычислением можно убедиться, что u, v и w удовлетворяют системе (1.1) во всех точках пространства, лежащих внутри и вне области T.

Предположим, что на S обращаются в нуль предельные значения функций u, v и w, взятые изнутри T. Тогда, для определения λ, μ и ν получим систему однородных уравнений Фредгольма

$$
\begin{aligned}
&-2\pi\lambda_0 + \int_S (\lambda X_{10} + \mu Y_{10} + \nu Z_{10})\, dS = 0 \\
&-2\pi\mu_0 + \int_S (\lambda X_{20} + \mu Y_{20} + \nu Z_{20})\, dS = 0 \qquad (4.12) \\
&-2\pi\nu_0 + \int_S (\nu X_{30} + \mu Y_{36} + \nu Z_{30})\, dS = 0
\end{aligned}
$$

Используя установленные раньше соотношения (2.4), (2.5) и (2.6), нетрудно заметить, что система (4.12) имеет $3m$ линейно независимых решений $\lambda_1^{(p)}$, $\mu_1^{(p)}$, $\nu_1^{(p)}$; $\lambda_2^{(p)}$, $\mu_2^{(p)}$, $\nu_2^{(p)}$ и $\lambda_3^{(p)}$, $\mu_3^{(p)}$, $\nu_3^{(p)}$ $(p = 1, \ldots, m)$, определяемых на S_j $(j = 1, \ldots, m+1)$ равенствами

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1^{(p)} = \lambda_{1j}^{(p)} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = p \\ 0, & \text{если } j \neq p \end{cases} \qquad \mu_1^{(p)} = \mu_{1j}^{(p)} = 0, \qquad \nu_1^{(p)} = \nu_{1j}^{(p)} = 0 \\
&\mu_2^{(p)} = \mu_{2j}^{(p)} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = p \\ 0, & \text{если } j \neq p \end{cases} \qquad \lambda_2^{(p)} = \lambda_{2j}^{(p)} = 0, \qquad \nu_2^{(p)} = \nu_{2j}^{(p)} = 0 \qquad (4.13) \\
&\nu_3^{(p)} = \nu_{3j}^{(p)} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = p \\ 0, & \text{если } j \neq p \end{cases} \qquad \lambda_3^{(p)} = \lambda_{3j}^{(p)} = 0, \qquad \mu_3^{(p)} = \mu_{3j}^{(p)} = 0
\end{aligned}
$$

Система (4.4), легко видеть, является союзной с (4.12). Поэтому она также имеет $3m$ линейно независимых решений. Сохраним для них прежние обозначения $\varphi^{(n)}$, $\psi^{(n)}$, $\chi^{(n)}$ $(n = 1 \ldots, 3m)$. По доказанному выше, ими исчерпываются все ее решения. Отсюда заключаем, что и система (4.12) не имеет других линейно независимых решений помимо указанных в формулах (4.13).

§ 5. Для функций u, v и w, определяемых равенствами (4.11), построим предельные значения $P_i(u, v, w), \ldots$ и $P_e(u, v, w), \ldots$ изнутри и извне T.

Докажем следующее важное предложение. Если функции $P_i(u, v, w), \ldots$, $(P_e(u, v, w), \ldots)$ существуют и непрерывны, то функции $P_e(u, v, w), \ldots$, $(P_i(u, v, w), \ldots)$ также существуют и непрерывны и[1]

$$
\begin{aligned}
P_i(u, v, w) = P_e(u, v, w), \qquad Q_i(u, v, w) = Q_e(u, v, w), \\
R_i(u, v, w) = R_e(u, v, w) \qquad (5.1)
\end{aligned}
$$

Введем по формулам (4.1) функции U, V и W, где φ, ψ и χ определим из условий

$$
\begin{aligned}
P_i(u, v, w) = P_e(U, V, W), \qquad Q_i(u, v, w) = Q_e(U, V, W), \\
R_i(u, v, w) = R_e(U, V, W) \qquad (5.2)
\end{aligned}
$$

Учитывая (4.2), получим для φ, ψ и χ систему интегральных уравнений

$$
\begin{aligned}
P_i(u, v, w) &= -2\pi\varphi_0 + \int_S (\varphi X_{01} + \psi Y_{01} + \chi Z_{01})\, dS \\
Q_i(u, v, w) &= -2\pi\psi_0 + \int_S (\varphi X_{02} + \psi Y_{02} + \chi Z_{02})\, dS \qquad (5.3) \\
R_i(u, v, w) &= -2\pi\chi_0 + \int_S (\varphi X_{03} + \psi Y_{03} + \chi Z_{03})\, dS
\end{aligned}
$$

---

[1] Отметим аналогию с теоремой о непрерывности нормальной производной потенциала двойного слоя.

В силу сказанного в предыдущем параграфе, условия ее разрешимости имеют вид

$$\int\limits_{S_j} P_i(u, v, w)\,dS = 0, \qquad \int\limits_{S_j} Q_i(u, v, w)\,dS = 0, \qquad \int\limits_{S_j} R_i(u, v, w)\,dS = 0 \tag{5.4}$$

$$(j = 1, \ldots, m)$$

Нетрудно показать, что последние равенства на самом деле выполняются. Положим

$$\begin{aligned} u_j(x', y', z') &= \int\limits_{S_j} (\lambda X_1 + \mu Y_1 + \nu Z_1)\,dS \\ v_j(x', y', z') &= \int\limits_{S_j} (\lambda X_2 + \mu Y_2 + \nu Z_2)\,dS \qquad (i = 1, 2, \ldots, m+1) \\ w_j(x', y', z') &= \int\limits_{S_j} (\lambda X_3 + \mu Y_3 + \nu Z_3)\,dS \end{aligned} \tag{5.5}$$

Функции u_j, v_j и w_j удовлетворяют системе (1.1) в пространстве T_j и (внешнем к нему) $T + \sum\limits_{n=1}^{m+1}{}' T_n$, где штрих над Σ указывает на пропуск при суммировании члена, соответствующего $n = j$. При этом будем иметь

$$\int\limits_{S_j} P_i(u, v, w)\,dS = \sum_{n=1}^{m+1} \int\limits_{S_j} P_i(u_n, v_n, w_n)\,dS \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

и аналогично для Q_i и R_i. Последние равенства можно представить в виде

$$\int\limits_{S_j} P_i(u, v, w)\,dS = \int\limits_{S_j} P_i(u_j, v_j, w_j)\,dS + \sum_{n=1}^{m+1}{}' P_e(u_n, v_n, w_n)\,dS \tag{5.6}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m+1)$$

и аналогично для Q_i и R_i, так как u_n, v_n и w_n, где $n \neq j$, изменяются непрерывно со своими производными при переходе $M'(x', y', z')$ через поверхности S_j. В силу же соотношений (1.11) имеем

$$\int\limits_{S_j} P_e(u_n, v_n, w_n)\,dS = \int\limits_{S_j} Q_e(u_n, v_n, w_n)\,dS = \int\limits_{S_j} R_e(u_n, v_n, w_n)\,dS = 0$$

для $n = 1, 2, \ldots, m+1$, причем $n \neq j$ и, кроме того,

$$\int\limits_{S_j} P_i(u_j, v_j, w_j)\,dS + \int\limits_{S_R} P_i(u_j, v_j, w_j)\,dS = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

(и аналогично для Q_i и R_i), где S_R — поверхность сферы достаточно большого радиуса R с центром в начале координат.

Как легко видеть, функции $P_i(u_j, v_j, w_j), \ldots$ с возрастанием R убывают как $\frac{1}{R^3}$. Поэтому интегралы распространенные по S_R стремятся к нулю с возрастанием R. Отсюда сразу вытекают равенства (5.4). Таким образом система (5.3) разрешима и функции U, V и W могут быть определены.

Принимая во внимание соотношения (4.2), заменим равенства (5.2) следующими:

$$P_i(u^*, v^*, w^*) = -4\pi\varphi, Q_i(u^*, v^*, w^*) = -4\pi\psi, R_i(u^*, v^*, w^*) = -4\pi\chi \tag{5.7}$$

где

$$u^* = u - U, \quad v^* = v - V, \quad w^* = w - W$$

Подставим далее в выражения (4.1) для функций U, V и W вместо φ, ψ и χ выражения из последней формулы. После этого получим

$$u^*(x', y', z') = \int_S (\lambda X_1 + \mu Y_1 + \nu Z_1)\, dS + \frac{1}{4\pi}\int_S (P_i^* u_1 + Q_i^* v_1 + R_i^* w_1)\, dS \tag{5.8}$$

где для краткости $P_i(u,^* v^*, w^*), \ldots$ обозначены через $P_i^*, \ldots$. Кроме того, в соответствии с формулами (2.3) и (3.1), будем иметь в пространстве T

$$u^*(x', y', z') = -\frac{1}{4\pi}\int_S (u^* X_1 + v^* Y_1 + w^* Z_1)\, dS +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_S (u_1 P_i^* + v_1 Q_i^* + w_1 R_i^*)\, dS \tag{5.9}$$

и аналогично для функций v^* и w^*.

Сравнивая же последнюю систему с предыдущей, в которой также будем считать точку $M'(x', y', z')$ изменяющейся в T, найдем

$$\int_S \left\{\left(\lambda + \frac{1}{4\pi}u^*\right) X_n + \left(\mu + \frac{1}{4\pi}v^*\right) Y_n + \left(\nu + \frac{1}{4\pi}w^*\right) Z_n\right\} dS = 0 \qquad (n = 1, 2, 3)$$

Отсюда, учитывая формулы (4.13), получим

$$\lambda + \frac{1}{4\pi}u^* = A_j^*, \quad \mu + \frac{1}{4\pi}v^* = B_j^*, \quad \nu + \frac{1}{4\pi}w^* = C_j^* \quad \text{на } S_j\ (j = 1, \ldots, m+1) \tag{5.10}$$

где A_j^*, B_j^* и C_j^* — некоторые постоянные, причем $A_{m+1}^* = B_{m+1}^* = C_{m+1}^* = 0$.

Пусть точка $M'(x', y', z')$ стремится к поверхности S. Заменим $u^*, \ldots, R_i^*$ в системе (5.9) их выражениями из равенств (5.7) и (5.10). Используя затем соотношения (4.11), получим

$$4\pi A_j^* = u(x', y'; z') - U(x', y', z') \tag{5.11}$$

и аналогично для v, V и w, W в пространстве $T_j\ (j = 1, \ldots, m+1)$.

Отсюда следует, что на поверхности S

$$P_e(u, v, w) = P_e(U, V, W), \qquad Q_e(u, v, w) = Q_e(U, V, W),$$

$$R_e(u, v, w) = R_e(U, V, W) \tag{5.12}$$

Наконец, сопоставляя эти равенства с (5.2), придем к требуемым соотношениям[1] (5.1).

---

[1] Равенства (5.1) можно было установить иначе, непосредственно изучая выражения $P_i(u, v, w), \ldots$ и $P_e^*(u, v, w), \ldots$ и следуя классическому доказательству теоремы о непрерывности нормальной производной потенциала двойного слоя. См. цитированную книгу N. Günther [4].

§ 6. Перейдем к решению задачи, сформулированной в § 1 настоящей статьи.

Обозначим через $M_j(a_j, b_j, c_j)$ некоторые произвольно фиксированные точки, лежащие соответственно в областях T_j $(j=1, \ldots, m)$ и положим

$$u_{1j}=\frac{1}{r_j}-\frac{k}{2(1+k)}\frac{\partial^2 r_j}{\partial x^2}, \quad v_{1j}=-\frac{k}{2(1+k)}\frac{\partial^2 r_j}{\partial x\,\partial y}, \quad w_{1j}=-\frac{k}{2(1+k)}\frac{\partial^2 r_j}{\partial x\,\partial z} \qquad (6.1)$$

и аналогично для $u_{2j}, \ldots, w_{3j}$ $(j=1, \ldots, m)$, где

$$r_j=\sqrt{(x-a_j)^2+(y-b_j)^2+(z-c_j)^2}.$$

Функции u_{nj}, v_{nj} и w_{nj} $(n=1, 2, 3)$ непрерывны со своими производными и удовлетворяют системе (1.1) во всех точках пространства, не совпадающих с $M_j(a_j, b_j, c_j)$.

Искомые функции будем искать в виде

$$\begin{aligned} u(x', y', z') &= \frac{1}{2\pi}\int_S(\lambda X_1+\mu Y_1+\nu Z_1)\,dS+\sum_{j=1}^m(\alpha_j u_{1j}+\beta_j u_{2j}+\gamma_j u_{3j}) \\ v(x', y', z') &= \frac{1}{2\pi}\int_S(\lambda X_2+\mu Y_2+\nu Z_2)\,dS+\sum_{j=1}^m(\alpha_j v_{1j}+\beta_j v_{2j}+\gamma_j v_{3j}) \qquad (6.2) \\ w(x', y', z') &= \frac{1}{2\pi}\int_S(\lambda X_3+\mu Y_3+\nu Z_3)\,dS+\sum_{j=1}^m(\alpha_j w_{1j}+\beta_j w_{2j}+\gamma_j w_{3j}) \end{aligned}$$

где λ, μ и ν — новые неизвестные функции, α_j, β_j и γ_j $(j=1, \ldots, m)$ — некоторые, также пока неизвестные, постоянные.

Пусть точка $M'(x', y', z')$ стремится к точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности S. Тогда из равенств (6.2) для определения λ, μ и ν получим систему интегральных уравнений, из которых приведем первое, так как остальные два аналогичны.

$$u_0-\sum_{j=1}^m\{\alpha_j u_{1j}+\beta_j u_{2j}+\gamma_j u_{3j}\}=-\lambda_0+\frac{1}{2\pi}\int_S(\lambda X_{10}+\mu Y_{10}+\nu Z_{10})\,dS \qquad (6.3)$$

где индекс нуль указывает, что берутся значения соответствующих функций в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. По условию u_0, v_0 и w_0 известны.

Выше уже отмечалось, что однородная система, которую получим, отбросив в (6.3) свободные члены, является союзной с (4.4).

Примечание. Как было указано в начале статьи, случай, когда T ограничено одной замкнутой поверхностью S, был разобран G. Lauricella [1]. При этом постоянные α_j, β_j и γ_j следует положить равными нулю, и система (6.3) принимает вид [1]

$$\begin{aligned} u_0 &= -\lambda_0+\frac{1}{2\pi}\int_S(\lambda X_{10}+\mu Y_{10}+\nu Z_{10})\,dS \\ v_0 &= -\mu_0+\frac{1}{2\pi}\int_S(\lambda X_{20}+\mu Y_{20}+\nu Z_{20})\,dS \\ w_0 &= -\nu_0+\frac{1}{2\pi}\int_S(\lambda X_{30}+\mu Y_{30}+\nu Z_{30})\,dS \end{aligned}$$

[1] Система, полученная G. Lauricella, отличается от приводимой знаком при внеинтегральных членах λ_0, μ_0 и ν_0. Это находится в соответствии с выбором положительного направления нормали, за которое в цитированном мемуаре принято направление извне T вовнутрь.

Формулы[1] (4.13) показывают, что в этом случае соответствующая ей однородная система имеет только тривиальное решение. Поэтому эта система разрешима единственным образом. Определив из нее λ, μ и ν, найдем искомые функции u, v и w.

Возвращаясь к системе (6.3) и записав условия ее разрешимости, получим для определения α_j, β_j и γ_j $(j=1,\dots,m)$ систему $3m$ линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{m}\{\alpha_j\int_S(u_{1j}\varphi^{(n)}+v_{1j}\psi^{(n)}+w_{1j}\chi^{(n)})\,dS+\beta_j\int_S(u_{2j}\varphi^{(n)}+v_{2j}\psi^{(n)}+w_{2j}\chi^{(u)})\,dS+$$
$$+\gamma_j\int_S(u_{3j}\varphi^{(n)}+v_{3j}\psi^{(n)}+w_{3j}\chi^{(n)})\,dS\}=\int_S(u_0\varphi^{(n)}+v_0\psi^{(n)}+w_0\chi^{(n)})\,dS$$
$$(n=1,\dots,3m) \qquad (6.4)$$

Эта система всегда имеет единственное решение.

Действительно, допустим противное. Тогда, положив в ней $u_0=v_0=w_0=0$, получим однородную систему, которая будет иметь бесчисленное множество нетривиальных решений. Выберем какое-либо одно из них $\alpha_j^*, \beta_j^*, \gamma_j^*$ $(j=1,\dots,m)$. Система интегральных уравнений (6.3) при $u_0=v_0=w_0=0$ и $\alpha_j=\alpha_j^*$, $\beta_j=\beta_j^*$, $\gamma_j=\gamma_j^*$ также будет иметь бесчисленное множество нетривиальных решений. Обозначим через λ^*, μ^* и v^* некоторое из них. Функции u^*, v^* и w^*, которые мы получим, заменив в равенствах (6.2) λ, μ и v соответственно на λ^*, μ^* и v^*, обращаются в нуль на поверхности S. Поэтому они будут тождественно равны нулю в пространстве T. В связи с этим будем иметь на S

$$P_i(u^*,v^*,w^*)=Q_i(u^*,v^*,w^*)=R_i(u^*,v^*,w^*)=0 \qquad (6.5)$$

Рассмотрим последние равенства на S_{m+1}. В силу соотношений (5.1) они могут быть заменены на

$$P_e(u^*,v^*,w^*)=Q_e(u^*,v^*,w^*)=R_e(u^*,v^*,w^*)=0 \qquad (6.6)$$

Отсюда, учитывая обращение функций u^*, v^* и w^* в нуль на бесконечности, получим, что $u^*=v^*=w^*=0$ тождественно в T_{m+1}. Взяв же предельные значения этих функций со стороны T и T_{m+1} и вычитая одно значение из другого, найдем, что $\lambda^*=\mu^*=\nu^*=0$ на S_{m+1}. При этом выражения для u^*, v^* и w^* упрощаются и мы будем иметь в пространстве $T+T_{m+1}$ следующие равенства

$$u_j^*(x',y',z')=-\sum_{n=1}^{m}{}' u^*_n(x';y',z') \quad \text{и аналогично для } v_j^* \text{ и } w_j^* \qquad (6.7)$$

где штрих при знаке суммы следует понимать как указано выше, причем

$$u_j^*(x',y',z')=\int_{S_j}(\lambda^*X_1+\mu^*Y_1+\nu^*Z_1)\,dS+(\alpha_j^*u_{1j}+\beta_j^*u_{2j}+\gamma_j^*u_{3j}) \qquad (6.8)$$

и для v_j^* и w_j^* аналогично.

---

[1] В данном случае в них следует считать S совпадающим с S_{m+1}.

Обозначим правые части равенств (6.7) через H_j, K_j и L_j. Они будут непрерывны вместе со своими производными в бесконечном пространстве $T+T_{m+1}+T_j$ (содержащем внутри себя T_j). Поэтому будем иметь на S_j

$$P_i(H_j, K_j, L_j) = P_e(H_j, K_j, L_j) \qquad (j=1, 2, \ldots, m)$$

или, подставив вместо H_j, K_j и L_j их значения из (6.7), найдем

$$P_i(u_j^*, v_j^*, w_j^*) = P_e(H_j, K_j, L_j) \qquad (j=1, 2, \ldots, m) \tag{6.9}$$

и аналогично для функций Q_i и R_i.

Перемножив далее соответственные из равенств (6.7) и (6.9) и почленно их сложив, найдем

$$\begin{gathered} u_j^*P_i(u_j^*, v_j^*, w_j^*) + v_j^*Q_i(u_j^*, v_j^*, w_j^*) + w_j^*R_j(u_j^*, v_j^*, w_j^*) = \\ = H_jP_e(H_j, K_j, L_j) + K_jQ_e(H_j, K_j, L_j) + L_jR_e(H_j, K_j, L_j) \text{ на } S_j \\ (j=1, 2, \ldots, m) \end{gathered} \tag{6.10}$$

Обе части последнего равенства умножим на dS и проинтегрируем по поверхности S_j. Используя (в зависимости от значения постоянной k) формулу (1.6) или (1.7) и учитывая направление нормали, преобразуем каждый из интегралов в объемный интеграл соответственно по пространству $T+\sum\limits_{n=1}^{m+1}{}' T_n$ и (внешнему к нему) T_j. При этом, повторяя рассуждения, использованные выше, например, при выводе формул (1.9), и имея в виду условия на бесконечности, найдем, что

$$u_j^*(x', y', z') = v_j^*(x', y', z') = w_j^*(x', y', z') = 0 \tag{6.11}$$

тождественно в $T+\sum\limits_{n=1}^{m+1}{}' T_n$ $(n \neq j;\ j=1, \ldots, m)$.

Возвращаясь к равенствам (6.8), выпишем главные члены разложения правых частей по степеням $\frac{1}{R}$, где $R=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$.

Тогда, после умножения обеих частей равенств на R, будем иметь [1]

$$\alpha_j^*\left\{\frac{2+k}{2(1+k)} + \frac{k}{2(1+k)}\frac{x'^2}{R^2}\right\} + \beta_j^*\frac{k}{2(1+k)}\frac{x'y'}{R^2} + \gamma_j^*\frac{k}{2(1+k)}\frac{x'z'}{R^2} + \ldots = 0 \tag{6.12}$$

где $j=1, \ldots, m$, причем два остальных равенства, аналогичных с первым, мы не выписываем.

Устремим теперь R к бесконечности, двигаясь сначала в плоскости yz, затем в плоскости xz и, наконец, в плоскости xy. При этом, обращаясь последовательно к первому, второму и третьему из равенств (6.12), найдем, что все постоянные $\alpha_j^* = \beta_j^* = \gamma_j^* = 0$.

Итак, вопреки допущению, однородная система, полученная из (6.4) при $u_0 = v_0 = w_0 = 0$, имеет только тривиальное решение. Поэтому неоднородная система (6.4) всегда разрешима.

Определив из нее постоянные α_j, β_j, и γ_j $(j=1, 2, \ldots, m)$, подставим их значения в систему интегральных уравнений (6.3), затем найдем какое-либо решение последней системы и, наконец, после этого по формулам (6.2) построим искомые функции u, v и w.

[1] Заметим, что интегралы, содержащиеся в правых частях, убывают с возрастанием R как $\frac{1}{R^2}$, а остальные слагаемые — как $\frac{1}{R}$.

§ 7. В заключение укажем прием, который позволяет в значительной степени упростить решение задачи. Он состоит в следующем. Искомые функции u, v и w будем попрежнему искать в виде (6.2), постоянные же α_j, β_j и γ_j возьмем равными некоторым простым функционалам, зависящим от неизвестных λ, μ и ν. Именно положим

$$\alpha_j = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_j} \lambda\, dS, \qquad \beta_j = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_j} \mu\, dS, \qquad \gamma_j = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_j} \nu\, dS \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{7.1}$$

Для определения λ, μ и ν снова получим систему трех уравнений Фредгольма, из которых приведем первое:

$$u_0 = -\lambda_0 + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S} \{\lambda\,(X_{10} + u_{10}) + \mu\,(Y_{10} + u_{20}) + \nu\,(Z_{10} + u_{30})\}\, dS \tag{7.2}$$

так как два других получаются заменой u_{n0} на v_{n0} и w_{n0} и индексов 1 при X, Y, Z соответственно на 2 и 3. В этих уравнениях

$$u_{10} = (u_{1j})_0, \qquad v_{10} = (v_{1j})_0, \qquad w_{10} = (w_{1j})_0 \quad \text{на} \quad S_j\,(j = 1, 2, \ldots, m)$$

и

$$u_{10} = v_{10} = \ldots = w_{30} = 0, \quad \text{на} \quad S_{m+1}$$

Эта система в отличие от (6.3) имеет единственное решение. Действительно, рассмотрим соответствующую однородную систему

$$0 = -\lambda^* + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S} \{\lambda^*\,(X_{n0} + u_{10}) + \mu^*(Y_{n0} + u_{20}) + \nu^*\,(Z_{n0} + u_{30})\}\, dS \qquad (n = 1, 2, 3)$$

Повторяя дословно рассуждения, приведенные в предыдущем параграфе, найдем, что любое ее решение λ^*, μ^* и ν^* удовлетворяет в отдельности системе (4.12) и равенствам

$$\int\limits_{S_j} \lambda^* dS = \int\limits_{S_j} \mu^* dS = \int\limits_{S_j} \nu^* dS = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{7.3}$$

Подставив же решения системы (4.12), взятые в виде линейных комбинаций от (4.13), в последние равенства, получим, что $\lambda^* = \mu^* = \nu^* = 0$. Тем самым предложение доказано.

При сведении задачи к системе (6.3), необходимо, прежде чем приступить к ее решению, определить постоянные α_j, β_j и γ_j. Для этого, в свою очередь, нужно предварительно найти функции $\varphi^{(n)}$, $\psi^{(n)}$ и $\chi^{(n)}$. Отыскание же последних само по себе представляет сложную задачу. Это затруднение удается обойти, если пользоваться системой (7.2). Таким образом вновь полученная система Фредгольма по сравнению с первоначальной является принципиально более простой и, как нам кажется, представляет несомненные преимущества при решении задачи.

Изложение настоящей статьи велось в предположении, что пространство T, заполненное упругой средой, конечное. Однако читатель легко убедится, что с незначительными изменениями оно может быть также распространено и на тот случай, когда пространство T бесконечное.

Поступило в редакцию
1 III 1943

Сейсмологический институт
Академии Наук СССР

A SPATIAL STATIC PROBLEM OF THE ELASTICITY THEORY WITH GIVEN DISPLACEMENT ON THE BOUNDARY

D. I. SHERMANN

(Summary)

A series of papers have been devoted to the solution of the problem by means of integral equations, among which perhaps the papers of Lauricella [1] and Lichtenstein [2] deserve the greatest attention. The method of Lichtenstein, in spite of its exceptional elegance, leads to extremely complicated integral equations and in this sense undoubtedly yields to the method of Lauricella, which successfully made use of classical ideas belonging to the potential theory.

In the memoir of Lauricella cited both the finite and infinite elasti space bounded by one closed surface have been considered.

In this paper, using the method proposed by Lauricella for construction of integral equations, a more general case is considered, i. e. when the elastic space is bounded by several closed surfaces. Thereupon it is shown, how by a slight modification of the method of Lauricella the solution of the problem can be considerably simplified.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lauricella. Il Nuowo Gimento. 1907. Serie V. T. XIII.
2. Lichtenstein. Math. Z. 1924. Bd. 20.
3. Трэффц. Е. Математическая теория упругости. 1932. Ч. 1.
4. Gunther N. M. La théorie du potentiel. Paris. Gauthier-Villars. 1934.