Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика, том VII, 1943

О ГИПОТЕЗЕ ЦИММЕРМАНА-ВИНКЛЕРА ДЛЯ БАЛОК

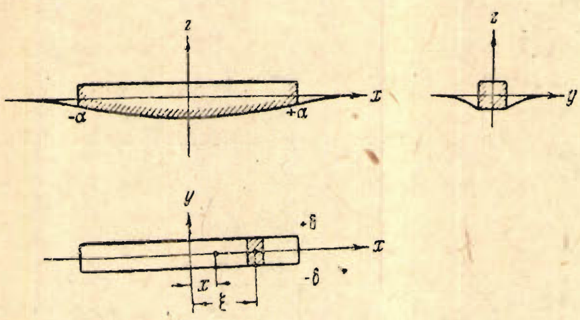
Л. А. ГАЛИН

(Москва)

В теории изгиба балок на упругом основании обычно принимается гипотеза Циммермана-Винклера [1]. Она заключается в предположении, что между перемещением балки, т. е. осадкой упругого основания, и средним давлением, приходящимся на единицу длины балки, существует прямая пропорциональность.

В настоящей работе устанавливаются случаи, когда гипотеза Циммермана-Винклера будет справедливой, а также определяется величина коэффициента постели, который до сих пор определялся лишь экспериментально.

Будем рассматривать задачу о вдавливании в упругое полупространство абсолютно жесткой балки конечной длины. Основание контура поперечного сечения балки представляет собой отрезок прямой. Если балка является упругой и изгибается под действием приложенной нагрузки и реактивных сил, то вывод о пропорциональности между осадкой и давлением, который устанавливается в дальнейшем, будет справедливым также и в этом случае.



Фиг. 1

Предполагается, что балка (фиг. 1) в плане является достаточно узким прямоугольником, длину которого обозначим через $2a$, ширину — через 2δ. Считаем, что распределение давления в поперечном направлении будет таким же, какое получается на основании решения соответствующей плоской задачи. Следовательно [2], давление на прямой $x = \xi$

$$p^* (\xi, y) = \frac{p(\xi)}{\pi \sqrt{\delta^2 - y^2}}$$

Функция $p(\xi)$ — величина давления на единицу длины балки — подлежит определению. Она находится таким образом, чтобы перемещение упругого полупространства на оси x было равно заданной функции $w(x)$, которая определяется на основании контура сечения балки в направлении оси x.

Принятая предпосылка аналогична предположению, на котором построена теория узкого крыла конечного размаха.

Перемещение поверхности упругого полупространства равно значению на плоскости $z=0$ гармонической функции $W(x, y, z)$, определенной при $z<0$. Для ее нахождения имеем условия

1) $W(x, 0, 0) = w(x)$ при $z=0$, $y=0$, $-a<x<+a$

2) $\dfrac{\partial W^-}{\partial z} = \dfrac{2(1-\mu^2)}{\pi E}\dfrac{p(\xi)}{\sqrt{\delta^2-y^2}}$ при $z=0$, $x=\xi$ $-\delta<y<+\delta$,

3) $\dfrac{\partial W^-}{\partial z} = 0$ при $z=0$ и при $\begin{cases} -\infty<y<-\delta, & -\infty<x<-a \\ +\delta<y<+\infty, & +a<x<+\infty \end{cases}$

4) $W(x, y, z) \to \dfrac{P}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ при $z=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\to\infty$

Здесь E — модуль упругости, μ — коэффициент Пуассона. В таком случае [2] для перемещения вдоль оси x имеем

$$w(x) = \frac{1-\mu^2}{\pi E}\int_{-a}^{+a}\int_{-\delta}^{+\delta}\frac{p(\xi)}{\pi\sqrt{(\delta^2-y^2)[(x-\xi)^2+y^2]}}\,dy\,d\xi$$

Таким образом для определения функции $p(x)$ получаем интегральное уравнение

$$w(x) = \int_{-a}^{+a} p(\xi)\, H_\delta^*(x-\xi)\, d\xi \tag{1}$$

где через $H_\delta^*(x-\xi)$ обозначено ядро этого интегрального уравнения,

$$H_\delta^*(x-\xi) = \frac{1-\mu^2}{\pi^2 E}\int_{-\delta}^{+\delta}\frac{dy}{\sqrt{(\delta^2-y^2)[(x-\xi)^2+y^2]}} = \frac{2(1-\mu^2)}{\pi^2 E}\,\frac{1}{|x-\xi|}\,K\left(\frac{i\delta}{x-\xi}\right) \tag{2}$$

причем $K\left(\dfrac{i\delta}{x-\xi}\right)$ есть полный эллиптический интеграл первого рода от модуля $\dfrac{i\delta}{x-\xi}$.

Рассмотрим новое ядро

$$H_\delta(x-\xi) = \frac{H_\delta^*(x-\xi)}{\lambda_\delta} \tag{3}$$

где функция λ_δ определена следующим образом:

$$\lambda_\delta = \frac{1-\mu^2}{\pi^2 E}\int_{-a}^{+a}\left\{\int_{-\delta}^{+\delta}\frac{dy}{\sqrt{(\delta^2-y^2)(s^2+y^2)}}\right\}ds \tag{4}$$

Покажем теперь, что

1) ядро $H_\delta(s)$ монотонно убывает при $s>0$ и монотонно возрастает при $s<0$, причем $s=x-\xi$;

2) при $\delta\to 0$ $\quad H_\delta(x-\xi)\to 0$, если $x-\xi\neq 0$

$\qquad\qquad\qquad H_\delta(x-\xi)\to\infty$, если $x-\xi=0$

3) интеграл

$$\int_{-a}^{+a} H_\delta(s)\,ds = 1$$

Очевидно, что при $s > 0$

$$\frac{d}{ds} H_\delta(s) = \frac{1}{\lambda_\delta}\,\frac{1-\mu^2}{\pi^2 E}\int_{-\delta}^{+\delta}\frac{-s\,dy}{\sqrt{(\delta^2-y^2)\,(s^2+y^2)^3}} < 0$$

так как выражение, находящееся под знаком интеграла, будет в этом случае всегда отрицательным.

Следовательно, $H_\delta(s)$ монотонно убывает при возрастании s, если $s > 0$. Так как функция $H_\delta(s)$ есть четная, то она монотонно возрастает при возрастании s, если $s < 0$.

Таким образом первое положение доказано.

Найдем теперь предельное значение λ_δ при $\delta \to 0$. Исходя из выражения (4), будем иметь

$$\lambda_\delta = \frac{2(1-\mu^2)}{\pi^2 E}\,\frac{1}{\delta}\int_{-a}^{+a}\left\{\int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)\,(s^2\delta^{-2}+\eta^2)}}\right\}ds =$$

$$= \frac{4(1-\mu^2)}{\pi^2 E}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}\,\operatorname{ar\,sh}\frac{a}{\delta\eta}\,d\eta$$

Легко убедиться, что

$$\lg\frac{a}{\delta\eta} + \lg(1+\sqrt{2}) > \operatorname{ar\,sh}\frac{a}{\eta\delta} = \lg\left[\frac{a}{\eta\delta} + \sqrt{\left(\frac{a}{\eta\delta}\right)^2 + 1}\,\right] > \lg\frac{a}{\eta\delta} + \lg 2$$

Следовательно

$$\frac{4(1-\mu^2)}{\pi^2 E}\left\{\int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}\lg\frac{a}{\delta} - \int_0^1 \lg\eta\,\frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} + \lg(1+\sqrt{2})\int_0^1\frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}\right\} > \lambda_\delta$$

$$\lambda_\delta > \frac{4(1-\mu^2)}{\pi^2 E}\left\{\int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}\lg\frac{a}{\delta} - \int_0^1 \lg\eta\,\frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} + \lg 2\int_0^1\frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}\right\}$$

Таким образом

$$\frac{4(1-\mu^2)}{\pi^2 E}\left[\frac{\pi}{2}\lg\frac{a}{\delta} + \frac{\pi}{2}\lg(2+2\sqrt{2})\right] >$$
$$> \lambda_\delta > \frac{4(1-\mu^2)}{\pi^2 E}\left[\frac{\pi}{2}\lg\frac{a}{\delta} + \frac{\pi}{2}\lg 4\right] \tag{5}$$

Из этих неравенств получим, что при $\delta \to 0$

$$\lambda_\delta = \frac{2(1-\mu^2)}{\pi E}\lg\left(\frac{a}{\delta}\right) \tag{6}$$

Установим теперь предельное значение $H_\delta^*(s)$ при $s \neq 0$.

Пользуясь (2), имеем

$$\lim_{\delta\to 0} H_\delta^*(s) = \lim_{\delta\to 0}\left[\frac{2(1-\mu^2)}{\pi^2 E}\,\frac{1}{|s|}\,K\left(\frac{i\delta}{s}\right)\right] = \frac{2(1-\mu^2)}{\pi^2 E}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{|s|}$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\delta\to 0} H_\delta(s) = \frac{H_\delta^*(s)}{\lambda_\delta} = \frac{2(1-\mu^2)}{\pi^2 E}\,\frac{1}{|s|}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\lg(a/\delta)}$$

Если $s=0$, т. е. $x=\xi$, то $H_\delta(s)\to\infty$ при $s\to 0$ и $\delta\to 0$, так как δ и s стремятся к нулю независимо друг от друга.

Таким образом доказано второе положение.

Третье положение непосредственно следует из определения ядра

$$H_\delta(x-\xi)=\frac{H_\delta^*(x-\xi)}{\lambda_\delta}$$

где

$$\lambda_\delta=\int_{-a}^{+a} H_\delta^*(s)\,ds$$

Вследствие этого

$$\int_{-a}^{+a} H_\delta(s)\,ds=1$$

Но если выполнены условия 1, 2, и 3, то $H_\delta(x-\xi)$ представляет собой ядро сингулярного интеграла и эти условия являются необходимыми и достаточными[4] для того, чтобы существовало асимптотическое представление функции $p(x)$:

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{-a}^{+a} p(\xi)\,H_\delta(x-\xi)\,d\xi=p(x) \qquad (7)$$

Таким образом интегральное уравнение (1) вырождается в сингулярный интеграл.

Выражение (7) будет иметь место в каждой точке Лебега функции $p(x)$, т. е. в точке, где

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}|p(t)-p(x)|\,dt=0$$

Поэтому, если балка имеет изломы в крайних точках $(x=a,\ x=-a)$, которые обусловят возникновение бесконечно больших давлений $p(x)$, то вышеприведенные рассуждения не будут иметь места, так как $p(+a)$ и $p(-a)$ не будут точками Лебега.

Если же контур сечения балки плоскостью zx будет гладкой кривой в окрестности точек $x=+a$, $x=-a$, то любая точка будет точкой Лебега.

Из (1) и (3) имеем

$$\int_{-a}^{+a} p(\xi)\,H_\delta^*(x-\xi)\,d\xi=\lambda_\delta\int_{-a}^{+a} p(\xi)\,H_\delta(x-\xi)\,d\xi=w(x) \qquad (8)$$

и, следовательно, согласно (5)

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\lambda_\delta}\,w(x)=p(x)$$

Или, подставляя вместо λ_δ выражение (5), получим

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\pi E}{2(1-\mu^2)}\,\frac{1}{\lg(a/\delta)}\,w(x)=p(x) \qquad (9)$$

Выведем равенство (7) для сингулярного интеграла, в который вырождается уравнение (1), и установим на основании этого условие, необходимое для асимптотического представления функции посредством такого интеграла.

Разобьем в интеграле (7) промежуток изменения переменной следующим образом:

$$\int_{-a}^{x-\zeta_\delta} p(\xi) H_\delta(x-\xi)\, d\xi + \int_{x-\zeta_\delta}^{x+\zeta_\delta} p(\xi) H_\delta(x-\xi)\, d\xi + \int_{x+\zeta_\delta}^{+a} p(\xi) H_\delta(x-\xi)\, d\xi$$

Определим величину ζ_δ так, чтобы при $\delta \to 0$ имело место

$$\frac{\int\limits_{-a}^{x-\zeta_\delta} p(\xi) H_\delta(x-\xi)\, d\xi + \int\limits_{x+\zeta_\delta}^{+a} p(\xi) H_\delta(x-\xi)\, d\xi}{\int\limits_{x-\zeta_\delta}^{x+\zeta_\delta} p(\xi) H_\delta(x-\xi)\, d\xi} \to 0 \tag{10}$$

На основании определения (3) это равносильно тому, что при $\delta \to 0$

$$\frac{\int\limits_{-a}^{x-\zeta_\delta} p(\xi) H_\delta^{**}(x-\xi)\, d\xi + \int\limits_{x+\zeta_\delta}^{+a} p(\xi) H_\delta^{**}(x-\xi)\, d\xi}{\int\limits_{x-\zeta_\delta}^{x+\zeta_\delta} p(\xi) H_\delta^{**}(x-\xi)\, d\xi} \to 0 \tag{11}$$

где

$$H_\delta^{**}(x-\xi) = \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{dy}{\sqrt{(\delta^2-y^2)\,[(x-\xi)^2+y^2]}}$$

Заменим числитель выражения (11) величиной, принимающей заведомо бо́льшие значения. Рассмотрим неравенство

$$\int_{-\delta}^{+\delta} \frac{dy}{\sqrt{[(x-\xi)^2+y^2]\,(\delta^2-y^2)}} < \frac{1}{|x-\xi|} \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{dy}{\sqrt{\delta^2-y^2}} = \frac{\pi}{|x-\xi|}$$

Вследствие монотонного возрастания $H_\delta(x-\xi)$ максимум этого выражения при данных значениях ξ будет достигнут при $\xi = x - \zeta_\delta$, а также в силу четности при $\xi = x + \zeta_\delta$. Поэтому

$$H_\delta^{**}(x-\xi) = \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{dy}{\sqrt{[(x-\xi)^2+y^2]\,(\delta^2-y^2)}} < \frac{1}{\zeta_\delta}\,\pi \qquad \begin{pmatrix} -a < \xi < x-\zeta_\delta \\ x+\zeta_\delta < \xi < +a \end{pmatrix}$$

Если обозначить максимальное значение $p(x)$ при $-a < x < +a$ через p_0 [функция $p(x)$ предполагается конечной и положительной], то будем иметь

$$\int_{-a}^{x-\zeta_\delta} p(\xi) H_\delta^{**}(x-\xi)\, d\xi + \int_{x+\zeta_\delta}^{+a} p(\xi) H_\delta^{**}(x-\xi)\, d\xi < p_0 \frac{\pi}{\zeta_\delta}(2a - 2\zeta_\delta) < p_0 \frac{2\pi a}{\zeta_\delta}$$

Определим величину заведомо меньшую, чем знаменатель. Вследствие того, что каждый из множителей $p(\xi)$ и $H_\delta^{**}(x-\xi)$, из которых составлено подинтегральное выражение, всегда положителен, будем иметь

$$\int_{x-\zeta_\delta}^{x+\zeta_\delta} p(\xi)H_\delta^{**}(x-\xi)\,d\xi = p(x_0)\int_{-\zeta_\delta}^{+\zeta_\delta} H_\delta^{**}(s)\,ds \qquad (x-\zeta_\delta < x_0 < x+\zeta_\delta)$$

Аналогично (5) имеем

$$\int_{-\zeta_\delta}^{+\zeta_\delta} H_\delta^{**}(s)\,ds > \left[2\pi\lg\frac{\zeta_\delta}{\delta} + 2\pi\lg 4\right]$$

Следовательно,

$$\int_{x-\zeta_\delta}^{x+\zeta_\delta} p(\xi)H_\delta^{**}(x-\xi)\,d\xi = p(x_0)\int_{-\zeta_\delta}^{+\zeta_\delta} H_\delta^{**}(s)\,ds > p(x_0)\,[2\pi\lg\frac{\zeta_\delta}{\delta} +$$

$$+ 2\pi\lg 4] > p(x_0)\,2\pi\lg\frac{\zeta_\delta}{\delta}$$

Поэтому равенство (11) будет иметь место во всяком случае тогда, когда выполняется

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{p_0\pi 2a}{\zeta_\delta 2\pi p(x_0)\lg(\zeta_\delta/\delta)} = \frac{p_0 a}{p(x_0)\zeta_\delta\lg(\zeta_\delta/\delta)} = 0 \qquad (12)$$

Здесь числитель заведомо больше, чем числитель, а знаменатель заведомо меньше, чем знаменатель в равенстве (11).

Покажем, что равенство (12) будет справедливо в том случае, если

$$\zeta_\delta = \frac{a}{\lg\lg(a/\delta)} \qquad (13)$$

Подставляя это выражение в (12), будем иметь

$$\frac{p_0 a}{p(x_0)\zeta_\delta\lg(\zeta_\delta/\delta)} = \frac{p_0\lg\lg(a/\delta)}{p(x_0)\,[\lg(a/\delta)-\lg\lg\lg(a/\delta)]} = \frac{p_0}{p(x_0)} : \left\{\frac{\lg(a/\delta)}{\lg\lg(a/\delta)} - \frac{\lg\lg\lg(a/\delta)}{\lg\lg(a/\delta)}\right\}$$

Но $x/\lg x \to \infty$ при $x\to\infty$, следовательно, при $\delta\to 0$ будем иметь

$$\frac{\lg(a/\delta)}{\lg\lg(a/\delta)} \to \infty, \qquad \frac{\lg\lg\lg(a/\delta)}{\lg\lg(a/\delta)} \to 0$$

Поэтому

$$\lim_{\delta\to 0}\left\{\frac{p_0 a}{p(x_0)\zeta_\delta\lg(\zeta_\delta/\delta)}\right\} = \lim_{\delta\to 0}\left\{\frac{p_0}{p(x_0)} : \left(\frac{\lg(a/\delta)}{\lg\lg(a/\delta)} - \frac{\lg\lg\lg(a/\delta)}{\lg\lg(a/\delta)}\right)\right\} = 0$$

так как $p_0/p(x_0)$ — конечная величина. Таким образом доказано равенство (12) и, следовательно, исходные предельные равенства (10) и (11).

Однако, если имеет место (10), то это обусловит выполнение условия (7); будем иметь при $\delta\to 0$

$$\int_{-a}^{+a} p(\xi)H_\delta(x-\xi)\,d\xi \to \int_{x-\zeta_\delta}^{x+\zeta_\delta} p(\xi)H_\delta(x-\xi)\,d\xi \to p(x_0)\int_{-\zeta_\delta}^{+\zeta_\delta} H_\delta(s)\,ds \to$$

$$\to p(x_0)\int_{-a}^{+a} H_\delta(s)\,ds \to p(x_0) \qquad (14)$$

При этом $x-\zeta_\delta < x_0 < x+\zeta_\delta$. Для возможности представления функции $p(x)$ посредством сингулярного интеграла нужно, чтобы $\lim\limits_{\delta\to 0} x_0 = x$, а для этого необходимо, чтобы

$$\lim_{\delta\to 0}\zeta_\delta = \lim\left[\frac{a}{\lg\lg(a/\delta)}\right] = 0$$

Если a будет бесконечно большим, а δ — конечным, то это не будет иметь места. Таким образом вышеприведенные рассуждения, в которых на рост функции $p(x)$ не налагается никаких требований (предполагается только, что функция $p(x)$ ограничена), будут справедливы для балки конечной длины.

Для приближенного представления функции посредством сингулярного интеграла нужно, чтобы величина $\zeta_\delta = \frac{a}{\lg\lg(a/\delta)}$ была достаточно малой или чтобы функция $p(x)$ не менялась на этом участке значительно.

Таким образом при уменьшении ширины балки по сравнению с длиной (увеличении a/δ) отношение давления на единицу длины балки к осадке стремится к величине, постоянной по ее длине. Таким образом гипотеза Циммермана-Винклера справедлива для достаточно узкой балки.

Эта предельная пропорциональность будет иметь место везде, кроме, может быть, углов балки, где давление может достигать бесконечно большой величины.

Для коэффициента постели на основании (9) получено следующее предельное значение:

$$k = \frac{p(x)}{w(x)} = \frac{\pi E}{2(1-\mu^2)}\,\frac{1}{\lg(a/\delta)} \tag{15}$$

Коэффициент постели будет близок к этому предельному значению во всяком случае тогда, когда на участке длиной $\frac{a}{\lg\lg(a/\delta)}$ осадка не меняется значительно. Все это будет иметь место, следовательно, для балки конечной длины.

Полученные выводы справедливы как для абсолютно жесткой балки, так и для упругой балки, так как безразлично, имеет ли балка ранее заданную форму или приобрела ее под действием приложенных сил.

Поступила в редакцию
10 VI 1943.

Институт механики
Академии Наук СССР

CONCERNING THE HYPOTHESIS OF ZIMMERMANN-WINKLER

L. A. GALIN

(Summary)

The author considers the pressing of an absolutely rigid beam of finite length in the elastic semi-space. The form of the beam in plan is a rectangle, the width of which 2δ is assumed sufficiently small, relative to its length $2a$ (fig. 1). It is supposed also that the distribution of pressures in the direction of a cross-section remains the same as for the corresponding plane problem.

For the calculation of pressures p which are average at the cross-section and depending on coordinate x along the length of the beam, the author utilizes the integral equation (1); its kernel is determined by formula (2).

The equation reduces to a singular integral when δ tends to zero and a remains finite.

The singular integral represents the underintegral function at any Lebesgue points providing necessary and sufficient conditions 1, 2, 3 established on page 294. This property to reestablish the value of the function, leads to the expression (8) which shows that, when δ approches zero, the displacements $w(x)$ of beam are proportional to the average pressures $p(x)$. Hence the validity of the Zimmermann-Winkler hypothesis is confirmed for all points excluding perhaps the angular ones where the pressures may tend to infinity.

For the limiting values of the bed coefficient k the expression (15) is obtained

ЛИТЕРАТУРА

1. Winkler E. Lehre von Elastizität und Festigkeit. 1867.
2. Тимошенко С. П. Теория упругости. 1934.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые задачи математической теории упругости. 1935.
4. Фаддеев Д. К. Представление суммируемых функций сингулярными интегралами. Труды II Всесоюзного математического съезда. 1936. Т. II.