

## ИЗГИБ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛИТЫ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Г. С. ШАПИРО

(Москва)

Решением задачи о плите на упругом основании (в смысле Винклера-Циммермана) впервые занимался Герц [1], давший решение для бесконечной плиты под действием сосредоточенной силы. Впоследствии Динник [2] и Шлейхер [3] развили решение Герца, рассмотрев задачу о круглой плите, симметрично нагруженной.

Вестергаард [4], применив метод М. Леви, дал решение для бесконечной плиты, нагруженной одним рядом сосредоточенных сил. Используя способ Вестергаарда, Н. М. Герсеванов и его сотрудники по Институту оснований и фундаментов (ВИОС) — В. И. Руднев, В. Д. Кузьмина, А. В. Винокурова и О. Я. Шехтер [5,6] — рассмотрели плиту неограниченную, ограниченную одной прямой и двумя параллельными прямыми и нагруженную периодически силой в виде одного ряда или по прямоугольной сетке.

Автором этой статьи тем же способом Вестергаарда-Герсеванова, но не в рядах, а в интегралах Фурье, была рассмотрена задача о плите в виде бесконечной ленты под действием одной силы, приложенной в любой точке. Здесь используются результаты опубликованной работы [7], причем рассматриваются случаи приложения нагрузки в виде силы:

- а) сосредоточенной на краю,
- б) равномерно распределенной на участке края и
- в) равномерно распределенной на участке, пересекающем край ему перпендикулярно.

Исходным служит решение для плиты, ограниченной одной прямой (полубесконечной плиты) и нагруженной силой, приложенной в любой точке.

Располагаем ось  $x$  вдоль, а ось  $y$  перпендикулярно краю. Сила приложена в точке  $(0, c)$ . Дифференциальное уравнение изгиба плиты, как известно, будет

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{k}{D} w = \frac{p}{D} \quad (1)$$

где  $p$  — нагрузка на плиту,  $k$  — коэффициент постели основания,  $D = \frac{Eh}{12(1-\sigma^2)}$  — цилиндрическая жесткость плиты.

Граничные условия:

при  $y=0$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\sigma) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0 \quad (2)$$

при  $x$  и  $y \rightarrow \infty$

$$w \rightarrow 0 \quad (3)$$

Вводим переменные

$$\xi = \lambda x, \quad \eta = \lambda y, \quad \text{где} \quad \lambda = \sqrt[4]{\frac{k}{D}}$$

Решение уравнения (1) при условиях (2), (3) будет [6, 7]

$$w = \frac{P}{\pi \sqrt{kD}} \int_0^{\infty} \left\{ A [Y_1 - (1-\sigma) \varphi^2 Y_3] + B [\beta (\varepsilon^2 - \sigma \varphi^2) Y_2 + \gamma (\varepsilon^2 + \sigma \varphi^2) Y_4] + \frac{1}{\varepsilon^2} \Gamma_0 [\beta Y_3 (\eta - \delta) - \gamma Y_4 (\eta - \delta)] \right\} \cos \varphi \xi d\varphi \quad (4)$$

Здесь

$$Y_1 = \text{ch } \beta \eta \cos \gamma \eta, \quad Y_2 = \text{ch } \beta \eta \sin \gamma \eta, \quad Y_3 = \text{sh } \beta \eta \sin \gamma \eta, \quad Y_4 = \text{sh } \beta \eta \cos \gamma \eta$$

$$A = \frac{e^{-\beta \delta}}{N \varepsilon^2} [(1-\sigma) \varphi^2 \sin \gamma \delta + \cos \gamma \delta], \quad B = \frac{e^{-\beta \delta}}{N \varepsilon^2} [\beta (\varepsilon^2 - \sigma \varphi^2) \sin \gamma \delta - \gamma (\varepsilon^2 + \delta \varphi^2) \cos \gamma \delta]$$

$$N = \gamma [-\sigma^2 \varphi^4 - 2\sigma \varphi^2 \varepsilon^2 + \varepsilon^2 (\varepsilon^2 + 2\varphi^2)]$$

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{\varepsilon^2 + \varphi^2}{2}}, \quad \gamma = \sqrt[4]{\frac{\varepsilon^2 - \varphi^2}{2}}, \quad \varepsilon^2 = \sqrt{4 + \varphi^4}, \quad \delta = \lambda c$$

причем через  $\Gamma_0$  обозначен «односторонний прерыватель» Н. М. Герсеванова [5],  $\Gamma_0 = 0$  при  $\eta < \delta$  и  $\Gamma_0 = 1$  при  $\eta > \delta$ .

Формула (4) приводится в работе автора [7]. Аналогичный результат для случая периодической нагрузки плиты, выраженный через ряды Фурье, был получен О. Я. Шехтер и А. В. Винокуровой [6].

Интеграл (4) сходится при любых  $\xi, \eta$ . Однако для значений  $\eta \geq \delta$  используем другое выражение для  $w$ , которое получается тем же путем, что и (4), но если начало координат взять в точке приложения силы. Это выражение имеет вид

$$w = \frac{P}{\pi \sqrt{kD}} \int_0^{\infty} [A_1 \cos \gamma \eta + B_1 \sin \gamma \eta] e^{-\beta \eta} \cos \varphi \xi d\varphi$$

причем

$$A_1 = \frac{1}{2\varepsilon^2 N} \left\{ \gamma N + e^{-2\delta \beta} \left[ S \left( \beta^2 \cos 2\gamma \delta - \frac{1}{2} \sin 2\gamma \delta \right) + \varepsilon^2 T \right] \right\}$$

$$B_1 = \frac{1}{2\varepsilon^2 N} \left\{ \frac{N}{2\gamma} - e^{-2\delta \beta} S \left[ \frac{1}{2} \cos 2\gamma \delta + \beta^2 \sin 2\gamma \delta \right] \right\}$$

$$S = -\sigma^2 \varphi^4 - 2\sigma \varphi^2 \varepsilon^2 - \varepsilon^2 (2\varphi^2 - \varepsilon^2), \quad T = \sigma^2 \varphi^4 - 2\sigma \varphi^2 + \varepsilon^4$$

Интеграл (5) сходится при условии  $\eta \geq 0$ .

Пологая в (5)  $\delta = \infty$ , получим решение для бесконечной пластинки под действием сосредоточенной силы в виде

$$w = \frac{P}{2\pi \sqrt{kD}} \int_0^{\infty} \left( \gamma^2 \cos \gamma \eta + \frac{1}{2} \sin \gamma \eta \right) \frac{e^{-\beta \eta}}{\gamma \varepsilon^2} \cos \varphi \xi d\varphi \quad (6)$$

При  $\xi = \eta = 0$ , т. е. в точке приложения силы,

$$w = \frac{P}{2\pi \sqrt{kD}} \int_0^{\infty} \frac{\gamma}{\varepsilon^2} d\varphi = \frac{P}{8 \sqrt{kD}} \quad (7)$$

Этот результат иным путем был получен Герцем.

Положив в (5)  $\delta = 0$ , приходим к случаю силы, приложенной на краю. Для точки приложения силы

$$w(0, 0) = 0.4785 \frac{P}{\sqrt{kD}} \quad (8)$$

Отношение прогиба (8) в точке приложения силы для полубесконечной плиты к соответствующему прогибу (7) для плиты бесконечной равно 3.83. Легко убедиться, что аналогичное отношение для балки на упругом основании равно 4.

При вычислении несобственных интегралов для значений  $\varphi \geq 5$  принималось

$$\sigma^2 \sim \varphi^2, \quad \beta \sim \varphi, \quad \gamma \sim \frac{1}{2\varphi}$$

При этом интегралы в пределах от 0 до 5 удавалось выразить через табулированные функции, а интегралы в пределах от 5 до  $\infty$  вычислялись по правилу Симпсона.

Переходим к рассмотрению частных случаев, причем будем пользоваться решением (5)

### а. Сосредоточенная сила на краю

На краю  $\eta = 0$

$$w = \frac{P}{\pi \sqrt{kD}} \left\{ \int_0^5 \frac{\cos \xi \varphi}{N} d\varphi + \frac{1}{2.15} \left[ \frac{\cos 5\xi}{5} - \xi \frac{\sin 5\xi}{5} + \xi^2 \text{ci} 5\xi \right] \right\} \quad (9)$$

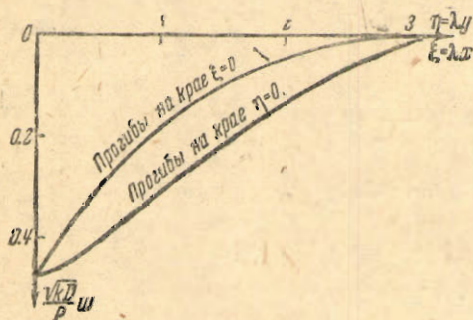
На линии  $\xi = 0$

$$w = \frac{P}{\pi \sqrt{kD}} \left\{ \int_0^5 [\cos \gamma \bar{\eta} + (1-\sigma) \varphi^2 \sin \gamma \bar{\eta}] \frac{e^{-5\eta}}{N} d\varphi + \frac{e^{-5\eta}}{5} + \eta \text{Ei} [-5\eta] \right\} \quad (10)$$

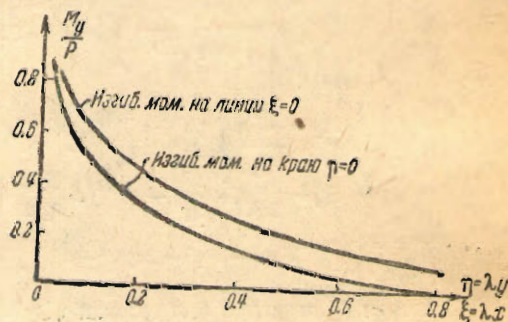
В формулах (9) и (10)

$$\text{ci} \xi = - \int_{\xi}^{\infty} \frac{\cos u}{u} du, \quad \text{Ei} [-\eta] = - \int_{\eta}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$$

Результаты вычислений по этим формулам представлены на фиг. 1, где приведены прогибы на краю  $\eta=0$  в зависимости от  $\xi=\lambda x$  и на краю  $\xi=0$  в зависимости от  $\eta=\lambda y$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

Фиг. 1 дает одновременно и величины давлений  $q = k w$ , где  $q$  — реакция упругого основания.

Изгибающий момент  $M_y$  в любой точке

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} (C_1 \cos \gamma \eta + D_1 \sin \gamma \eta) e^{-\beta \eta} \cos \xi \varphi d\varphi$$

где

$$C_1 = A_1 (1-\sigma) \varphi^2 + \sigma B_1, \quad D_1 = B_1 (1-\sigma) \varphi^2 - \sigma B_1$$

При  $\eta = 0$

$$M_y = \frac{(1-\sigma^2) P}{\pi} \left[ \int_0^5 \frac{\varphi^2 \cos \varphi^2}{N} d\varphi - \frac{2}{2.15} \text{ci} 5\xi \right] \quad (11)$$

При  $\xi = 0$

$$M_y = \frac{P}{\pi} \left\{ \int_0^{\infty} \left[ (1-\sigma^2) \varphi^2 \cos \gamma \eta + [(1-\sigma^2) \varphi^2 - \sigma] \sin \gamma \eta \right] \frac{e^{-\beta \eta}}{N} d\varphi - 0.809 \text{Ei} [-5\eta] + \frac{0.191}{e^{5\eta}} \right\} \quad (12)$$

На фиг. 2 даны значения изгибающих моментов  $M_y$  на краю  $\eta=0$  и на линии  $\xi=0$ .

б. Распределенная нагрузка на участке края

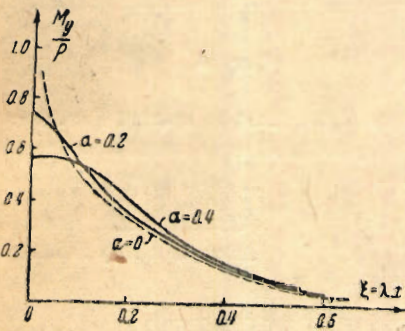
Равномерно распределенная нагрузка приложена на участке края. Обозначим через  $\alpha = \lambda a$ .

Решение получается из (9)–(12) путем замены  $P \cos \xi \varphi$  на  $p \cos (\xi - \zeta) \varphi$  и последующей интеграции по  $\zeta$  от  $-\frac{\alpha}{2}$  до  $\frac{\alpha}{2}$ :

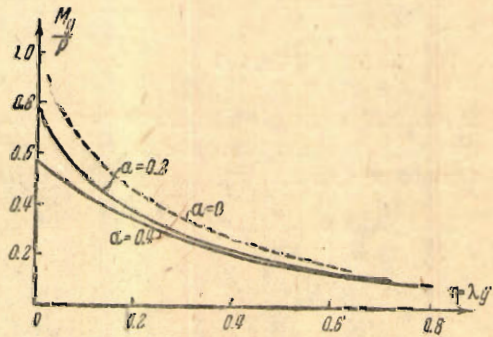
На линии  $\eta = 0$

$$M_y = \frac{2(1-\sigma^2)P}{\pi} \left\{ \int_0^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\varphi^2 \sin \frac{\alpha \varphi}{2}}{\alpha \varphi} \cos \varphi \xi d\varphi + \right. \\ \left. + \frac{2}{2.15\alpha} \left[ \frac{\sin 2.5\alpha \cos 5\xi}{5} - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\alpha}{2} - \xi \right) \text{ci } 5 \left| \frac{\alpha}{2} - \xi \right| + \left( \frac{\alpha}{2} + \xi \right) \text{ci } 5 \left( \frac{\alpha}{2} + \xi \right) \right] \right] \right\} \quad (13)$$

Изгибающие моменты  $M_y$  по краю  $\eta = 0$  для этого случая нагрузки при  $\alpha = 0.2$  и  $\alpha = 0.4$



Фиг. 3



Фиг. 4

даны на фиг. 3, где пунктирная линия отвечает  $\alpha = 0$  (сосредоточенная сила).

На линии  $\xi = 0$

$$M_y = \frac{2P}{\pi} \left\{ \int_0^{\frac{\alpha}{2}} \left\{ (1-\sigma^2)\varphi^2 \cos \gamma \eta + [(1-\sigma^2)\varphi^4 - \sigma] \sin \gamma \eta \right\} \frac{e^{-\beta \eta} \sin \frac{\alpha \varphi}{2}}{N} \frac{d\varphi}{\alpha \varphi} + \right. \\ \left. + \frac{2}{2.15\alpha} \left[ \int_0^{\infty} \left( \frac{0.87}{\varphi^2} + \frac{0.2096}{\varphi} \eta \right) e^{-\varphi \eta} \sin \frac{\alpha \varphi}{2} d\varphi \right] \right\} \quad (14)$$

Результаты вычислений по (14) для  $\alpha = 0.2$  и  $\alpha = 0.4$  приведены на фиг. 4 (пунктир отвечает  $\alpha = 0$ ).

При  $\xi = \eta = 0$

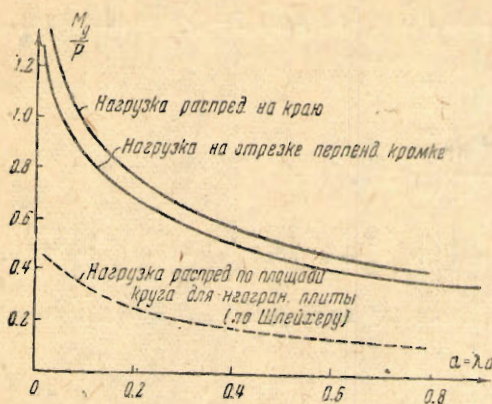
$$M_y = \frac{2(1-\sigma^2)P}{\pi \sqrt{kD} \alpha} \left\{ \int_0^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\varphi}{N} \sin \frac{\alpha \varphi}{2} d\varphi + \frac{2}{2.15} \left( \sin \frac{5\alpha}{5} - \alpha \text{ci } 5\alpha \right) \right\} \quad (15)$$

Зависимость  $M_y(0,0)$  от  $\alpha$  приведена на фиг. 5.

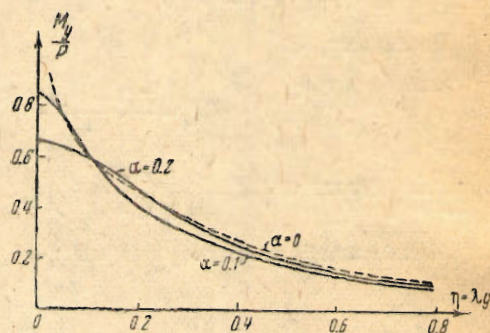
в. Распределенная нагрузка на участке, пересекающем край ему перпендикулярно

Не приводя соответствующих формул, довольно громоздких, приводим на фиг. 6 кривые, построенные в результате вычислений  $M_y$  при  $\xi = 0$  (фиг. 8) и на фиг. 5 кривую, отвечающую  $\xi = 0, \eta = 0$ , для разных значений  $\alpha$ . На последней фигуре пунктиром нанесена кривая  $\xi M_y$ , построенная по данным Герда-Шлейхера для бесконечной плиты при нагрузке, распределенной по кругу радиуса  $a$ .

Характер расположения нагрузки относительно края, как показывает сопоставление соответствующих кривых на фиг. 3, 4, 5, и 6, оказывается несущественным. Максимальные напряжения в обоих случаях расположения нагрузки мало друг от друга отличаются



Фиг. 5



Фиг. 6

и сравнительно медленно падают по мере удаления от края. Так, из кривой фиг. 6 видно, что при расположении нагрузки перпендикулярно к краю отношение изгибающих моментов в конце и в начале отрезка ( $y$  края) равно 0.7.

Поступила в редакцию  
45 XII 1942.

Институт механики  
Академии Наук СССР

## THE BENDING OF SEMI-INFINITE PLATE RESTED ON THE ELASTIC FOUNDATION

G. S. SHAPIRO

(Summary)

The author gives the results of computations:

- for the plate loaded by a concentrated force on the edge [formulae (9), (10), fig. 4, 2];
- for a uniformly distributed load within a range of the edge [formulae (13), (14) and fig. 3, 4, 5];
- for a uniformly distributed load along a range of a straight perpendicular to the edge of the plate (fig. 5, 6).

The procedure for solving, and the starting equation (1) with the boundary conditions (2), (3) are taken for granted after Westergaard<sup>[4]</sup> and Gersevanov<sup>[5,6]</sup> but the solution as in the previous note of the author<sup>[7]</sup> obtained in the Fourier integrals.

### ЛИТЕРАТУРА

- Hertz, Wied. Ann. 1884. 22.
- Динник А: Труды Новочеркасского политехнического института. 1913.
- Schleicher F. Kreisplatten auf elastische Unterlage. 1926.
- Westergaard H. Ingeniören. 1923; B. 32; N 42.
- Сборник ВАОС. 1932 и 1934: №№ 1 и 2.
- Шехтер О. Я. и Винокурова А. В. Расчет плит на упругом основании. 1936.
- Шапиро Г. С. ДАН. 1942. Т. 37. № 7—8.