

**ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ  
 О ДВИЖЕНИИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ АРТИЛЛЕРИЙСКОГО СНАРЯДА**

**В. С. ПУГАЧЕВ**

(Москва)

В работах автора «Заметки по внешней баллистике»<sup>[1]</sup> и «Общая задача о движении вращающегося артиллерийского снаряда в воздухе»<sup>[2]</sup> дано полное приближенное решение задачи о движении вращающегося снаряда в случае, когда угол  $\delta$  между осью снаряда и вектором скорости его центра массы остается во время движения малым.

На практике встречаются случаи, когда эта теория оказывается недостаточной. Таков, например, случай стрельбы с самолета при большом угле между осью канала ствола орудия и осью самолета. В этом случае начальное значение угла  $\delta$  может достигать  $15^\circ$ , вследствие чего нелинейные члены уравнений движения могут иметь существенное влияние и пренебрегать ими нельзя. Однако в этом случае задача несколько упрощается вследствие малой кривизны участка траектории, интересующего нас при стрельбе с самолета.

В настоящей статье дается приближенный метод решения нелинейной задачи о движении вращающегося снаряда на участке траектории, имеющем малую кривизну.

1. В цитированных выше работах автора<sup>[1,2]</sup> даны общие векторные уравнения вращательного движения снаряда

$$\begin{aligned} Z \times Z'' + \Omega Z' - (2Z' - Z \times \Theta + f_1 Z)(Z \cdot \Theta) - Z(Z \cdot \Theta') + \Theta' - \Omega Z \times \Theta = \\ = f_2 X \times Z + \Omega f_3 \{Z(Z \cdot X) - X\} - f_4 (Z \times Z' + \Theta) \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$X' - X \times \Theta = \frac{1}{v} \{ (g - X(g \cdot X)) + f_5 \{Z - X(Z \cdot X)\} + f_6 Z \times X \} \quad (1.2)$$

$$\Omega' = -f_7 \Omega$$

где  $Z$  — единичный вектор оси снаряда,  $X$  — единичный вектор скорости его центра массы,  $\Theta$  — вектор угловой скорости системы координат,  $v$  — скорость центра массы снаряда,  $f_\nu$  ( $\nu = 2, \dots, 7$ ) — некоторые функции скорости  $v$ , ординаты траектории  $y$  и угла  $\delta$ , характеризующие соответственно действие боковой силы, силы Магнуса, опрокидывающего момента, момента Магнуса, тушащего полярного момента и тушащего экваториального момента. Что же касается величины  $\Omega$ , то она определяется формулой

$$\Omega = \frac{C r}{A} \quad (1.3)$$

где  $r$  — проекция вектора угловой скорости снаряда на его ось,  $C$  — полярный момент инерции снаряда,  $A$  — его экваториальный момент инерции.

Поскольку мы рассматриваем движение снаряда на участке траектории, имеющем малую кривизну, мы можем в первом приближении пренебречь действием силы тяжести на этом участке.

Тогда второе уравнение (1.1) может быть написано в виде

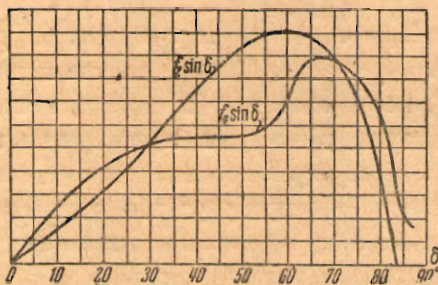
$$\mathbf{X}' - \mathbf{X} \times \Theta = f_2 \{ \mathbf{Z} - \mathbf{X} (\mathbf{Z} \cdot \mathbf{X}) \} + f_3 \mathbf{Z} + \mathbf{X} \quad (1.4)$$

Коэффициенты  $f_\nu$  ( $\nu = 2, \dots, 7$ ) являются, как нетрудно видеть, четными периодическими функциями угла  $\delta$  с периодом  $2\pi$ . Поэтому они могут быть разложены в ряды Фурье вида

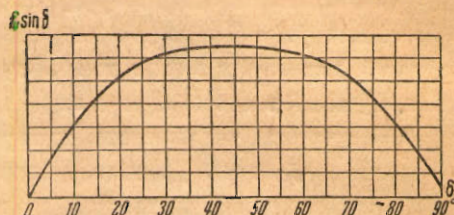
$$f_\nu = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\nu}^{(\mu)} \cos \mu \delta \quad (\nu = 2, \dots, 7) \quad (1.5)$$

где коэффициенты  $a_{\nu}^{(\mu)}$  являются функциями  $\nu$  и  $\mu$ .

В случае, когда угол  $\delta$  мал, можно пренебречь зависимостью величин  $f_\nu$  от  $\delta$ . При произвольном угле  $\delta$  такое приближение перестает быть удовлетворительным. Поэтому мы должны решить вопрос о том, какие члены рядов (1.5) следует сохранить для нашей приближенной теории.



Фиг. 1



Фиг. 2

Для того чтобы точно оценить влияние каждой гармоники в рядах (1.5) мы не располагаем достаточными знаниями относительно характера зависимости коэффициентов  $f_\nu$  от  $\delta$ . Имеются лишь частичные данные, полученные путем продувки снарядов в аэродинамических трубах при малой скорости потока.

На фиг. 1 приведены графики величин  $f_2 \sin \delta$  и  $f_4 \sin \delta$  в зависимости от  $\delta$  по данным Fowler, Gallop, Lock и Richmond [3], а на фиг. 2 — график величины  $f_4 \sin \delta$  в зависимости от  $\delta$  по данным Прандтля. Из рассмотрения этих кривых видно, что на интересующем нас интервале значений  $\delta$ , примерно  $0 < \delta < 40^\circ$ , функции  $f_2$  и  $f_4$  могут быть достаточно точно представлены формулами

$$f_2 = a_2^{(0)} + a_2^{(1)} \cos \delta, \quad f_4 = a_4^{(0)} + a_4^{(1)} \cos \delta \quad (1.6)$$

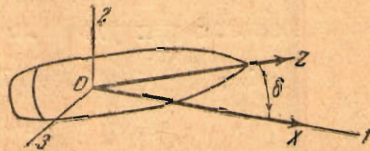
Относительно зависимости от  $\delta$  силы и момента Магнуса и тушащих моментов нет никаких экспериментальных данных. Учитывая, что влияние этих сил является второстепенным, будем считать величины  $f_2$ ,  $f_3$ ,  $f_6$ , и  $f_7$  независимыми от  $\delta$ .

Для того чтобы получить уравнения движения в удобной для исследования аналитической форме, введем следующую систему координат, имеющую

начало в центре массы снаряда: ось  $O1$  направим по вектору  $X$ , ось  $O2$  — по перпендикулярно к вектору  $X$ , лежащему в плоскости векторов  $X$  и  $Z$ , с таким расчетом, чтобы проекция вектора  $Z$  на эту ось была положительной (фиг. 3); наконец, ось  $O3$  направим по вектору  $X \times Z$ .

Обозначим проекции вектора  $\Theta$  через  $\theta_1, \theta_2$  и  $\theta_3$ . Кроме того, для краткости положим

$$s = \sin \delta, \quad c = \cos \delta \quad (1.7)$$



Фиг. 3.

Тогда, проектируя первое уравнение (1.1) на оси  $O1$  и  $O3$ ; а уравнение (1.4) на оси  $O2$  и  $O3$ ; получим

$$\begin{aligned} \Omega c' - (2c' - s\theta_3 + f_7 c) (c\theta_1 + s\theta_2) - c (c\theta_1' + s\theta_2') + \theta_1' - \Omega s\theta_3 &= -\Omega f_5 s^2 - f_7 \theta_1 \\ \delta'' + (c\theta_2 - s\theta_1) (c\theta_1 + s\theta_2) + \theta_3' - \Omega (c\theta_2 - s\theta_1) &= f_4 s - f_7 (\delta' + \theta_3) \quad (1.8) \\ \theta_3 &= f_2 s, \quad \theta_2 = f_3 s \end{aligned}$$

Исключая из этих уравнений  $\theta_2$  и  $\theta_3$ , получим

$$\begin{aligned} s^2 \theta_1' + 2ss' \theta_1 + \Omega c' &= \Omega (f_2 - f_5) s^2 - (f_7 + f_2 c) s^2 \theta_1 + f_3 f_7 s^2 c - \\ &- f_2 f_3 s^4 + f_3' s^2 c - f_3 (1 - 3s^2) c' \end{aligned}$$

$$\delta'' - \theta_1^2 s c + \Omega \theta_1 s = f_4 s - f_7 \delta' - f_2 f_7 s - f_3 \theta_1 s (1 - 2s^2) - f_3' s^2 c - f_2' s - f_2 s' + \Omega f_3 s c$$

Введем теперь новую переменную  $\sigma^*$ , определив ее дифференциальным уравнением (1.10)

$$\sigma^{*'} = \Omega' c + \Omega (f_2 - f_5) s^2 - (f_7 + f_2 c) s^2 \theta_1 + (f_3 f_7 + f_3') s^2 c - f_2 f_3 s^4 - f_3 (1 - 3s^2) c'$$

Тогда первое уравнение (1.9) может быть переписано в виде

$$\theta_1' s^2 + 2ss' \theta_1 + \Omega c' + \Omega' c = \sigma^{*'} \quad (1.11)$$

Интегрируя это уравнение; получим

$$\theta_1 s^2 + \Omega c = \sigma^* \quad (1.12)$$

Здесь произвольная постоянная выключена в величину  $\sigma^*$ .

Умножая второе уравнение (1.9) на  $\delta'$ , а первое на  $\theta_1$ , складывая их и пренебрегая величиной  $f_3 s^2$  по сравнению с  $\Omega$ , получим

$$\begin{aligned} \delta' \delta'' + \theta_1 \theta_1' s^2 + \theta_1^2 s s' &= -f_4 c' + \theta_1 \sigma^{*'} - \theta_1 \Omega' c - (f_7 + f_2 c) \delta'^2 + \\ &+ f_2 f_7 c' - \Omega f_3 c c' + f_2' c' + f_3 (1 - 2s^2) \theta_1 c' \quad (1.13) \end{aligned}$$

Подставляя сюда вместо  $f_4$  его выражение из формул (1.6) и вводя новую переменную  $\tau^*$ , определяемую дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} \tau^{*'} &= 2\theta_1 \sigma^{*'} - 2\theta_1 \Omega' c + 2a_4^{(0)'} c + a_6^{(1)'} c^2 - 2(f_7 + f_2 c) \delta'^2 + \\ &+ 2f_2 f_3 c' - 2\Omega f_3 c c' + 2f_2' c' + 2f_3 (1 - 2s^2) \theta_1 c' \quad (1.14) \end{aligned}$$

придем к уравнению

$$\delta' \delta'' + \theta_1 \theta_1' s^2 + \theta_1^2 s s' = -a_4^{(0)'} c' - a_6^{(1)'} c c' - a_4^{(0)'} c - \frac{1}{2} a_4^{(1)'} c^2 + \frac{1}{2} \tau^{*'} \quad (1.15)$$

Интегрируя это уравнение и включая произвольную постоянную в  $\tau^*$ , получим

$$\delta'^2 + \theta_1^2 s^2 = \tau^* - 2a_4^{(0)'} c - a_6^{(1)'} c^2 \quad (1.16)$$

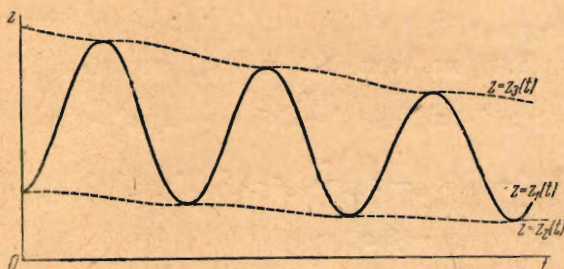
## 2. Вводя новые переменные

$$z = \sin^2 \frac{\delta}{2}, \quad \sigma = \sigma^* - \Omega, \quad \tau = \tau^* - 2a_4^{(0)} - a_4^{(1)} \quad (2.1)$$

и полагая для удобства

$$\lambda = a_2^{(0)} + a_2^{(1)}, \quad \lambda_1 = 2a_2^{(1)}, \quad \mu = a_4^{(0)} + a_4^{(1)}, \quad \mu_1 = 2a_4^{(1)}$$

$$x = f_3, \quad \gamma = f_5, \quad \nu = f_6, \quad \eta = f$$



Фиг. 4

$$\beta_1 = 2(x\eta + x'),$$

$$\beta_2 = 16x\lambda + 12(x\eta + x')$$

$$\beta_3 = 16x\lambda_2 + 8(x\eta + x')$$

$$\beta_4 = \lambda\eta + \lambda'$$

$$\beta_5 = 8\lambda x + 4(x\eta + x')$$

$$\beta_6 = \lambda_1\eta + \lambda_1'$$

$$\lambda_2 = 2\lambda + \lambda_1$$

$$\lambda_3 = 2\lambda + 3\lambda_1$$

$$\lambda_4 = \lambda + \lambda_1$$

$$\lambda_5 = \lambda + 2\lambda_1$$

$$\alpha_1 = 2(\lambda - 2\gamma - \eta + \nu), \quad \alpha_2 = 2(\lambda_1 - 2\gamma), \quad \alpha_3 = \frac{4}{\Omega^2} [2\mu(2 + \eta) + \mu'] - 4(\lambda - \gamma), \quad (2.2)$$

$$\alpha_4 = 2(\lambda - \gamma), \quad \alpha_5 = \frac{4}{\Omega^2} [\mu_1(\lambda + \eta) + 2\mu\lambda_3 + \frac{1}{2}\mu_1'] - 8\lambda_1, \quad \alpha_6 = \frac{4}{\Omega^2} (\mu_1\lambda_3 + 8\mu\lambda_1)$$

приведем уравнения (1.16), (1.10), (1.14) и (1.2) к виду

$$z'^2 = z(1-z)(\tau + 4\mu z - 2\mu_1 z^2) - \frac{1}{4}(\sigma + 2\Omega z)^2 \quad (2.3)$$

$$\sigma' = -(\lambda + \eta)\sigma + (\Omega\alpha_1 + 2\beta_1)z - (\Omega\alpha_2 + \beta_2)z^2 + \lambda_2 z\sigma + \beta_3 z^2 - 2\lambda_1 z^2 \sigma -$$

$$- 16x\lambda_3 z^4 + 16x\lambda_1 z^5 + 2x(1 - 12z + 12z^2)z^1 \quad (2.4)$$

$$\tau' = -2(\lambda + \eta)\tau - \Omega(\Omega\alpha_3 - 2\beta_1)z + (\Omega\alpha_4 + \beta_1)\sigma + \Omega\alpha_5 - 2\beta_5)z^2 - (6\Omega\lambda_1 + \beta_5)z\sigma +$$

$$+ 2\lambda_3 z\tau - \lambda_1 \sigma^2 - \Omega(\Omega\alpha_6 - 16x\lambda_4)z^3 + 8\lambda_4 x z^2 \sigma - 8\lambda_1 z^2 \tau + 16\lambda_1(\mu_1 - \Omega x)z^4 -$$

$$- 8\lambda_1 x z^3 \sigma + 4[\Omega x - \beta_4 - (4\Omega x - \beta_6)z - x\sigma]z'$$

$$\Omega' = -\nu\Omega \quad (2.5)$$

К уравнениям (2.3), (2.4) и (2.5) нужно присоединить уравнения, определяющие скорость центра массы снаряда и абсциссу траектории его центра массы, от которых зависят величины  $\mu$ ,  $\mu_1$ ,  $x$ ,  $\lambda$ ,  $\lambda_1$ ,  $\eta$ ,  $\alpha_i$  и  $\beta_i$ :

$$v' = -g \sin \theta - \rho, \quad \theta' = -\frac{g \cos \theta}{v}, \quad y' = v \sin \theta \quad (2.6)$$

где  $\rho$  — ускорение силы лобового сопротивления, зависящее от  $v$ ,  $y$  и  $z$ .

Уравнения (2.3), (2.4), (2.5) и (2.6) представляют собой полную систему уравнений, определяющих движение вращающегося снаряда. Для выявления качественной картины движения исследуем корни полинома

$$F(z) = z(1-z)(\tau + 4\mu z - 2\mu_1 z^2) - \frac{1}{4}(\sigma + 2\Omega z)^2 =$$

$$= 2\mu_1 z^4 - 2\mu_2 z^3 - (\Omega^2 - 4\mu + \tau)z^2 + (\tau - \Omega\sigma)z - \frac{\sigma^2}{4} \quad (2.7)$$

где

$$\mu_2 = \mu_1 + 2\mu \quad (2.8)$$

Нетрудно видеть, что полином  $F(z)$  имеет четыре действительных корня, удовлетворяющих неравенствам

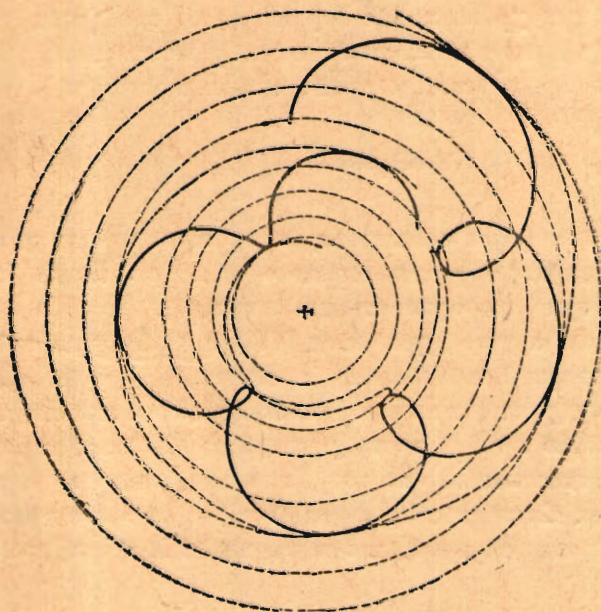
$$z_1 \leq 0 \leq z_2 \leq z_3 \leq 1 \leq z_4 \quad (2.9)$$

причем

$$F(z) > 0 \quad \text{при } z_2 < z < z_3 \quad (2.10)$$

Таким образом ось снаряда колеблется между переменными пределами, соответствующими значениям  $z = z_2$  и  $z = z_3$ .

От характера изменения величин  $z_2$  и  $z_3$  зависит правильность полета снаряда. Очевидно, что для правильного полета снаряда необходимо, чтобы величины  $z_2$  и  $z_3$  быстро убывали с возрастанием времени.



Фиг. 5

Нетрудно видеть, что в момент, когда  $z$  достигает значения  $z_i$ , производная  $z_i'$  становится равной нулю.

Рассмотрим кривые  $z = z(t)$ ,  $z = z_2(t)$  и  $z = z_3(t)$  в координатах  $(t, z)$ . Уравнение (2.3) показывает, что в момент, когда  $z = z_i$ , производная  $z'(t)$  обращается в нуль. Другими словами, в общей точке кривой  $z = z(t)$  и одной из кривых  $z = z_i(t)$  касательная к кривой  $z = z(t)$  параллельна оси  $t$ . С другой стороны,  $z(t)$  не может выйти из пределов  $z_2 < z < z_3$ , так как тогда полином  $F(z)$  станет отрицательным, а величина  $z'$  мнимой. Следовательно, кривая  $z = z(t)$  не может пересекать ни одной из кривых  $z = z_i(t)$ , а может лишь касаться их. Таким образом общая точка кривой  $z = z(t)$  и одной из кривых  $z = z_i(t)$  может быть лишь точкой касания этих кривых, что и доказывает высказанное утверждение.

Характер кривых  $z = z(t)$ ,  $z = z_2(t)$ ,  $z = z_3(t)$  показан на фиг. 4.

Характер траектории точки пересечения вектора  $Z$  с плоскостью, перпендикулярной вектору  $X$ , находящейся на постоянном расстоянии от центра массы снаряда, представлен на фиг. 5. Пунктирными линиями представлены окружности  $\delta = \text{const}$ , а прерывистыми линиями — изменение крайних значений угла  $\delta$ , соответствующих корням  $z_2$  и  $z_3$ .

Уравнение (2.3), как мы видели, удобно для качественного исследования движения. Для количественного исследования интегралов уравнений (2.3), (2.4) и (2.5) удобно заменить уравнение (2.3) уравнением второго порядка. Для вывода этого уравнения продифференцируем уравнение (2.3) по  $t$ . Тогда, пользуясь уравнениями (2.4), получим

$$z'' + (\lambda + \eta)z' + (\Omega^2 - 4\mu + \tau - \Omega\kappa + 2\beta_4)z = \frac{1}{2} [\tau - (\Omega + \kappa)\sigma] - 4\kappa\sigma z^2 + \lambda_3 z z' + \\ - [3\mu_2 - 2(\Omega\kappa + \beta_4 + \beta_0)]z^2 + 4\kappa\sigma z + 2(2\mu_1 - 2\Omega\kappa - \beta_0)z^3 - 4\lambda_1 z^2 z' \quad (2.11)$$

3. Уравнения (2.4), (2.5) и (2.11) представляют собой сложнейшую систему нелинейных уравнений с переменными коэффициентами. Для того чтобы найти подходящее приближенное выражение интеграла этих уравнений; рассмотрим простейший случай, когда величины  $\mu$  и  $\mu_1$  постоянны, а величины

$$\lambda = \lambda_1 = \kappa = \gamma = \nu = \eta = 0$$

Этот случай физически соответствует вращательному движению снаряда под действием одного опрокидывающего момента, когда его центр массы движется равномерно по горизонтальной прямой.

В этом частном случае уравнения (2.4) и (2.5) дают постоянные значения  $\sigma$ ,  $\tau$  и  $\Omega$ , которые мы обозначим соответственно через  $\sigma_0$ ,  $\tau_0$  и  $\Omega_0$ . Уравнение (2.3) интегрируется в этом случае при помощи эллиптических функций.

Действительно, в правой части уравнения (2.3) мы имеем полином четвертой степени относительно  $z$ , коэффициенты которого в рассматриваемом случае постоянны. Следовательно, общий интеграл этого уравнения является эллиптической функцией времени  $t$  и выражается формулой

$$z = \frac{z_3 - z_1 h \operatorname{sn}^2(\omega^* t + \varphi^*)}{1 - h \operatorname{sn}^2(\omega^* t + \varphi^*)} \quad (3.1)$$

где

$$h = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}; \quad \omega^{*2} = \frac{1}{2} \mu_1 (z_3 - z_1)(z_4 - z_2) \quad (3.2)$$

Модуль эллиптической функции в формуле (3.1) равен

$$K^2 = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_1} \quad (3.3)$$

Колесания оси снаряда, описываемые формулой (3.1), могут с достаточной для практики степенью точности считаться синусоидальными в том смысле, что формула (3.1) может быть заменена приближенной формулой

$$z = \frac{z_3 + z_2}{2} + \frac{z_3 - z_2}{2} \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.4)$$

где

$$\omega = \frac{\pi\omega^*}{2K}, \quad \varphi = \frac{\pi\varphi^*}{2K} \quad (3.5)$$

Для иллюстрации точности формулы (3.4) в табл. 1 приведены значения  $z$ ,

вычисленные по формулам (3.1) и (3.4) для следующих данных и начальных условий:

Таблица 1

	$\omega t + \varphi$	Значения $z$	
		по формуле (3.1)	по формуле (3.4)
$\mu = 1.55 \times 10^5$	0	0.0230	0.0230
$\mu_1 = 3.10 \times 10^5$	$\frac{\pi}{6}$ и $\frac{11\pi}{6}$	0.0250	0.0251
$\Omega_0 = 968$	$\frac{\pi}{3}$ и $\frac{5\pi}{3}$	0.0305	0.0307
$\delta_0 = 17^\circ 26'$	$\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$	0.0382	0.0384
$\delta_0' = 0$	$\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$	0.0457	0.0461
$\theta_{10} = 2 \frac{1}{\text{сек}}$	$\frac{5\pi}{6}$ и $\frac{7\pi}{6}$	0.0517	0.0517
	$\pi$	0.0539	0.0538

Из этой таблицы видно, что ошибки формулы (3.4) в рассматриваемом примере не превосходят 1%, что вполне достаточно для практики. Такая же картина получится при любых начальных условиях, практически встречающихся в рассматриваемой задаче.

Сопоставляя этот результат с тем фактом, что в общем случае величины  $\lambda, \lambda_1, x, \gamma, \nu$  и  $\eta$  оказывают лишь второстепенное влияние на характер колебаний оси снаряда, приходим к мысли, что и в общем случае колебания оси снаряда можно приближенно считать синусоидальными, только амплитуда и частота колебаний будут функциями времени, а не постоянными.

Таким образом есть основание предполагать, что в общем случае величина  $z$  может быть приближенно представлена в виде

$$z = Z_0 + Z_1 \cos \psi \tag{3.6}$$

где

$$\psi = \int_{t_0}^t \omega dt \tag{3.7}$$

а  $Z_0, Z_1$  и  $\omega$  — некоторые плавно меняющиеся функции времени.

Что касается величин  $\sigma$  и  $\tau$ , то нетрудно видеть, что их колебания мало отражаются на величине  $z$ . Именно, можно легко доказать, что амплитуды колебаний корней  $z_2$  и  $z_3$  полинома  $F(z)$  являются величинами порядка  $\Omega^{-1}$  по сравнению с амплитудой колебаний величины  $z$ .

Принимая во внимание, что  $\Omega$  очень велико (практически не меньше 800—1000), заключаем, что без ущерба для точности можно пренебречь колебаниями величин  $\sigma$  и  $\tau$ .

Подставим выражение (3.6) в уравнения (2.11) и (2.4) и представим правые и левые части этих уравнений в виде рядов Фурье. Тогда, пренебрегая в уравнении (2.11) гармониками второго и высших порядков, а в уравнениях (2.4) всеми колеблющимися членами, получим следующие уравнения для

определения неизвестных  $Z_0, Z_1, \omega, \sigma$  и  $\tau$

$$\begin{aligned}
 Z_0'' + (\lambda + \eta) Z_0' + (\Omega^2 - 4\mu - \Omega\kappa + 2\beta_4) Z_0 &= \frac{1}{2}[\tau - (\Omega + \kappa)\sigma] + 4\kappa Z_0\sigma - Z_0\tau - \\
 &- [3\mu_2 - 2(\Omega\kappa + \beta_4 + \beta_6)](Z_0^2 + \frac{1}{2}Z_1^2) + 2(2\mu_1 - 2\Omega\kappa - \beta_6)(Z_0^2 + \frac{3}{2}Z_1^2)Z_0 - \\
 &- 4\kappa(Z_0^2 + \frac{1}{2}Z_1^2)\sigma + \lambda_3(Z_0Z_0' + \frac{1}{2}Z_1Z_1') - 4\lambda_1[(Z_0^2 + \frac{1}{2}Z_1^2)Z_0' + Z_0Z_1Z_1'] \\
 Z_1'' + (\lambda + \eta) Z_1' + (\Omega^2 - 4\mu - \omega^2 - \Omega\kappa + \beta_4)Z_1 &= -2[3\mu_2 - 2(\Omega\kappa + \beta_4 + \beta_6)]Z_0Z_1 + \\
 &+ 4\kappa Z_1\sigma - Z_1\tau + 6(2\mu_1 - 2\Omega\kappa - \beta_6)(Z_0^2 + \frac{1}{4}Z_1^2)Z_1 - 4\kappa Z_0Z_1\sigma + \lambda_3(Z_0Z_1' + Z_0'Z_1) - \\
 &- 4\lambda_1[2Z_0Z_0'Z_1 + (Z_0^2 + \frac{3}{4}Z_1^2)Z_1'] \\
 2\omega Z_1' - \omega' Z_1 - (\lambda + \eta)\omega Z_1 &= -\lambda_3\omega Z_0Z_1 + 4\omega\lambda_1Z_1(Z_0^2 + \frac{1}{2}Z_1^2) \\
 \sigma' &= -(\lambda + \eta)\sigma + (\Omega\alpha_1 + 2\beta_1)Z_0 - (\Omega\alpha_2 + \beta_2)(Z_0^2 + \frac{1}{2}Z_1^2) + \lambda_2Z_0\sigma + \\
 &+ \beta_3Z_0(Z_0^2 + \frac{3}{2}Z_1^2) - 2\lambda_1(Z_0^2 + \frac{3}{2}Z_1^2)\sigma + 2\kappa Z_0' - 24\kappa(Z_0Z_0' + \frac{1}{2}Z_1Z_1') + \\
 &+ 24\kappa[(Z_0^2 + \frac{1}{2}Z_1^2)Z_0' + Z_0Z_1Z_1'] \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau' &= -2(\lambda + \eta)\tau - \Omega(\Omega\alpha_3 - 2\beta_1)Z_0 + (\Omega\alpha_4 + \beta_1)\sigma + \Omega(\Omega\alpha_5 - 2\beta_5)(Z_0^2 + \frac{1}{2}Z_1^2) \\
 &- (6\Omega\lambda_1 + \beta_6)Z_0\sigma + 2\lambda_3Z_0\tau - \lambda_1\sigma^2 - \Omega(\Omega\alpha_6 - 16\kappa\lambda_4)(Z_0^2 + \frac{3}{2}Z_1^2)Z_0 + \\
 &+ 8(\kappa\lambda_4\sigma - \lambda_1\tau)(Z_0^2 + \frac{1}{2}Z_1^2) + 16\lambda_1(\mu_1 - \Omega\kappa)(Z_0^4 + 3Z_0^2Z_1^2 + \frac{3}{2}Z_1^4) - \\
 &- 8\kappa\lambda_1(Z_0^2 + \frac{3}{2}Z_1^2)Z_0\sigma + 4(\Omega\kappa - \beta_4)Z_0' - 4(4\Omega\kappa - \beta_6)(Z_0Z_0' + \frac{1}{2}Z_1Z_1') - 4\kappa Z_0'\sigma
 \end{aligned}$$

Эти уравнения по виду много сложнее исходных уравнений (2.4) и (2.11). Однако нам необходимо найти лишь неколеблущиеся интегралы этих уравнений, что значительно облегчает задачу в силу того, что некоторые члены этих уравнений для неколеблущегося интеграла оказываются малыми.

Пренебрежем в первом и последующих двух уравнениях (3.8) величинами порядка  $Z_1^2$  и  $Z_1Z_1'$  по сравнению соответственно с  $Z_0^2$  и  $Z_0Z_0'$ .

Принимая во внимание, что  $\mu, \mu_1$  и  $\mu_2$  являются большими величинами порядка  $\Omega^2$ , положим

$$\mu = \Omega^2 n, \quad \mu_1 = \Omega^2 n_1, \quad \mu_2 = \Omega^2 n_2, \quad \Omega = \Omega_0 f \quad (3.9)$$

где  $\Omega_0$  — начальное значение величины  $\Omega$ . Этим мы вводим в уравнения (3.8) большой параметр  $\Omega_0$ .

Будем искать решение первого и двух последующих уравнений (3.8) в виде рядов<sup>1</sup>, расположенных по убывающим степеням параметра  $\Omega_0$ .

$$z_0 = z_0^{(0)} + \frac{z_0^{(1)}}{\Omega_0} + \dots, \quad \sigma = \Omega_0 \sigma^{(0)} + \sigma^{(1)} + \dots, \quad \tau = \Omega_0^2 \tau^0 + \Omega_0 \tau^{(1)} + \dots \quad (3.10)$$

Коэффициенты этих рядов определяются формальной подстановкой их в уравнения и сравнением коэффициентов при одинаковых степенях  $\Omega_0$ . Имея в виду, что  $\Omega_0$  очень велико (обычно не меньше 800—1000), ограничимся в рядах (3.10) первыми членами. Это равносильно замене первого и двух последних уравнений (3.8) уравнениями

$$\begin{aligned}
 4\mu_1 Z_1^3 - 3\mu_2 Z_0^2 - (\Omega^2 - 4\mu + \tau) Z_0 + \frac{1}{2}(\tau - \Omega\sigma) &= 0 \\
 \sigma' &= -(\lambda + \eta - \lambda_2 Z_0 + 2\lambda_1 Z_0^2)\sigma + \Omega\alpha_1 Z_0 - \Omega\alpha_2 Z_0^2 \\
 \tau' &= -2(\lambda + \eta - \lambda_3 Z_0 + 4\lambda_1 Z_0^2)\tau - \Omega^2\alpha_3 Z_0 + \Omega\alpha_4\sigma + \\
 &+ \Omega^2\alpha_4 Z_0^2 - 6\Omega\lambda_1 Z_0\sigma - \lambda_1\sigma^2 - \Omega^2\alpha_6 Z_0^3 + 16\kappa\lambda_1 Z_0^4
 \end{aligned} \quad (3.11)$$

К этим уравнениям следует добавить уравнение (2.5), определяющее величину

<sup>1</sup> Можно показать, что эти ряды являются асимптотическими разложениями интегралов для больших значений  $\Omega_0$ .



чину  $\Omega$ , и уравнения (2.6), определяющие величины  $v$  и  $y$ , от которых зависят коэффициенты  $\mu$ ,  $\mu_1$ ,  $\lambda$ ,  $\lambda_1$  и  $\alpha_i$ . При этом для упрощения задачи заметим в выражении ускорения силы лобового сопротивления  $\rho$  величину  $z$  ее средним значением  $Z_0$ . Этим самым учтем влияние отклонения оси снаряда от вектора скорости его центра массы на траекторию его центра массы в среднем и пренебрежем колебательными изменениями величин  $v$ ,  $\theta$  и  $y$ .

Тогда уравнения (3.11), (2.5) и (2.6) будут представлять собой полную систему уравнений, определяющую неизвестные  $Z_0$ ,  $\sigma$ ,  $\tau$ ,  $\Omega$ ,  $v$ ,  $\theta$  и  $y$ . Эти уравнения легко могут быть проинтегрированы численными методами, так как они имеют лишь плавно меняющиеся (неколеблющиеся) интегралы.

Переходим к интегрированию второго и третьего уравнений (3.8).

Третье уравнение (3.8) может быть представлено в виде

$$Z_1' + \frac{1}{2} \left( \frac{\omega'}{\omega} + \lambda + \eta - \lambda_3 Z_0 + 4\lambda_1 Z_0^2 \right) Z_1 = -\lambda_1 Z_1^3 \quad (3.12)$$

Пренебрегая в этом уравнении малым членом  $\lambda_1 Z_1^3$  и вводя обозначение

$$\chi = \frac{1}{2} \left( \frac{\omega'}{\omega} + \lambda + \eta - \lambda_3 Z_0 + 4\lambda_1 Z_0^2 \right) \quad (3.13)$$

можем представить его в виде

$$Z_1' = -\chi Z_1 \quad (3.14)$$

Откуда

$$Z_1'' = (\chi^2 - \chi^1) Z_1 \quad (3.15)$$

Подставляя выражения (3.14) и (3.15) во второе уравнение (3.8), сокращая его на  $Z_1$  и пренебрегая величинами порядка  $Z_1^2$  по сравнению с  $Z_0^2$ , получим

$$\begin{aligned} \chi' - \chi^2 + (\lambda + \eta)\chi + \omega^2 - \Omega^2 + 4\mu + \Omega\chi - 2\beta_4 = 6\mu_2 Z_0 - 4(\Omega\chi + \beta_4 + \beta_5) - \\ - Z_0 - 4\chi\sigma + \tau - 6(2\mu_1 - 2\Omega\chi - \beta_5) Z_0^2 + 4\chi Z_0\sigma - \lambda_3 (Z_0' - \chi Z_0) + \\ + 4\lambda_1 Z_0 (2Z_0' - \chi Z_0) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Заменим в этом уравнении и в формуле (3.13)  $\mu$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\Omega$ ,  $Z_0$ ,  $\sigma$  и  $\tau$  их выражениями (3.9) и (3.10). Тогда можем найти решение уравнения (3.16) в виде ряда, расположенного по убывающим степеням  $\Omega_0$

$$\omega = \Omega_0 \omega^{(0)} + \omega^{(1)} + \dots \quad (3.17)$$

Коэффициенты этого ряда находятся формальной подстановкой этого ряда в формулу (3.13) и уравнение (3.16) и сравнением коэффициентов при одинаковых степенях  $\Omega_0$ .

Ограничиваясь первым членом ряда (3.17), получим

$$\omega = \sqrt{\Omega^2 - 4\mu + 6\mu_2 Z_0 - 12\mu_2 Z_0^2 + \tau} \quad (3.18)$$

После этого уравнение (3.14) дает

$$Z_1 = A \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t (\lambda + \eta - \lambda_3 Z_0 + 4\lambda_1 Z_0^2) dt \right\} \quad (3.19)$$

Таким образом решение поставленной задачи приведено к численному интегрированию системы уравнений (2.5), (2.6), (3.11) и вычислению  $\omega$  и  $Z_1$  по формулам (3.18) и (3.19).

При интегрировании уравнений (2.5), (2.6) и (3.11) приходится решать кубическое уравнение. Поэтому, естественно, возникает вопрос о том, какой корень этого уравнения будет удовлетворять условиям рассматриваемой механической задачи. Для решения этого вопроса заметим, что первое уравнение

(3.11) может быть написано при помощи обозначения (2.7) в виде

$$\frac{1}{2} \frac{dF(Z_0)}{dZ_0} = 0 \quad (3.20)$$

Отсюда на основании известной теоремы алгебры заключаем, что в пределах  $z_2 < z < z_3$  лежит один и только один корень первого уравнения (3.11), который и следует брать при интегрировании уравнений (2.5) (2.6) и (3.11).

Заметим еще, что формула (3.18) может быть написана в виде

$$\omega = \sqrt{-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(Z_0)}{\partial Z_0^2}} \quad (3.21)$$

Так как производная под радикалом всегда отрицательна при  $z = Z_0$ , то формула (3.21) или, что то же, (3.18), всегда дает действительное значение  $\omega$ , даже в случае неустойчивости малых колебаний, когда  $\Omega^2 < 4\mu$ .

Для полного решения задачи о движении вращающегося снаряда на участке траектории, имеющем малую кривизну, остается найти скорость прецессии  $\theta_1$ . При помощи формул (2.1) находим из уравнения (1.12)

$$\theta_1 = \frac{\sigma + 2\Omega z}{4z(1-z)} \quad (4.22)$$

Заменяя здесь  $z$  его значением из формулы (3.6), разлагая полученное выражение в ряд Фурье и ограничиваясь первой гармоникой, получим

$$\theta_1 = \Theta_0 + \Theta_1 \cos \psi \quad (3.23)$$

где

$$\begin{aligned} \Theta_0 &= \frac{\Omega}{2\sqrt{(1-Z_0)^2 - Z_1^2}} + \frac{\sigma}{4} \left\{ \frac{1}{\sqrt{Z_0^2 - T_1^2}} + \frac{1}{\sqrt{(1-Z_0)^2 - Z_1^2}} \right\} \\ \Theta_1 &= -\frac{\Omega}{Z_1} \left\{ 1 - \frac{1-Z_0}{\sqrt{(1-Z_0)^2 - Z_1^2}} \right\} - \frac{\sigma}{2Z} \left\{ \frac{Z_0}{\sqrt{Z_0^2 - Z_1^2}} - \frac{1-Z_0}{\sqrt{(1-Z_0)^2 - Z_1^2}} \right\} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Описанный путь приближенного решения нелинейных уравнений вращательного движения снаряда на участке траектории, имеющем малую кривизну, приводит к решению, содержащему две постоянных, оставшихся неопределенными, — величину  $A$ , которая является начальным значением амплитуды колебаний величины  $z$ , и начальную фазу колебаний  $\varphi$ . Эти постоянные можно, конечно, определить через начальные значения величин  $z$  и  $z'$ .

Однако в данном случае нахождение этих постоянных можно значительно упростить, если вспомнить результаты качественного исследования движения, произведенного в п<sup>о</sup>2.

Мы нашли, что изменение величины  $z$  имеет характер колебаний между переменными пределами  $z_2$  и  $z_3$ . Отсюда следует, что начальное значение амплитуды колебаний  $z$  равно начальному значению величины  $\frac{1}{2}(z_3 - z_2)$ .

Таким образом, отмечая нуликом начальные значения, будем иметь

$$A = \frac{1}{2}(z_{30} - z_{20}) \quad (3.25)$$

где  $z_{20}$  и  $z_{30}$  — корни уравнения

$$2\mu_{10}z^4 - 2\mu_{20}z^3 - (\Omega_0^2 - 4\mu_0 + \tau_0)z^2 + (\tau_0 - \Omega_0\sigma_0)z - \frac{1}{4}\sigma_0^2 = 0, \quad (3.26)$$

лежащие между нулем и единицей.

Что касается начальной фазы колебаний  $\varphi$ , то она обычно не интересует нас. Однако, определив  $A$ , ее можно очень просто найти, положив в формуле (3.6)  $t = t_0$  и принимая во внимание, что при этом  $z = z_0$ .

Для того чтобы получить некоторое представление о точности изложенного метода, в табл. 2 приведены значения  $Z_0$  и  $\omega$  для примера, разобранного в начале этого  $n^\circ$ , вычисленные изложенным методом, и значения  $Z_0$  и  $\omega$ , вычисленные по точным формулам (3.2) и (3.5).

Таблица 2

$\omega$			$Z_0 = \frac{1}{2}(z_3 + z_2)$		
точный метод	прибл. метод	относит. ошибка (в проц.)	точный метод	прибл. метод	относит. ошибка (в Проц.)
664	666	0.3	0.0384	0.0392	2

Эти цифры дают основание считать, что развитый в настоящей статье метод дает вполне удовлетворительную точность.

Нам остается сказать о вычислении дериивации. Дериивация порождается отклонением центра колебаний оси снаряда от вектора скорости его центра массы, величина которого в свою очередь определяется кривизной траектории.

Поскольку мы рассматриваем участок траектории, имеющий малую кривизну, отклонение центра колебаний оси снаряда от вектора скорости его центра массы очень мало и поэтому может быть найдено при помощи линейной теории, изложенной в цитированных работах автора [1,2]. Следовательно, и дериивация может быть в рассматриваемом случае вычислена при помощи линейной теории.

Поступила в редакцию  
30 IV 1942

## APPROXIMATE METHOD OF SOLVING THE NON-LINEAR PROBLEM FOR THE MOTION OF A ROTATING PROJECTILE

V. S. PUGACHEV

(Summary)

The author deals with an approximate procedure of integration of non-linear equations for rotating motion of a projectile along a segment of its trajectory having a small curvature.

The relationship of the lateral force and the turning moment on the angle  $\delta$  between the axis of the projectile and the vector of its centre of mass, when  $0 \leq \delta \leq 40^\circ$ , may be approximately stated by  $a \sin \delta + b \sin 2\delta$ , where  $a$  and  $b$  are independent of  $\delta$ .

Due to the small curvature of the trajectory, the influence on the projectile's motion of the force and moment Magnus, and other moments is of secondary importance. The author may therefore assume that the force

and moment Magnus are proportional to  $\sin \delta$ , and all other moments are independent of the angle  $\delta$ .

Then, neglecting in first approximation the action of gravity, the author reduces the system of projectile motion equations to the form (3.8), (2.5) and (2.6), where  $z = \sin^2 \frac{1}{2} \delta$ , the values  $\sigma$  and  $\tau$  are auxiliary unknown;  $\alpha_i, \beta_i, \lambda, \lambda_i, \mu, \mu_i, \nu$  and  $\eta$  are functions of the velocity of the gravity centre and the ordinate  $y$  of the trajectory (characterizing the action of the aerodynamic forces);  $\Omega$  is the value proportional to the projection of the vector of the angular velocity of the projectile on its axis,  $\theta$  is the angle between the vector of the velocity of the gravity centre and the horizon,  $\rho$  is the acceleration of the drag forces. The values  $\Omega, \theta, \rho$  are dependent upon  $v, y$  and  $\delta$ . The oscillations  $z$  are approximately sinusoidal as the author concludes from expressions (3.6), (3.7), where  $Z_0, Z_1$  and  $\omega$  are non-oscillating functions of time  $t$ .

Then, consecutively, substituting (3.6) into (3.8), expanding both sides of the equations obtained into Fourié series and equating the coefficients of the same harmonics, the author obtains the equations for the determination of  $Z_0, Z_1, \omega, \sigma, \tau, \Omega, \nu, \theta$  and  $y$ .

In calculating the non-oscillating integral of these equations it must be taken into account that the value  $\Omega$  is very large in comparison with  $\alpha_i, \rho_i, \lambda, \lambda_i, \nu, \eta$  and the values  $\mu, \mu_1, \mu_2$  are of the order  $\Omega^2$ .

Assuming that  $Z_1$  is small in comparison with  $Z_0$ , taking only the terms of equations of the higher order in relation to  $\Omega$ , and substituting the value  $z$  in the expression for the acceleration of drag force  $\rho$  by its average magnitude  $Z_0$ , the author obtains the equations (3.11), (2.5) and (2.6) for determining  $Z_0, \sigma, \tau, \Omega, \nu, \theta$  and  $y$ .

These equations do not contain oscillating integrals and may easily be integrated by numerical methods.

After integration of equations (3.11), (2.5) and (2.6), the values  $\omega$  and  $Z_1$  may be calculated by formulae (3.18) and (3.19), where  $A$  is given by (3.25), and  $z_{20}, z_{30}$  are the roots of the equation (3.26) which are within the range of 0 and 1.

The calculation for the particular case, when  $\alpha_i, \beta_i, \lambda, \lambda_i, \nu, \eta$  are equal to zero and the values  $\Omega, \mu, \mu_i$  are constants, and the comparison of the results with those obtained by means of the exact solution which exist for the same case in terms of an elliptic function, show the validity of the given procedure described above since the errors for all cases in practice do not exceed 2%.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Пугачев В. С. Прикладная математика и механика. 1942. Т. VI. № 5.
2. Пугачев В. С. Труды ВВА: 1940. № 70.
3. Fowler R. H., Gallop E. G., Lock C. N. H. a. Richmond H. W. Phil. Trans, R. Soc. Lond. 1920. Series A. 221.