Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика, том VII, 1943

ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ В ИЗОТРОПНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Д. И. ШЕРМАН

(Москва)

§ 1. Пусть в плоскости xy задана конечная односвязная область S, ограниченная замкнутой кривой L. Обозначим через Q некоторую односвязную область, ограниченную замкнутой кривой γ, содержащуюся внутри L, а через P — двухсвязную область, ограниченную кривыми L и γ. Наконец, односвязные бесконечные области, внешние к S и Q, условимся обозначать через S_0 и Q_0. Таким образом S состоит из двух областей P и Q, а область Q_0 состоит из $-S_0$ и P.

Координаты точек кривых L и γ будем считать достаточное число раз дифференцируемыми по дуге s. Обход этих кривых всегда будем предполагать происходящим в положительном направлении относительно области P. Допустим, что области P и Q заполнены упругими средами с различными свойствами.

В настоящей статье будем заниматься следующей задачей [1].

Определить напряжения и деформацию в области S по заданным внешним силам на границе L и при условии, что вектор напряжения изменяется непрерывно при переходе из одной среды в другую, а вектор смещения, вообще говоря, претерпевает разрыв, величина которого задается во всех точках γ.

Как известно [3,4], эта задача сводится к отысканию функций $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$; $\psi_2(z)$ комплексного переменного $z=x+iy$, регулярных соответственно в областях P и Q из предельных условий [2]

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1(t)+t\overline{\varphi_1'(t)}+\overline{\psi_1(t)}=f(t) \\ &\varphi_1(t)+t\overline{\varphi_1'(t)}+\overline{\psi_1(t)}=\varphi_2(t)+t\overline{\varphi_2'(t)}+\overline{\psi_2(t)} \end{aligned}\right\} \text{ на } L \tag{1.1}$$

$$\frac{\varkappa_1}{\mu_1}\varphi_1(t)-\frac{1}{\mu_1}\{t\overline{\varphi_1'(t)}+\overline{\psi_1(t)}\}=\frac{\varkappa_2}{\mu_2}\varphi_2(t)-\frac{1}{\mu_2}\{t\overline{\varphi_2'(t)}+\overline{\psi_2(t)}\}+g(t) \quad \text{на } \gamma \tag{1.2}$$

---

[1] Эта задача уже рассматривалась в статье С. Г. Михлина [1], опубликованной в 1935 г., где приведено решение, основанное на применении комплексной функции Грина. Автором этой статьи в 1938 г. был опубликован [2] другой путь решения. Здесь приводится ее решение, которое представляется наиболее простым.

[2] Рассмотрение общего случая, когда упругие среды с различными свойствами заполняют любое конечное число конечных или бесконечных многосвязных областей, не представляет принципиальных затруднений. Оно может быть легко выполнено с помощью метода, развиваемого ниже, и некоторых дополнительных соображений, содержащихся в другой работе автора [5].

Здесь t — аффиксы точек на L и γ; функция

$$f(t) = i\int^{s} (X_n + iY_n)\,ds_1 \tag{1.3}$$

где X_n и Y_n — компоненты действующих внешних сил, $g(t)$ — скачок вектор-смещения и, наконец, $\varkappa_1$, μ_1 и $\varkappa_2$, μ_2 — упругие постоянные для областей P и Q.

Относительно функций $f(t)$ и $g(t)$ предположим, что они имеют первую производную, удовлетворяющую условию Гельдера.

Кроме того, вследствие равенства нулю главного момента внешних сил, функция $f(t)$ будет удовлетворять уравнению

$$\mathrm{Re}\int_L f(t)\,\overline{dt} = 0 \tag{1.4}$$

где Re — символ вещественной части рядом стоящего выражения.

§ 2. Искомые функции будем искать в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_L \omega(t)\frac{dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \omega_1(t)\frac{dt}{t-z} \\ \psi_1(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_L \left(\overline{\omega(t)} - \bar{t}\,\omega'(t)\right)\frac{dt}{t-z} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(A\,\overline{\omega_1(t)} + B\overline{\omega_2(t)} - \bar{t}\,\omega_1{}'(t)\right)\frac{dt}{t-z} \end{aligned} \tag{2.1}$$

в области P и

$$\begin{aligned} \varphi_2(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\omega_2(t)}{t-z}\,dt \\ \psi_2(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{C\,\overline{\omega_1(t)} + D\,\overline{\omega_2(t)} - \bar{t}\,\omega_2{}'(t)}{t-z}\,dt \end{aligned} \tag{2.2}$$

в области Q, где $\omega(t)$, $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ — новые неизвестные функции, достаточное число раз диффенцируемые по t, а A, B, C и D — вещественные постоянные, значения которых определим ниже.

Перейдем в равенствах (2.1) к пределу, устремляя точку z к некоторой точке t_0 кривой L. Полученные выражения для функций $\varphi_1(t_0)$ и $\psi_1(t_0)$ подставим в равенство (1.1) и, считая начало координат лежащим в области, к левой его части прибавим еще оператор

$$\frac{b}{t_0} + \frac{\bar{b}}{\bar{t}_0}\left(1 - \frac{t_0}{\bar{t}_0}\right) \tag{2.3}$$

где b — чисто мнимая величина, равная

$$b = \frac{1}{2\pi i}\int_L \left\{\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt + \frac{\overline{\omega(t)}}{\bar{t}^2}\,\overline{dt}\right\} \tag{2.4}$$

Тогда после преобразований получим

$$\omega(t_0)+K_1\{\omega(t),\ \omega_1(t),\ \omega_2(t),\ t_0\}=f(t_0) \quad \text{на } L \tag{2.5}$$

где

$$K_1=\frac{1}{2\pi i}\int_L \omega(t)\,d\lg\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}-\frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\omega(t)}\,d\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \overline{\omega_1(t)}\,d\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left[\omega_1(t)\left\{\frac{dt}{t-t_0}-A\frac{\overline{dt}}{\bar t-\bar t_0}\right\}-B\omega_2(t)\frac{\overline{dt}}{\bar t-\bar t_0}\right]+\frac{b}{t_0}+\frac{\bar b}{\bar t_0}\left(1-\frac{t_0}{\bar t_0}\right) \tag{2.6}$$

Перейдем теперь в равенствах (2.1) и (2.2) к пределу, устремляя точку z из областей P и Q к некоторой точке t_0 кривой γ, учитывая направление обхода последней. Полученные выражения для функций $\varphi_1(t_0)$, $\psi_1(t_0)$, $\varphi_2(t_0)$ и $\psi_2(t_0)$ подставим в уравнения (1.2). Будем иметь на γ

$$\begin{gathered}(1+A+C)\frac{\omega_1(t_0)}{2}+(1+B+D)\frac{\omega_2(t_0)}{2}+M_1\{\omega(t),\ \omega_1(t),\ \omega_2(t),\ t_0\}=0\\ \left\{\frac{1}{\mu_1}(\varkappa_1-A)-\frac{C}{\mu_2}\right\}\frac{\omega_1(t_0)}{2}+\left\{\frac{1}{\mu_2}(\varkappa_2-D)-\frac{B}{\mu_1}\right\}\frac{\omega_2(t_0)}{2}+\\ +N_1\{\omega(t),\ \omega_1(t),\ \omega_2(t),\ t_0\}=g(t_0)\end{gathered} \tag{2.7}$$

где

$$\begin{gathered}M_1=\frac{1}{2\pi i}\int_L \omega(t)\,d\lg\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}-\frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\omega(t)}\,d\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}-\\ -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left(\overline{\omega_1(t)}-\overline{\omega_2(t)}\right)d\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma(\omega_1(t)-\omega_2(t))\frac{dt}{t-t_0}-\\ -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma((A-C)\,\omega_1(t)+(B-D)\,\omega_2(t))\frac{\overline{dt}}{\bar t-\bar t_0}\end{gathered} \tag{2.8}$$

$$\begin{gathered}N_1=\frac{1}{2\pi i}\int_L \omega(t)\left(\frac{\varkappa_1}{\mu_1}\frac{dt}{t-t_0}+\frac{1}{\mu_1}\frac{\overline{dt}}{\bar t-\bar t_0}\right)+\frac{1}{2\pi i\mu_1}\int_L \overline{\omega(t)}\,d\frac{t-t}{\bar t-\bar t_0}+\\ +\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left\{\frac{1}{\mu_1}\overline{\omega_1(t)}-\frac{1}{\mu_2}\overline{\omega_2(t)}\right\}d\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}+\\ +\frac{1}{2\pi t}\int_\gamma\left\{\frac{\varkappa_1}{\mu_1}\omega_1(t)-\frac{\varkappa_2}{\mu_2}\omega_2(t)\right\}\frac{dt}{t-t_0}+\\ +\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left\{\left(\frac{A}{\mu_1}-\frac{C}{\mu_2}\right)\omega_1(t)+\left(\frac{B}{\mu_1}-\frac{D}{\mu_2}\right)\omega_2(t)\right\}\frac{\overline{dt}}{\bar t-\bar t_0}\end{gathered} \tag{2.9}$$

Все расходящиеся интегралы, содержащиеся в правых частях последних равенств, следует понимать в смысле их главного значения.

Постоянные A, B, C и D определим из уравнений

$$\begin{aligned}&A-C=1, && D-B=1\\ &-\frac{1}{\mu_1}A+\frac{1}{\mu_2}C=\frac{\varkappa_1}{\mu_1}, && -\frac{1}{\mu_2}D+\frac{1}{\mu_1}B=\frac{\varkappa_2}{\mu_2}\end{aligned} \tag{2.10}$$

Отсюда найдем

$$\begin{aligned}&A=\frac{\mu_1+\mu_2\varkappa_1}{\mu_1-\mu_2}, && B=-\frac{(1+\varkappa_2)\,\mu_1}{\mu_1-\mu_2}\\ &C=\frac{\mu_2(1+\varkappa_1)}{\mu_1-\mu_2}, && D=-\frac{\mu_2+\mu_1\varkappa_2}{\mu_1-\mu_2}\end{aligned} \tag{2.11}$$

Подставим эти выражения для A, B, C и D в уравнения (2.5) и (2.7). Тогда после несложных преобразований получим окончательно следующую систему интегральных уравнений Фредгольма для определения $\omega(t)$, $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$

$$\omega(t_0)+K\{\omega(t),\ \omega_1(t),\ \omega_2(t), t_0\}=f(t_0) \quad \text{на} \quad L \tag{2.12}$$

и

$$\left.\begin{aligned}\omega_1(t_0)+M\{\omega(t),\ \omega_1(t),\ \omega_2(t),\ t_0\}=g_1(t_0)\\ \omega_2(t_0)+N\{\omega(t),\ \omega_1(t),\ \omega_2(t),\ t_0\}=g_2(t_0)\end{aligned}\right\} \quad \text{на} \quad \gamma \tag{2.13}$$

где

$$K=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \omega(t)\,d\lg\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \overline{\omega(t)}\,d\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \omega_1(t)\,d\lg\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \overline{\omega_1(t)}\,d\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\left\{\frac{\mu_2(1+\varkappa_1)}{\mu_1-\mu_2}\,\omega_1(t)-\frac{\mu_1(1+\varkappa_2)}{\mu_1-\mu_2}\,\omega_2(t)\right\}\frac{\overline{dt}}{\bar t-\bar t_0}+\frac{b}{t_0}+\frac{\bar b}{\bar t_0}\left(1-\frac{t}{t_0}\right)$$

$$M=\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2\varkappa_1}\left(M_1{}^*+\mu_2N_1{}^*\right),\qquad N=\frac{\mu_2}{\mu_2+\mu_1\varkappa_2}\left(M_1{}^*+\mu_1N_1{}^*\right) \tag{2.14}$$

$$M_1{}^*=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \omega(t)\,d\lg\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \overline{\omega(t)}\,d\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\{\omega_1(t)-\omega_2(t)\}\,d\lg\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t^0}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\{\overline{\omega_1(t)}-\overline{\omega_2(t)}\}\,d\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}$$

$$N_1{}^*=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\omega(t)\left\{\frac{\varkappa_1}{\mu_1}\frac{dt}{t-t_0}+\frac{1}{\mu_1}\frac{\overline{dt}}{\bar t-\bar t_0}\right\}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i\mu_1}\int\limits_L\overline{\omega(t)}\,d\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\left\{\frac{\varkappa_1}{\mu_1}\,\omega_1(t)-\frac{\varkappa_2}{\mu_2}\,\omega_2(t)\right\}d\lg\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\left\{\frac{1}{\mu_1}\,\overline{\omega_1(t)}-\frac{1}{\mu_2}\,\overline{\omega_2(t)}\right\}d\,\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}$$

$$g_1(t_0)=\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2\varkappa_1}\,g(t_0),\qquad g_2(t_0)=\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_2+\mu_1\varkappa_2}\,g(t_0)$$

§ 3. Указанное выше сведение задачи к системе интегральных уравнений Фредгольма представляет по существу обобщение известных методов теории потенциала. Для той же цели можно было поступить по-другому, используя несколько иной, в некоторых случаях более удобный прием. Для краткости поясним это на примере. Пусть требуется определить регулярные в области S функции $\varphi_k(z)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, связанные на кривой L соотношениями

$$\sum_{e=1}^{n}\{a_{ek}(t)\,\varphi_e(t)+\overline{a_{ek}(t)}\,\overline{\varphi_e(t)}\}=f_k(t) \qquad (k=1, 2, \ldots, n) \tag{3.1}$$

где $a_{ek}(t)$—некоторые, вообще говоря, комплексные, а $f_k(t)$—вещественные, достаточное число раз дифференцируемые функции.

Область S пока попрежнему будем считать односвязной.

Положим в предыдущих равенствах

$$\varphi_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\omega_k(t)}{t-z}\,dt \qquad (k=1, 2, \ldots, n) \tag{3.2}$$

и прибавим к левым частям равенств (3.1) соответственно выражения

$$\sum_{e=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{G_{ek}(t)}{t-z}\,dt \qquad (k=1, 2, \ldots, n) \tag{3.3}$$

при z, стремящемся к t_0 изнутри области S, где

$$G_{ek}(t)=-a_{ek}(t)\,\omega_e(t)+a_{ek}(t)\,\overline{\omega_e(t)} \qquad (e=1, 2, \ldots, n;\quad k=1, 2, \ldots, n) \tag{3.4}$$

Тогда для определения $\omega_k(t)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ получим систему уравнений Фредгольма:

$$\sum_{e=1}^{n}\overline{a_{ek}(t_0)}\,\overline{\omega_e(t_0)}-\sum_{e=1}^{n}\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \omega_e(t)\,\frac{a_{ek}(t)-a_{ek}(t_0)}{t-t_0}\,dt-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \omega_e(t)\left\{(\overline{a_{ek}(t)}-\overline{a_{ek}(t_0)})\,\frac{\overline{dt}}{\overline{t}-\overline{t_0}}+\overline{a_{ek}(t)}\,d\lg\frac{t-t_0}{\overline{t}-\overline{t_0}}\right\}\right]=f_k(t_0)$$

$$(k=1, 2, \ldots, n) \tag{3.5}$$

Очевидно, любое решение этих уравнений должно обращать в нуль мнимую часть предельных значений выражений (3.3). Но так как последние суть функции, регулярные в области S, то каждое из них должно быть равно вещественной постоянной. Обозначим эти постоянные через C_k $(k=1, 2, \ldots, n)$.

Введем новые функции

$$\chi_k(t)=\sum_{e=1}^{n}\left\{-a_{ek}(t)\,\omega_e(t)+a_{ek}(t)\,\overline{\omega_e(t)}\right\}-C_k \qquad (k=1,2, \ldots, n) \tag{3.6}$$

регулярные во внешности L и равные нулю на бесконечности. Вещественные части этих функций равны на L постоянным C_k $(k=1, 2, \ldots, n)$. Отсюда следует, что вообще

$$\chi_k(t)=C_k=0 \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

Таким образом всякое решение уравнений (3.5) обращает в нуль выражения (3.3) и тем самым удовлетворяет исходным условиям (3.1).

Предположим теперь, что область S многосвязная. Ее полную границу будем считать состоящей из суммы $m+1$ простых замкнутых кривых $L_1, \ldots, L_{m+1}$; из них пусть L_{m+1} будет внешней границей области, содержащей внутри себя все остальные кривые L_j. Односвязные области (внешние к S), ограниченные кривыми L_j, условимся обозначать через S_j.

Заменяя, как прежде, функции $\varphi_k(z)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ по формулам (3.2), прибавим к левым частям равенств (3.1), рассматриваемых на L_j, следующие выражения:

$$\sum_{e=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{G_{ek}(t)}{t-z}\,dt+iE_{kj} \qquad (k=1, 2, \ldots, n;\ j=1, 2, \ldots, m+1) \tag{3.7}$$

также при z, стремящемся к t_0 изнутри области S. Величины E_{kj} представляют собой вещественные постоянные, из них $E_{k\,m+1}=0$, а остальные определяются формулами

$$E_{kj}=i\sum_{e=1}^{n}\int\limits_{L_j} G_{ek}(t)\,ds \qquad (k=1, \ldots, n;\quad j=1, \ldots, m) \tag{3.8}$$

Всякое решение уравнений Фредгольма, которые мы при этом получим, будет на каждой из кривых L_j обращать в нуль мнимые части выражений (3.7). Отсюда, рассуждая как прежде, найдем, что

$$\sum_{e=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{L} \frac{G_{ek}(t)}{t-z} dt = 0, \qquad E_{kj} = 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots, m+1) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.9}$$

Таким образом любое решение $\omega_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и для случая многосвязной области будет удовлетворять условиям (3.1). Кроме того, в обоих случаях будет иметь место

$$\sum_{e=1}^{n} G_{ek}(t) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.10}$$

Отметим, что вопрос о разрешимости построенных интегральных уравнений в каждом отдельном случае должен быть исследован особо. При этом важное значение приобретают формулы (3.10).

Указанный метод может быть также применен к случаю, когда условия (3.1) задаются в виде системы любого конечного числа вещественных уравнений, содержащих наряду с искомыми функциями и производные от них. К такому виду могут быть легко сведены приведенные в § 1 условия (1.1). Иногда представляется удобным комбинировать этот метод с изложенным выше.

§ 4. Установим теперь одно важное свойство, которым обладает всякое решение системы (2.12) и (2.13). Придерживаясь обозначений (2.1) и (2.2), представим ее в виде

$$\varphi_1(t) + t\overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)} + \frac{b}{t} + \frac{\bar{b}}{\bar{t}}\left(1 - \frac{t}{\bar{t}}\right) = f(t) \qquad \text{на } L \tag{4.1}$$

$$\varphi_1(t) + t\overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)} = \varphi_2(t) + t\overline{\varphi_2'(t)} + \overline{\psi_2(t)}$$

$$\frac{x_1}{\mu_1}\varphi_1(t) - \frac{1}{\mu_1}\{t\overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)}\} = \frac{x_2}{\mu_2}\varphi_2(t) - \frac{1}{\mu_2}\{t\overline{\varphi_2'(t)} + \overline{\psi_2(t)}\} + g(t) \qquad \text{на } \gamma \tag{4.2}$$

Умножим уравнение (4.1) и первое из (4.2) на $\overline{dt}$ и проинтегрируем каждое, соответственно, по кривой L и γ. Сложив почленно вновь полученные уравнения, после некоторых преобразований найдем

$$\int_{L} \{\varphi_1(t)\overline{dt} - \overline{\varphi_1(t)\,dt}\} + \int_{\gamma} [\{\varphi_1(t)\overline{dt} - \overline{\varphi_1(t)\,dt}\} - \{\varphi_2(t)\,dt - \overline{\varphi_2(t)\,dt}\}] +$$

$$+ \int_{L} \left\{\frac{b\,\overline{dt}}{t} - \frac{\bar{b}\,dt}{\bar{t}}\right\} - 2\pi i\bar{b} = \int_{L} f(t)\overline{dt} \tag{4.3}$$

Последнее слагаемое в левой части равенства есть величина вещественная; все же остальные слагаемые суть величины чисто мнимые. Следовательно,

$$b = 0 \tag{4.4}$$

Таким образом всякое решение уравнений (2.12) и (2.13) удовлетворяет условию (4.4) и, значит, тем самым граничным условиям (1.1) и (1.2).

Докажем теперь, что система (2.12) и (2.13) всегда разрешима. Для этого рассмотрим однородную систему

$$\omega^*(t_0) + K\{\omega^*(t), \omega_1^*(t), \omega_2^*(t), t_0\} = 0 \qquad \text{на } L \tag{4.5}$$

$$\left.\begin{aligned} &\omega_1^*(t_0) + M\{\omega^*(t), \omega_1^*(t), \omega_2^*(t), t_0\} = 0 \\ &\omega_2^*(t_0) + N\{\omega^*(t), \omega_1^*(t), \omega_2^*(t), t_0\} = 0 \end{aligned}\right\} \text{на } \gamma \tag{4.6}$$

где $\omega^*(t)$, $\omega_1^*(t)$ и $\omega_2^*(t)$ — некоторое ее решение.

Заменив в правых частях формул (2.1) и (2.2) функции $\omega(t)$, $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ на $\omega^*(t)$, $\omega_1^*(t)$ и $\omega_2^*(t)$, построим функции $\varphi_1^*(z)$, $\psi_1^*(z)$ и $\varphi_2^*(z)$, $\psi_2^*(z)$, регулярные в областях P и Q.

Как следует из вышеизложенного, они будут удовлетворять условиям:

$$\varphi_1^*(t)+t\overline{\varphi_1^{*\prime}(t)}+\overline{\psi_1^*(t)}=0 \qquad \text{на } L$$

$$\begin{gathered}\varphi_1^*(t)+t\overline{\varphi_1^{*\prime}(t)}+\overline{\psi_1^*(t)}=\varphi_2^*(t)+t\overline{\varphi_2^{*\prime}(t)}+\overline{\psi_2^*(t)}\\ \frac{\varkappa_1}{\mu_1}\varphi_1^*(t)-\frac{1}{\mu_1}\{t\overline{\varphi_1^{*\prime}(t)}+\overline{\psi_1^*(t)}\}=\frac{\varkappa_2}{\mu_2}\varphi_2(t)-\frac{1}{\mu_2}\{t\overline{\varphi_2^{*\prime}(t)}+\overline{\psi_2^*(t)}\}\end{gathered} \quad \text{на } \gamma \tag{4.7}$$

Последние равенства показывают, что функции $\varphi_1^*(z)$, $\psi_1^*(z)$ и $\varphi_2^*(z)$, $\psi_2^*(z)$ дают решение задачи теории упругости для области S при условии, что внешние силы, действующие на контуре L, равны нулю, а векторы напряжений и смещений остаются непрерывными при переходе из одной среды в другую. Отсюда на основании теоремы единственности будем иметь

$$\varphi_1^*(z)=iC_1z+E_1, \quad \psi_1^*(z)=-\overline{E}_1; \quad \varphi_2^*(z)=iC_2z+E_2, \quad \psi_2^*(z)=-\overline{E}_2 \tag{4.8}$$

где C_1 и C_2—некоторые вещественные, а E_1 и E_2, вообще говоря, комплексные постоянные числа, причем

$$\frac{\varkappa_1+1}{\mu_1}C_1=\frac{\varkappa_2+1}{\mu_2}C_2, \qquad \frac{\varkappa_1+1}{\mu_1}E_1=\frac{\varkappa_2+1}{\mu_2}E_2 \tag{4.9}$$

Первые два из равенств (4.8) могут быть представлены в виде

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi i}\int_L \omega^*(t)\frac{dt}{t-z}-iC_1z-E_1=-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \omega_1^*(t)\frac{dt}{t-z}\\ \frac{1}{2\pi i}\int_L(\overline{\omega^*(t)}-\bar{t}\omega^{*\prime}(t))\frac{dt}{t-z}+\overline{E}_1=-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma(A\overline{\omega_1^*(t)}+B\overline{\omega_2^*(t)}-\bar{t}\omega_1^{*\prime}(t))\frac{dt}{t-z}\end{gathered} \tag{4.10}$$

Выражения, содержащиеся в левых частях последних равенств, аналитически продолжаются через правые части на всю плоскость комплексного переменного z. Следовательно, по теореме Лиувилля будем иметь

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi i}\int_L \omega^*(t)\frac{dt}{t-z}-iC_1z-E_1=0\\ \frac{1}{2\pi i}\int_L(\overline{\omega^*(t)}-\bar{t}\omega^{*\prime}(t))\frac{dt}{t-z}+\overline{E}_1=0\end{gathered} \quad \text{для } z \text{ внутри } L \tag{4.11}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \omega_1^*(t)\frac{dt}{t-z}=0\\ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma(A\overline{\omega_1^*(t)}+B\overline{\omega_2^*(t)}-\bar{t}\omega_1^{*\prime}(t))\frac{dt}{t-z}=0\end{gathered} \quad \text{для } z \text{ вне } \gamma \tag{4.12}$$

К аналогичным заключениям придем, рассматривая вторые два равенства (4.8).

Введем в рассмотрение новые функции

$$\left.\begin{aligned} i\chi(t) &= \omega^*(t) - iC_1 t - E_1 \\ i\delta(t) &= \overline{\omega^*(t)} - t\omega^{*\prime}(t) + \bar{E}_1 \end{aligned}\right\} \quad \text{на } L \tag{4.13}$$

$$\left.\begin{aligned} i\chi_1(t) &= A\overline{\omega_1^*(t)} + B\overline{\omega_2^*(t)} - t\omega_1^{*\prime}(t) \\ i\delta_1(t) &= \omega_1^*(t) \\ i\chi_2(t) &= C\overline{\omega_1^*(t)} + D\overline{\omega_2^*(t)} - t\omega_2^{*\prime}(t) + E_2 \\ i\delta_2(t) &= \omega_2^*(t) - iC_2 t - E_2 \,. \end{aligned}\right\} \quad \text{на } \gamma \tag{4.14}$$

Как вытекает из сказанного, функции $\chi(t)$, $\delta(t)$, $\chi_1(t)$, $\delta_1(t)$ и $\chi_2(t)$, $\delta_2(t)$ являются контурными значениями некоторых функций $\chi(z)$, $\delta(z)$, $\chi_1(z)$, $\delta_1(z)$ и $\chi_2(z)$, $\delta_2(z)$, из которых $\chi(z)$ и $\delta(z)$ регулярны в области S_0 (во внешности контура L), $\chi_1(z)$ и $\delta_1(z)$ регулярны в области Q и, наконец, $\chi_2(z)$ и $\delta_2(z)$ регулярны в области Q_0 (во внешности контура γ). Кроме того, функции $\chi(z)$, $\delta(z)$, $\chi_2(z)$ и $\delta_2(z)$ обращаются в нуль на бесконечности.

Подставим в правую часть формулы (2.4) вместо функции $\omega^*(t)$ ее выражение через $\chi(t)$ из первого равенства (4.13). Принимая во внимание условие (4.4), легко найдем, что

$$C_1 = 0 \tag{4.15}$$

Исключая, далее, из равенств (4.13) $\omega^*(t)$, получим

$$\overline{\chi(t)} + t\chi'(t) + \delta(t) = -2i\bar{E}_1$$

Отсюда следует, что функции $\chi(z)$ и $\delta(z)$ дают решение задачи теории упругости для области S_0 при нулевых внешних силах на границе L. Поэтому, учитывая условия на бесконечности, будем иметь

$$\chi(z) = \delta(z) = 0, \qquad E_1 = 0 \tag{4.16}$$

и, следовательно,

$$\omega^*(t) = 0 \tag{4.17}$$

В связи с формулами (4.9), (4.15) и (4.16) равенства (4.14) упрощаются и по исключении $\omega_1^*(t)$ и $\omega_2^*(t)$ принимают вид

$$\begin{aligned} A\overline{\delta_1(t)} + B\overline{\delta_2(t)} + \bar{t}\delta_1'(t) &= -\chi_1(t) \\ C\overline{\delta_1(t)} + D\overline{\delta_2(t)} + \bar{t}\delta_2'(t) &= -\chi_2(t) \end{aligned} \tag{4.18}$$

Последние же равенства на основании соотношений (2.11) могут быть заменены

$$\left.\begin{aligned} \overline{\delta_2(t)} + \bar{t}\delta_2'(t) + \chi_2(t) &= \overline{\delta_1(t)} + \bar{t}\delta_1'(t) + \chi_1(t) \\ \frac{\varkappa_2}{\mu_2}\overline{\delta_2(t)} - \frac{1}{\mu_2}\left(\bar{t}\delta_2'(t) + \chi_2(t)\right) &= \frac{\varkappa_1}{\mu_1}\overline{\delta_1(t)} - \frac{1}{\mu_1}\left(\bar{t}\delta_1'(t) + \chi_1(t)\right) \end{aligned}\right\} \quad \text{на } \gamma \tag{4.19}$$

Вновь полученные равенства показывают, что функции $\delta_1(z)$, $\chi_1(z)$ и $\delta_2(z)$, $\chi_2(z)$ дают решение неоднородной задачи теории упругости для неограниченной плоскости при следующих условиях. Плоскость состоит из двух сред—внешности и внутренности контура γ, вообще говоря, с различными упругими свойствами (характеризуемыми постоянными, соответственно равными $\varkappa_2$, μ_2 и $\varkappa_1$, μ_1). Смещения и напряжения изменяются непрерывно при переходе из одной среды в другую. Кроме того, на бесконечности смещения и напряжения равны нулю. Нетрудно показать, что в этом случае[1] напряженное состояние и деформация вообще отсутствуют в теле и в силу условий на бесконечности смещения также везде тождественно равны нулю. Поэтому будем иметь

$$\delta_1(z) = iCz + C_1^*, \qquad \chi_1(z) = C_2^* \quad \text{в области } Q \tag{4.20}$$

$$\delta_2(z) = \chi_2(z) = 0 \quad \text{в области } Q_0 \tag{4.21}$$

где C—некоторое вещественное, а C_1^* и C_2^*, вообще говоря, комплексные постоянные числа. Подставляя же полученные выражения для функций $\delta_1(z)$ и $\chi_1(z)$ в равенства (4.19), найдем, что постоянные $C = C_1^* = C_2^* = 0$.

Отсюда следует, что

$$\omega_1^*(t) = \omega_2^*(t) = 0 \tag{4.22}$$

Итак, однородная система (4.5) и (4.6) имеет только тривиальное решение. Поэтому неоднородная система (2.12) и (2.13) всегда разрешима единственным образом. Определив из нее $\omega(t)$, $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$, найдем из равенств (2.1) и (2.2) искомые функции $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$, $\psi_2(z)$. Тем самым задача будет решена.

Поступила в редакцию
28 V 1941

PLANE DEFORMATION IN ISOTROPIC INHOMOGENEOUS MEDIA

D. I. SHERMAN

(Summary)

The author improves on the solution of the problem expressed in the title of this paper which was analysed in the earlier papers by S. Mikhlin [1] and by author himself [2].

The author develops a general procedure which permits in many cases to reduce the determination of functions regular in a domain and related by linear expressions on its boundary to the integral equation of Fredholm.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михлин С. Г. Плоская задача теории упругости для неоднородной среды. Труды Сейсмологического института АН СССР. 1935. № 66.
2. Шерман Д. И. Статическая плоская задача теории упругости для изотропных неоднородных сред. Труды Сейсмологического института АН СССР. 1938. № 86.
3. Колосов Г. В. Применение комплексной переменной к теории упругости. 1935.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые задачи теории упругости. 1935.

---

[1] См. нашу цитированную статью [5].