Институт механики Академии Наук Союза ССР

Прикладная математика и механика. Том VII, 1943

УСТОЙЧИВОСТЬ ОПЕРТОГО ТРУБОПРОВОДА, ЗАПОЛНЕННОГО ВОДОЙ

Б. Г. ГАЛЕРКИН

(Москва)

В статьях «К одной задаче об устойчивости упругих систем»[1] и «Устойчивость цилиндрической оболочки»[2] нами дано общее решение по вопросу об устойчивости цилиндрической оболочки. Здесь мы остановимся на одной частной задаче устойчивости цилиндрической оболочки, имеющей довольно важное техническое значение, именно устойчивости трубопровода, заполненного водой.

Задача об устойчивости цилиндрической оболочки нами сведена к решению уравнения

$$\frac{\partial^8\varphi}{\partial\theta^8}+4\frac{\partial^8\varphi}{\partial\theta^6\,\partial\zeta^2}+6\frac{\partial^8\varphi}{\partial\theta^4\,\partial\zeta^4}+4\frac{\partial^8\varphi}{\partial\theta^2\,\partial\zeta^6}+\frac{\partial^8\varphi}{\partial\zeta^8}+\frac{\partial^6\varphi}{\partial\theta^6}+(5-3\sigma)\frac{\partial^6\varphi}{\partial\theta^4\,\partial\zeta^2}+(4-\sigma)\frac{\partial^6\varphi}{\partial\theta^2\,\partial\zeta^4}+$$
$$+2\sigma\frac{\partial^6\varphi}{\partial\zeta^6}+(1-2\sigma)\frac{\partial^4\varphi}{\partial\theta^2\,\partial\zeta^2}+\frac{12\,(1-\sigma^2)}{\alpha^2}\frac{\partial^4\varphi}{\partial\zeta^4}=\frac{12\,(1-\sigma^2)}{E\alpha^3c}\left[\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}(N_zU_0)+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(N_\theta U_0)\right] \tag{1}$$

где φ — функция перемещений; U_0 — перемещение по радиусу

$$U_0=\frac{\partial^4\varphi}{\partial\theta^4}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial\theta^2\,\partial\zeta^2}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial\zeta^4}$$

c — средний радиус оболочки; $\zeta=z/c$ (z — ось цилиндра), $\alpha=\delta/c$, где δ — толщина стенки,

$$N_z=\widehat{zz}\,\delta,\quad N_\theta=\widehat{\theta\theta}\,\delta$$

В этом случае через $\widehat{zz}$ и $\widehat{\theta\theta}$ обозначены средние значения напряжений по толщине в сечении плоскостью, перпендикулярной к оси z, и в сечении плоскостью, проходящей через ось z.

В дальнейшем значениями N_θ пренебрегаем, — они сравнительно малы и являются напряжениями растяжения, могущими несколько увеличить критические напряжения. Отбрасывая N_θ, получаем несколько бо́льший запас устойчивости. Полагаем

$$U_0=\sum_{k=1}^{\infty}B_k\,(A_0+A_1\cos\theta+A_2\cos2\theta)\sin\frac{k\pi c\zeta}{l} \tag{2}$$[1]

В этом случае

$$\varphi=\sum_{k=1}^{\infty}B_k\left[A_0\frac{l^4}{k^4\pi^4c^4}+\left(1+\frac{k^2\pi^2c^2}{l^2}\right)^{-2}A_1\cos\theta+\right.$$
$$\left.+\left(4+\frac{k^2\pi^2c^2}{l^2}\right)^{-2}A_2\cos2\theta\right]\sin\frac{k\pi c\zeta}{l} \tag{3}$$

где l — расстояние между опорами.

---

[1] Конечно, это решение является решением приближенным.

Значения N_z можно принять в виде

$$N_z = -\frac{\gamma l^2}{8}\cos\theta\,\frac{32}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\sin\frac{(2k-1)\pi c\zeta}{l}$$

или приближенно

$$N_z = -\frac{\gamma l^2}{8}\cos\theta\sin\frac{\pi c\zeta}{l}$$

Однако в дальнейшем полагаем

$$N_z = -\gamma\frac{l^2}{8}\cos\theta \tag{4}$$

В этом случае само решение значительно упрощается; полученные критические напряжения будут ниже тех, которые мы получили бы, не отбрасывая множителя $\sin(\pi c\zeta / l)$. Как увидим в дальнейшем, это не влияет на окончательные результаты, связанные с определением размеров трубопровода, обеспечивающих его устойчивую изогнутую форму.

Подставляя в уравнение (1) вместо φ и N_z их выражения (3) и (4), получим

$$\begin{gathered}
\left[\frac{k^4\pi^4c^4}{l^4} - 2\sigma\frac{k^2\pi^2c}{l^3} + \frac{12(1-\sigma^2)}{\alpha^2}\right]A_0 + \\
+\left[\frac{k^8\pi^8c^8}{l^8} + (4-2\sigma)\frac{k^6\pi^6c^6}{l^6} + \frac{(2+\sigma)\alpha^2 + 12(1-\sigma^2)}{\alpha^2}\frac{k^4\pi^4c^4}{l^4} + \sigma\frac{k^2\pi^2c}{l^2}\right]\times \\
\times\left[1 + \frac{k^2\pi^2c^2}{l^2}\right]^{-2}A_1\cos\theta + \left[\frac{k^8\pi^8c^8}{l^8} + (16-2\sigma)\frac{k^6\pi^6c^6}{l^6} + \right. \\
\left. + \frac{(80+4\sigma)\alpha^2 + 12(1-\sigma^2)}{\alpha^2}\frac{k^4\pi^4c^4}{l^4} + (180+40\sigma)\frac{k^2\pi^2c^2}{l^2} + 192\right]\left[4 + \frac{k^2\pi^2c^2}{l^2}\right]^{-2}A_2\cos 2\theta = \\
= \frac{3(1-\sigma^2)\gamma c}{2E\alpha^4}\frac{l^2}{c^2}(A_0 + A_1\cos\theta + A_2\cos 2\theta)\frac{k^2\pi^2c^2}{l^2}\cos\theta
\end{gathered} \tag{5}$$

Умножая последовательно уравнение (5) на 1, $\cos\theta$ и $\cos 2\theta$ и интегрируя по θ в пределах от $-\pi$ до $+\pi$, получим три уравнения:

$$\begin{gathered}
\left[\frac{k^4\pi^4c^4}{l^4} - 2\sigma\frac{k^2\pi^2c^2}{l^2} + \frac{12(1-\sigma^2)}{\alpha^2}\right]A_0 - \frac{3(1-\sigma^2)\gamma c}{4E\alpha^3}\frac{l^2}{c^2}\frac{k^2\pi^2c^2}{l^2}A_1 = 0 \\
\left[\frac{k^6\pi^6c^6}{l^6} + (4-2\sigma)\frac{k^4\pi^4c^4}{l^4} + \frac{(2+\sigma)\alpha^2 + 12(1-\sigma^2)}{\alpha^2}\frac{k^2\pi^2c^2}{l^2} + \sigma\right]\left[1 + \frac{k^2\pi^2c^2}{l^2}\right]^{-2}A_1 - \\
- \frac{3(1-\sigma^2)\gamma c}{2E\alpha^3}\frac{l^2}{c^2}\left[A_0 + \frac{1}{2}A_2\right] = 0 \\
\left[\frac{k^8\pi^8c^8}{l^8} + (16-2\sigma)\frac{k^6\pi^6c^6}{l^6} + \frac{(80+4\sigma)\alpha^2 + 12(1-\sigma^2)}{\alpha^2}\frac{k^4\pi^4c^4}{l^4} + \right. \\
\left. + (180+40\sigma)\frac{k^2\pi^2c^2}{l^2} + 192\right]\left[4 + \frac{k^2\pi^2c^2}{l^2}\right]^{-2}A_2 - \frac{3\gamma c(1-\sigma^2)}{4}\frac{l^2}{c^2}\frac{k^2\pi^2c^2}{l^2}A_1 = 0
\end{gathered} \tag{6}$$

Вычислив соответствующий определитель и приравняв его нулю, получим

$$\begin{gathered}
\Delta = \left[\frac{k^4\pi^4c^4}{l^4} - 2\sigma\frac{k^2\pi^2c^2}{l^2} + \frac{12(1-\sigma^2)}{\alpha^2}\right]\left[\frac{k^6\pi^6c^6}{l^6} + (4-2\sigma)\frac{k^4\pi^4c^4}{l^4} + \right. \\
\left. + \frac{(2+\sigma)\alpha^2 + 12(1-\sigma^2)}{\alpha^2}\frac{k^2\pi^2c^2}{l^2} + \sigma\right]\left[\frac{k^8\pi^8c^8}{l^8} + (16-2\sigma)\frac{k^6\pi^6c^6}{l^6} + \right. \\
\left. + \frac{(80+4\sigma)\alpha^2 + 12(1-\sigma^2)}{\alpha^2}\frac{k^4\pi^4c^4}{l^4} + (180+40\sigma)\frac{k^2\pi^2c^2}{l^2} + 192\right]\left[1 + \frac{k^2\pi^2c^2}{l^2}\right]^{-2} - \\
- \frac{9(1-\sigma^2)\gamma^2c^2}{16E^2\alpha^6}\frac{k^2\pi^2c^2}{l^2}\frac{l^4}{c^4}\left[3\frac{k^8\pi^8c^8}{l^8} + (40-6\sigma)\frac{k^6\pi^6c^6}{l^6} + \right. \\
\left. + \frac{(176-8\sigma)\alpha^2 + 36(1-\sigma^2)}{\alpha^2}\frac{k^4\pi^4c^4}{l^4} + \frac{(360+48\sigma)\alpha^2 + 96(1-\sigma^2)}{\alpha^2}\frac{k^2\pi^2c^2}{l^2} + \frac{384\alpha^2 + 192(1-\sigma^2)}{\alpha^2}\right] = 0
\end{gathered} \tag{7}$$

Составленное уравнение позволяет установить критическое состояние трубопровода в его сжатой части; для этого надо определить такое k, при котором наименьшее значение l/c удовлетворяло бы этому уравнению.

Полагаем $E=2\times10^6$. Допустим, что $\alpha=0.01$ и $c=100$ см. Тогда k близко к 600 ($601\div603$). Полагая $k=600$, получим

$$\frac{l}{c}\approx106$$

Если допустить, что N_z постоянно по длине, надо считать, что в сжатой зоне возможно образование около 600 полуволн и отношение радиуса c к длине полуволны λ

$$\frac{c}{\lambda}\approx5.66$$

При этом критический момент

$$M_{\text{cr}}=\frac{\gamma\pi c^2l^2}{8}=4410\ (\text{в тоннометрах}) \tag{8}$$

Рассмотрим теперь более общий случай — устойчивость трубы, к концам которой приложены пары сил с моментом M. В этом случае

$$N_z=-\frac{M}{\pi c^2}\cos\theta \tag{9}$$

Обозначая левую часть уравнения (5) через Ψ, можно написать

$$\Psi=\frac{12(1-\sigma^2)M}{E\alpha^3\pi c^3}(A_0+A_1\cos\theta+A_2\cos2\theta)\frac{k^2\pi^2c^2}{l^2}\cos\theta \tag{10}$$

Положим

$$\frac{k^2\pi^2c^2}{l^2}=t,\qquad \frac{12(1-\sigma^2)}{E\pi c^3}=D \tag{11}$$

Умножая последовательно уравнение (10) на 1, $\cos\theta$ и $\cos2\theta$ и интегрируя в пределах от $-\pi$ до $+\pi$, получим три уравнения:

$$2A_0\left[t-2\sigma+\frac{12(1-\sigma^2)}{\alpha^2t}\right]-\frac{D}{\alpha^3}A_1=0$$

$$A_1\left[t^3+(4-2\sigma)t^2+\frac{(2+\sigma)\alpha^2+12(1-\sigma^2)}{\alpha^2}t+\sigma\right]\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{D}{\alpha^3}\left[A_0+\frac{1}{2}A_2\right]=0 \tag{12}$$

$$A_2\left[t^3+(16-2\sigma)t^2+\frac{(80+4\sigma)\alpha^2+12(1-\sigma^2)}{\alpha^2}t+180+40\sigma+\frac{192}{t}\right]\frac{1}{(t+4)^2}-$$
$$-\frac{1}{2}\frac{D}{\alpha^3}A_1=0$$

Вычислив соответствующий определитель и приравняв его нулю, получим

$$\left[2t-4\sigma+\frac{24(1-\sigma^2)}{\alpha^2t}\right]\left[t^3+(4-2\sigma)t^2+\frac{(2+\sigma)\alpha^2+12(1-\sigma^2)}{\alpha^2}t+\sigma\right]\times$$
$$\times\left[t^3+(16+2\sigma)t^2+\frac{(80+4\sigma)\alpha^2+12(1-\sigma^2)}{\alpha^2}t+180+40\sigma+\frac{192}{t}\right]\frac{1}{(t+1)^2(t+4)^2}-$$
$$-\frac{D}{\alpha^6}\left\{\frac{1}{2}t-\sigma+\frac{6(1-\sigma^2)}{\alpha^2t}+\left[t^3+(16-2\sigma)t^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{(80+4\sigma)\alpha^2+12(1-\sigma^2)}{\alpha^2}t+180+40\sigma+\frac{192}{t}\right]\frac{1}{(t+4)^2}\right\}=0 \tag{13}$$

Из этого уравнения нужно определить t, при котором получим наименьшее значение D, т. е. D_{cr}, соответствующее критическому моменту. Пусть корень, дающий наименьшее значение D, будет $t=\beta^2$, т. е.

$$\frac{k\pi c}{l}=\beta$$

Отсюда следует, что $l/k=\pi c/\beta$ и в данном случае $\lambda=l/k=\text{const}$.

и D_{cr} не зависит от l; а зависит только от $\alpha = \delta / c$.

Для критического изгибающего момента имеем выражение

$$M_{cr} = \frac{ED_{cr} \pi c^3}{12(1-\sigma^2)\alpha} \tag{14}$$

Критическое напряжение (также зависит только от α)

$$\widehat{zz}_{cr} = \frac{ED_{cr}}{12(1-\sigma^2)\alpha} \tag{15}$$

Результаты вычисления[1] значений c/λ, D_{cr} и $\widehat{zz}_{cr}$ с помощью формул (14) и (16) для значений $\alpha = 0.008$, 0.010, 0.012 приведены в табл. 1.

Таблица 1

α	0.008	0.010	0.012
$\frac{c}{\lambda}$	6.4	5.7	5.2
D_{cr}	953×0.008^3	763×0.01^3	636×0.012^3
zz_{cr} (в $кг/см^2$)	11165	13974	16774

Первый вопрос, который здесь возникает: можно ли результаты исследования устойчивости трубопровода, подвергнутого изгибу парами, приложенными к концам его (случай A), распространить на устойчивость опертого трубопровода, заполненного водой (случай B); ответ нам представляется совершенно положительным. Разумеется, трубопровод, заполненный водой, не будет себя вести вполне так, как трубопровод, нагруженный парами по концам, в котором могут образоваться по всей длине полуволны равной длины. Однако в трубопроводе, заполненном водой (случай B), если он будет иметь длину, при которой изгибающий момент в середине достигнет критического, соответствующего формуле (14), может образоваться в середине полуволна, как раз соответствующая случаю A.

Второй вопрос следующий: из табл. 1 видно, что для трубопровода промышленного типа критическое напряжение всегда находится далеко за пределами текучести железа, из которого обычно изготовляются такие трубопроводы. Ясно, что резкие деформации наступили бы еще до достижения критических напряжений, указанных в таблице, — критические напряжения лежат за пределами текучести и поэтому такие трубопроводы могут быть рассчитаны на прочность, — допускаемые напряжения должны лежать ниже предела текучести, причем должен быть взят определенный запас прочности; рассчитанный таким образом трубопровод будет и устойчив.

Наибольшее сжимающее напряжение в опертом трубопроводе, заполненном водой, принимая во внимание и собственный вес трубопровода, будет

$$\widehat{zz}_{max} = -\frac{\gamma l^2}{8\delta}\left(1 + 2\frac{\gamma'}{\gamma}\alpha\right)$$

где γ' — вес единицы металла.

[1] В вычислениях мне оказали помощь научные сотрудники Института механики Академии Наук СССР Ц. О. Левина и М. М. Семчинова.

В табл. 2 приведены значения l/c и l, полученные в результате вычислений для $\gamma'/\gamma = 8$ и $\widehat{zz} = 1600$ *кг/см*^{2}.

Таблица 2

α	0.008				0.010				0.012			
ср. радиус в *см*	150	100	60	50	150	100	60	50	150	100	60	50
l/c	25	30	—	—	27	33	43	47	—	36	—	51
l (в *см*)	3700	3016	—	—	4066	3322	2574	2349	—	3576	—	2538

Пользуясь полученными данными, можно для соответствующего качества материала определить расстояния между опорами трубопровода, не требующие дополнительных креплений в виде уголков жесткости.

Послесловие

Исследование показало, что критические напряжения для трубопровода лежат за пределом текучести. Однако может возникнуть вопрос, действительно ли найденные значения наименьшие. Исследуя устойчивость при изгибе парой сил и применяя результаты к трубопроводу, заполненному водой, мы, казалось бы, безусловно достигли надежных результатов, но при исследовании мы приняли для U_0 зависимость от θ в виде $A_0 + A_1 \cos\theta + A_2 \cos 2\theta$ вместо $\sum_0^\infty A_n \cos n\theta$. Как известно, приближенное решение всегда дает критическую нагрузку, большую действительной, а следовательно, и значения табл. 1 являются несколько большими, чем те, которые были бы получены при более точном решении.

Однако нетрудно получить низший предел, при котором начнется деформация изгиба цилиндрической оболочки. Предположим, что к концам прямого цилиндра приложим по всей окружности силы (на единицу длины). Полагаем $N_z = -q$, где q — величина постоянная. В этом случае полагаем, что искривление оси не происходит и функция φ не зависит от θ.

Полагаем

$$\varphi = \sum A_n \sin \frac{n\pi\varepsilon\zeta}{l}$$

Подставляя это выражение в формулу (1), получим:

$$\frac{n^8\pi^8c^8}{l^8} - 2\sigma \frac{n^6\pi^6c^6}{l^6} + \frac{12(1-\sigma^2)}{\alpha^2}\frac{n^4\pi^4c^4}{l^4} = \frac{12(1-\sigma^2)}{E\alpha^3 c} q \frac{n^6\pi^6c^6}{l^6}$$

откуда

$$q = \frac{E\alpha^3 c}{12(1-\sigma^2)}\left(\frac{n^2\pi^2c^2}{l^2} - 2\sigma + \frac{12(1-\sigma^2)}{\alpha^2}\frac{l^2}{n^2\pi^2c^2}\right) \qquad (a)$$

$q_{\min}$ получим при

$$\frac{n^2\pi^2c^2}{l^2} = \frac{1}{\alpha}\sqrt{12(1-\sigma^2)}$$

Если пренебречь в формуле (a) значением 2σ, получим известное в литературе значение

$$q_{\text{кр}} = \frac{E\alpha^2 c}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}$$

Критическое напряжение

$$\widehat{zz}_{\text{cr}} = -\frac{q}{\delta} = -\frac{E\alpha}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}$$

При $\alpha = 0.008$ $\widehat{zz}_{\text{cr}} \approx -9610$ кг/см²
$\alpha = 0.010$ $\widehat{zz}_{\text{cr}} \approx -12000$ »
$\alpha = 0.012$ $\widehat{zz}_{\text{cr}} \approx -14400$ »

Таким образом низший предел ниже критических напряжений, данных в табл. 1, но они значительно выше предела текучести.

Поступила в редакцию
5 VII 1943 г.

Институт механики
Академии Наук СССР

THE STABILITY OF A WATERPIPE

B. G. GALERKIN

(Summary)

The waterpipe filled with a liquid is considered as a thin shell.

The author starts with equation (1) of elastic equilibrium expounded in his previous papers[1], [2] and seeks an approximate solution. The displacement along the radius U_0 is taken according to expression (2) and the corresponding displacement function φ according to (3) where c is the middle radius of the shell, z is the axis of the cylinder, δ is the thickness of the wall, l is the length of the pipe and

$$\zeta = z/c, \quad \alpha = \delta/c, \quad N_z = \widehat{zz}\,\delta \quad N_\theta = \widehat{\theta\theta}\,\delta$$

The average stresses over the cross-sections for a plane perpendicular to the axis z and by a plane passing through this axis are denoted by $\widehat{zz}$ and $\widehat{\theta\theta}$.

The author neglects the value N_θ and takes N_z in the form (4).

Substituting (3) and (4) in (1) and multiplying (5) by $d\theta$, by $\cos\theta\, d\theta$, then by $\cos 2\theta\, d\theta$, after integrating all result within the range $(-\pi, +\pi)$ the author derives the system of equations (6).

By equating the determinant of this system to zero an equation is obtained (7) which can determine a value of k for which the minimal value of l/c satisfies this equation.

In a quite analogous way the more general case of a pipe loaded by torques on the buttends is considered. The value N_z is expressed by formula (9) and the calculations result in equations (10), (12) and (13) corresponding to (5), (6) and (7); the left side of equation (5) is denoted by ψ and the values t, D are determined by formulae (11).

From equation (13) a value of t for which D will have the minimal magnitude D_{cr} corresponding to the critical moment (14) and the critical stresses (15) can be determined.

The results of numerical calculation show that the critical stresses for waterpipes are usually higher than the yield stresses of materials.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галеркин Б. Г. ДАН. 1942. Т. XXXV.
2. Галеркин Б. Г. Прикладная математика и механика. 1943. Т. VII. В. 1.