Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика, том VII, 1943

ЗАМЕТКИ

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ГИБКОГО ВАЛА С НАСАЖЕННЫМ НА НЕГО ДИСКОМ

А. И. ГУРИН
(Свердловск)

Эту задачу без учета сил сопротивления и массы вала рассматривали Pöschl [1] и К. В. Меликов [2]. При исследовании устойчивости они пользуются методом малых колебаний и решают задачу в первом приближении. К. В. Меликов рассматривает также и второе приближение.

Однако характеристическое уравнение в этой задаче имеет мнимые корни и, согласно общей теории Ляпунова, первого и второго приближений для решения вопроса об устойчивости, вообще говоря, недостаточно.

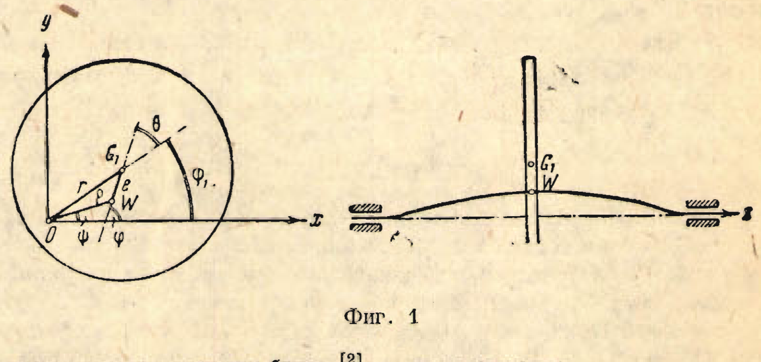
Здесь эта задача рассматривается в трех вариантах (причем во всех вариантах массой вала будем принебрегать):

1) без учета сопротивления, сводя эту задачу к исследованию устойчивости стационарного движения вала и пользуясь методом модифицированной потенциальной энергии Routh;

2) с учетом сил сопротивления, пользуясь методом малых колебаний и условиями устойчивости Routh-Hurwitz;

3) с учетом гироскопических сил, которые появляются при вращательном движении вала, если рассматривать случай несимметрически расположенного диска по отношению к подшипникам.

1. Пусть горизонтальный вал совершает вращательное движение вместе с диском, эксцентрично насаженным на вал в середине (фиг. 1).



Фиг. 1

В этом случае полная энергия будет [2] иметь выражение

$$E = T + V = \frac{1}{2}\left[m\dot{q}_1^2 + mk^2\dot{q}_2^2 + m\left(q_1^3 + k^2\right)\dot{q}_3^2 + 2mk^2\dot{q}_2\dot{q}_3\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}cq_1^2 - ceq_1\cos q_2 + \frac{1}{2}ce^2 \tag{1.1}$$

где через q, q_2 и q_3 обозначены соответственно величины r, θ и ψ_1, которые рассматриваются как обобщенные координаты, m и k — масса и радиус инерции диска, c — постоянная, характеризующая упругие свойства вала.

Из (1) следует что q_3 — координата циклическая, поэтому будем иметь интеграл

$$p_3 = \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_3} = c_3 \quad (c_3 = \text{const})$$

Для стационарного движения, при котором $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$, этот интеграл принимает вид

$$m(q_1^2 + k^2)\dot{q}_3 = c_3 \tag{1.2}$$

Выражение модифицированной потенциальной энергии по Routh для этого случая имеет вид

$$V^* = \frac{c_3^2}{2m(q_1^2 + k^2)} + \frac{1}{2}cq_1^2 - ceq_1\cos q_2 + \frac{1}{2}ce_2 \tag{1.3}$$

Выясним теперь, при каких условиях эта функция нециклических координат q_1 и q_2 имеет минимум, эти условия и будут являться условиями устойчивости основного стационарного движения.

Из необходимых условий экстремума функции V^* получаем значения нециклических кооординат для стационарного движения вала:

$$\bar{q}_1 = \frac{\pm\mu^2 e}{\mu^2 - \omega^2}, \qquad \bar{q}_2 = 0 \quad (\text{или } \pi) \tag{1.4}$$

где $\mu^2 = c/m$ и $\omega = \dot{\varphi}$ — постоянное значение угловой скорости вала. Отсюда $\bar{q}_1 \to \infty$ при $\omega \to \mu$, и критическая угловая скорость вала

$$\omega_{\text{кр}} = \mu = \sqrt{\frac{c}{m}} \tag{1.5}$$

Чтобы стационарное движение (1.4) было устойчивым, для этого достаточно выполнения неравенств

$$\frac{\partial^2 V^*}{\partial q_1^2} > 0, \qquad \frac{\partial^2 V^*}{\partial q_2^2} > 0; \qquad \frac{\partial^2 V^*}{\partial q_1^2}\frac{\partial^2 V^*}{\partial q_2^2} - \frac{\partial^2 V^*}{\partial q_1 \partial q_2} > 0 \tag{1.6}$$

для значений $\bar{q}_1$ и $\bar{q}_2$, определяемых формулами (1.4). Они выполняются для $\omega < \omega_{\text{кр}}$.

Таким образом, если угловая скорость ниже критической, то основное стационарное движение вала, определяемое равенствами (1.4), будет устойчивым по отношению ко всем возмущениям нециклических координат и их скоростей, при которых постоянная c_3 (циклический импульс) останется без изменения.

Для $\omega > \omega_{\text{кр}}$ неравенства (1.6) не выполняются, и поэтому функция V^* здесь не будет иметь минимума, следовательно, вопрос об устойчивости стационарных движений для угловых скоростей, превышающих критическую, остается открытым. Метод модифицированной потенциальной энергии Routh не дает в этом случае полного решения задачи об устойчивости вала.

Методом малых колебаний рассматриваемая задача решается и для закритической области, но только в первом приближении. Впервые в таком виде она была решена Pöschl, а затем совсем недавно К. В. Мелиowым. Результаты их совпадают.

Чтобы подтвердить «общность» своего результата в первом приближении, Pöschl получает его в указанной статье повторно, пользуясь методом модифицированной потенциальной энергии Routh. Однако в этих последних расчетах Pöschl делает ошибку. Он определяет условия устойчивости для закритической области из условий максимума функции V^*, тогда как по самой идее Routh эти условия устойчивости мы можем искать только из условий минимума названной функции.

Точно так же, не довольствуясь результатами первого приближения, К. В. Меликов решает поставленную задачу во втором приближении и получает здесь уже, кроме существующей критической угловой скорости, еще четыре критические скорости, одна из которых ниже основной критической ($0.35\omega_{кр}$). Но выше показано, что для докритической области движение вала будет вообще устойчиво, следовательно, второе приближение, как и следовало ожидать, не может дать вполне определенный ответ об устойчивости (здесь имеется особый случай—чисто мнимых корней характеристического уравнения).

2. Рассматривая движение вала с насаженным диском под действием упругой силы, сил сопротивления (пропорционально первой степени скорости) и сил трения, происходящих от окружающей гидродинамической среды, П. Л. Капица[3] получает (с некоторыми приближениями) дифференциальные уравнения движения

$$m\ddot{x} = -cx - \alpha\dot{x} + Ny, \qquad m\ddot{y} = -cy - \alpha\dot{y} - Nx \tag{2.1}$$

где m—масса вращающегося диска, x и y—координаты точки пересечения оси вала с диском, характеризующие отклонение вала от основного горизонтального положения, $-cx, -\alpha\dot{x}$, Ny—составляющие упругой реактивной силы, силы сопротивления и силы трения от гидродинамической среды по оси x, $-cy, -\alpha\dot{y}$, $-Nx$—составляющие тех же сил по оси y.

Коэффициенты c и α в уравнениях (2.1) постоянны, а коэффициент N определяется из формулы

$$N = \frac{\pi\varkappa\rho}{2}\,\frac{\delta R^3\omega^2}{b} \tag{2.2}$$

где $\varkappa$—постоянная трения, ρ—плотность окружающей среды, δ—толщина диска, b—зазор между диском и кожухом при совпадении их центров, R—радиус кольцевого кожуха, в котором заключен диск, ω—угловая скорость вала с диском.

Решая эти уравнения относительно возмущений x и y приближенным методом и принимая при этом отношение $k = N/m$ за достаточно малую величину, П. Л. Капица приходит к заключению, что движение вала будет устойчивым, если только имеет место неравенство

$$\alpha > \frac{N}{\mu} \qquad \left(\mu^2 = \frac{c}{m}\right) \tag{2.3}$$

Однако этот результат легко получить, если воспользоваться критерием устойчивости Routh-Hurwitz, не делая ограничений относительно величины k.

В самом деле, уравнение (2.1) можно представить в виде

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \mu^2 x - ky = 0, \qquad \ddot{y} + 2n + \mu^2\dot{y} + kx = 0 \tag{2.4}$$

где

$$2n = \frac{\alpha}{m}, \qquad \mu^2 = \frac{c}{m} \qquad \text{и} \qquad k = \frac{N}{m} \tag{2.5}$$

Системе дифференциальных уравнений (2.4) возмущенного движения с постоянными коэффициентами соответствует характеристическое уравнение

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0 \tag{2.6}$$

где

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = 4n, \qquad a_2 = 4n + 2\mu^2, \qquad a_3 = 4n\mu^2, \qquad a_4 = \mu^4 + k^2$$

Движение вала будет устойчивым при выполнении неравенств Routh-Hurwitz

$$a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ a_3 > 0,\ a_4 > 0, \qquad A = a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_1^2a_4 > 0 \tag{2.7}$$

В рассматриваемом случае они выполняются, если принять

$$n > \frac{k}{2\mu} \tag{2.8}$$

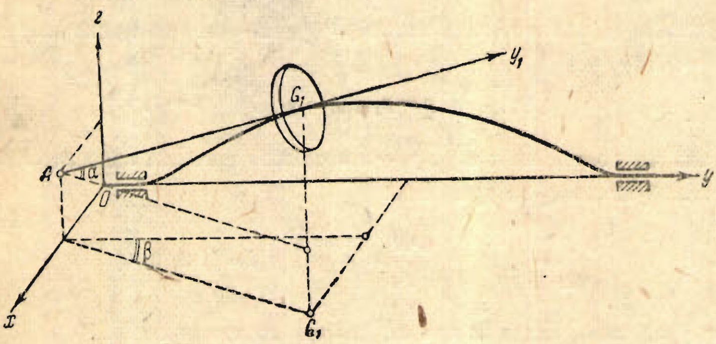
откуда согласно (2.5) вытекает условие П. Л. Капицы.

3. Пусть на вал насажен диск несимметрично по отношению к подшипникам (фиг. 2), и пусть центр тяжести его лежит на оси вращения y_1, совпадающей при отсутствии изгиба с осью y.

При вращательном движении вал будет изгибаться и примет форму некоторой кривой двоякой кривизны. Обозначая соответственно через q_1, q_2, q_3, q_4 и q_5 обобщенные координаты центра тяжести диска x^*, z^*, направляющие углы касательной Ay_1 к упругой линии α, β и угол поворота диска φ вокруг оси y, можно составить выражение для функции Лагранжа [1]

$$L=\frac{1}{2}\left[m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+J(\dot{q}_3^2+\dot{q}_4^2)+(J_{y_1}-J)\sin^2 q_3\dot{q}_4+2J_{y_1}\sin q_3\dot{q}_4\dot{q}_5+J_{y_1}\dot{q}_5^2\right]-$$
$$-\frac{1}{2}\left[(c_1q_1^2+a_1q_4^2-2b_1q_1q_4)+c_1q_2^2+a_1q_3^2-2b_1q_2q_3\right] \tag{3.1}$$

где m — масса диска, J — экваториальный момент инерции диска относительно оси y_1, a_1, c_1 — постоянные положительные величины, причем всегда $a_1c_1-b_1^2>0$.



Фиг. 2

Если ограничиться малыми членами не выше второго порядка, то приближенное выражение для L примет вид

$$L=\frac{1}{2}\left[m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+J(\dot{q}_3^2+\dot{q}_4^2)+2J_{y_1}\omega q_3\dot{q}_4+J_{y_1}\omega^2\right]-$$
$$-\frac{1}{2}\left[(c_1q_1^2+a_1q_4^2-2b_1q_1q_4)+(c_1q_2^2+a_1q_3^2-2b_1q_2q_3)\right] \tag{3.2}$$

где $\omega=\dot{q}_5$ — угловая скорость диска.

Дифференциальные уравнения движения диска в первом приближении будут

$$\begin{aligned} &m\ddot{q}_1+c_1q_1-b_1q_4=0, \qquad && J\ddot{q}_3-J_{y_1}\omega\dot{q}_4+a_1q_3-b_1q_2=0\\ &m\ddot{q}_2+c_1q_2-b_1q_3=0, \qquad && J\ddot{q}_4+J_{y_1}\omega\dot{q}_3+a_1q_4-b_1q_2=0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Определяя решение этих уравнений в виде

$$q_\nu=A_\nu\exp(\lambda_\nu t) \qquad (\nu=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

приходим к характеристическому уравнению

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} m\lambda^2+c_1 & 0 & 0 & -b_1\\ 0 & m\lambda^2+c_1 & -b_1 & 0\\ 0 & b_1 & J\lambda^2+a_1 & -J_y\omega\lambda\\ -b_1 & 0 & J_y\omega\lambda & J\lambda^2+a_1 \end{vmatrix}=0 \tag{3.4}$$

Оно содержит четные степени λ. Сами корни λ будут все мнимыми. Таким образом первое приближение не дает полного ответа об устойчивости движения вала. Покажем,

[1] См. Л. Г. Лойцянский и А. И. Лурье [4].

что в этом случае будет иметь место и достаточное условие устойчивости, т. е. движение вала с диском будет вообще устойчиво.

Составим функцию Гамильтона H, пользуясь формулой (3.1) для L. С помощью соотношения

$$-T+\sum p_k\dot{q}_k=\frac{1}{2\Delta}\sum A_{ik}p_ip_k \tag{3.5}$$

где Δ — определитель квадратичной формы $2T$, а A_{ik} — его миноры, имеем

$$H=-T+\sum p_k\dot{q}_k+V=\frac{p_1^2}{2m}+\frac{p_2^2}{2m}+\frac{p_3^2}{2J}+\frac{p_5^2}{2J_{y_1}}+\frac{(p_4-p_5\sin q_3)^2}{2J\cos^2 q_3}+$$
$$+\frac{1}{2}\left[(c_1q_1^2+a_1q_4^2-2b_1q_1q_4)+(c_1q_2^2+a_1q_3^2-2b_1q_2q_3)\right] \tag{3.6}$$

Здесь координата q_5 циклическая, поэтому будем иметь стационарное движение вала, определяемое координатами

$$q_i=\overline{q}_i,\qquad p=\overline{p}_{i\,(i=1,\,2,\,3,\,4)},\qquad \overline{p}=c_5 \tag{3,7}$$

где c_5 — произвольная постоянная; а $\overline{q}_i$, $\overline{p}_i$ — постоянные значения канонических переменных, определяемые как функции c_5 из уравнений

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q_i}=0,\qquad \frac{\partial^2 H}{\partial p_i}=0\qquad (i=1,\,2,\,3,\,4) \tag{3.8}$$

Решая эти уравнения, находим для стационарного движения

$$\overline{q}_1=\overline{q}_2=\overline{q}_3=\overline{q}_4=0,\qquad \overline{p}_1=\overline{p}_2=\overline{p}_3=\overline{p}_4=0,\qquad \overline{p}_5=J_{y_1}\dot{q}_5=c_5 \tag{3.9}$$

Таким образом стационарное движение представляет вращение вала с постоянной угловой скоростью $\dot{q}_5=\omega$ вокруг горизонтальной оси y, т. е. то движение, устойчивость которого нам и нужно будет исследовать. Сообщим теперь малые возмущения основному движению; для этого положим

$$q_i=\overline{q}_i+x_i,\qquad p_i=\overline{p}_i+y_i\qquad (i=1,\,2,\,3,\,4)$$

где x_i и y_i — малые возмущения нециклических координат и их импульсов.

Приращение функции Гамильтона H^* в результате этого возмущения будет определяться по формуле (с точностью до малых третьего порядка)

$$H^*=\frac{1}{2}\sum\left[\frac{\overline{\partial^2 H}}{\partial q_i\partial q_k}x_ix_k+2\frac{\overline{\partial^2 H}}{\partial q_i\partial p_k}x_iy_k+\frac{\overline{\partial^2 H}}{\partial p_i\partial p_k}y_iy_k\right] \tag{3.10}$$

или в развернутом виде для рассматриваемого случая

$$H^*=\frac{1}{2}\left[c_1(x_1^2+x_2^2)+\left(a_1+\frac{c_5^2}{J}\right)x_3^2+a_1x_4^2-2b_1x_1x_4-\right.$$
$$\left.-2b_1x_2x_3-2\frac{c_4}{J}x_3y_4+\frac{1}{m}(y_1^2+y_2^2)+\frac{1}{J}(y_3^2+y_4^2)\right] \tag{3.11}$$

Квадратичная форма H^* будет знакоопределенной и положительной, следовательно, согласно теории Ляпунова, вращательное движение вала с насаженным на него диском, будет устойчивым для всех возмущений, при которых импульсивная координата p_5, соответствующая циклической q_5, остается без изменения.

Поступила в редакцию
15 III 1943.

DYNAMICAL STABILITY OF A FLEXIBLE SHAFT FITTED WITH A DISC

A. I. GURIN

(Summary)

This problem for a massless shaft rotating without friction was formerly considered by Pöschl [1] and then by K. Melikov [2]. Employing the method of small oscillations both authors solved the problem at first approximation. K. Melikov considered further the second one.

But in the above stated problem the secular equation has the imaginary roots and hence, according to the general theory of Liapounov, the first and second approximations are not sufficient to solve the question of stability.

In the present article three variants of the same problem for a massless shaft are considered:

1. When friction is not taken into account (the problem is reduced to the stability of a steady rotating shaft; the Routh method of potential energy is used).

2. When the resistance forces are taken into consideration (the author employs the Routh-Hurwitz conditions for stability and solves the problem by the method of small oscillations).

3. When gyroscopic forces due to the rotation of the shaft are taken into account.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pöschl Th. Zur Frage der Stabilität rotirender Wellen или его обзорная статья в ZAMM. 1923. § 300—301.
2. Меликов К. В. Прикладная математика и механика. 1938. Т. II. Вып. 1.
3. Капица П. Л. Устойчивость и переход через критические обороты быстро вращающихся роторов при наличии трения. Техническая физика. 1937. Т. IX. Вып. 2.
4. Лойцянский Л. Г. и Лурье А. И. Курс теоретической механики. ОНТИ. 1939. Ч. II. § 165. Задача 323.