

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЫ ПРИ НАЛИЧИИ УПРОЧНЕНИЯ МАТЕРИАЛА¹

В. В. СОКОЛОВСКИЙ

(Москва)

Статья содержит исследование упруго-пластического напряженного состояния цилиндрической трубы, находящейся под действием равномерных внутреннего и внешнего давлений и осевой силы. Мы основываемся на теории пластичности Генки [3] и условии пластичности с упрочнением Шмидта [4].

§ 1. Основные соотношения

Будем пользоваться цилиндрическими координатами r , θ и z . Пусть ось z совпадает с осью цилиндрической трубы, плоскость $z=0$ проходит через ее середину; по концам труба ограничена плоскостями $z = \pm l$.

Радиусы внутренней Γ_a и внешней Γ_b окружностей, ограничивающих поперечное сечение трубы, будем обозначать соответственно через a и b (фиг. 1).

Вследствие осевой симметрии задачи границей упругой и пластической областей является некоторая окружность Γ_c с центром в точке O ; радиус этой окружности обозначаем через c .

Для удобства введем обозначения

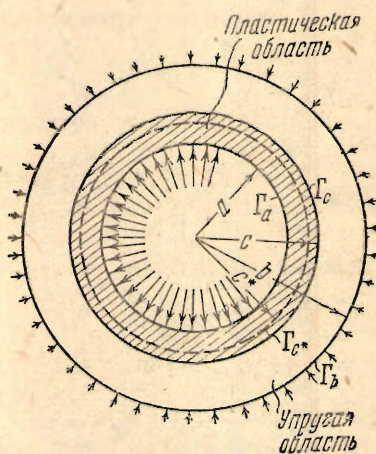
$$\rho = r/b, \quad \alpha = a/b, \quad \gamma = c/b$$

Граничные данные вдоль окружностей Γ_a и Γ_b и условие на концах трубы могут быть записаны в виде

$$\sigma_r = -k\rho \quad \text{при } \rho = \alpha; \quad \sigma_r = -kq \quad \text{при } \rho = 1$$

$$P = 2\pi b^2 \int_{\alpha}^1 \sigma_z \rho d\rho \quad \text{при } z = \pm l,$$

где P — сила, растягивающая трубу.



Фиг. 1

¹ Основные результаты этой работы опубликованы в нашей статье [1]. Наша статья [2] была посвящена исследованию того же вопроса, но для случая идеальной пластичности.

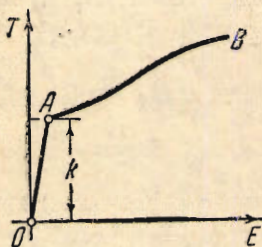
При исследовании напряженного состояния будем исходить из наиболее общей зависимости между

$$E = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \sqrt{(\varepsilon_\theta - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_r)^2 + (\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2} \right|$$

и

$$T = \frac{1}{\sqrt{6}} \left| \sqrt{(\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2} \right|$$

изображенной на фиг. 2.



Фиг. 2

Как в упругом (прямая OA), так и в пластическом (кривая AB) состояниях материала имеет место зависимость

$$\varepsilon = \frac{1-2\nu}{2G(1+\nu)} S \quad (1.1)$$

где

$$3\varepsilon = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z, \quad 3S = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z$$

Для упругого состояния материала имеют место соотношения Гука

$$2G(\varepsilon_r - \varepsilon) = \sigma_r - S; \quad 2G(\varepsilon_\theta - \varepsilon) = \sigma_\theta - S; \quad 2G(\varepsilon_z - \varepsilon) = \sigma_z - S \quad (1.2)$$

Для пластического состояния материала принимаются соотношения Гейки

$$2G(\varepsilon_r - \varepsilon) = (1+\varphi)(\sigma_r - S); \quad 2G(\varepsilon_\theta - \varepsilon) = (1+\varphi)(\sigma_\theta - S), \\ 2G(\varepsilon_z - \varepsilon) = (1+\varphi)(\sigma_z - S) \quad (1.3)$$

и условие упрочнения материала Шмидта

$$T = kF(E) \quad (1.4)$$

где $k = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$, причем σ_s — предел текучести при простом растяжении.

Функция F , зависящая от материала, определяется экспериментально.

Если ввести в рассмотрение функцию f , определяемую уравнением

$$f(x) = F \left\{ \frac{k}{G} x f(x) \right\} \quad (1.5)$$

то в силу (1.1) и (1.3) условие Шмидта может быть преобразовано к виду

$$(\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 = 6k^2 f^2 (1+\varphi) \quad (1.6)$$

Рассмотрим три частных случая функции F ,

а. Идеальная пластичность (без упрочнения):

$$T = k \quad \text{для} \quad E \geq \frac{k}{G} \quad (1.4a)$$

Зависимость между E и T представлена на фиг. 3.

Функция f будет

$$f = 1 \quad \text{для } x \geq 1 \quad (1.5a)$$

Условие (1.6) переходит в известное условие Мизеса

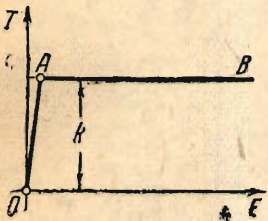
$$(\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 = 6k^2 \quad (1.6a)$$

б. Линейное упрочнение:

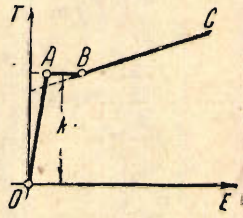
$$\begin{aligned} T = k & \quad \text{для } \frac{k}{G} \leq E \leq \frac{1-n}{m} \\ T = k(mE + n) & \quad \text{для } E \geq \frac{1-n}{m} \end{aligned} \quad (1.4b)$$

где m и n — постоянные, зависящие от материала.

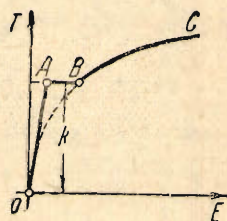
Зависимость между E и T представлена на фиг. 4.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Функция f определяется равенствами

$$\begin{aligned} f(x) = 1 & \quad \text{для } 1 \leq x \leq \frac{1-n}{\lambda} \\ f(x) = \frac{n}{1-\lambda x} & \quad \text{для } x \geq \frac{1-n}{\lambda} \end{aligned} \quad (1.5b)$$

где

$$\lambda = m \frac{k}{G}$$

Условие (1.6) принимает вид

$$(\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 = \begin{cases} 6k^2 & \left(0 \leq \varphi \leq \frac{1-n}{\lambda} - 1\right) \\ 6k^2 n^2 [1 - \lambda(1 + \varphi)]^{-2} & \left(\varphi \geq \frac{1-n}{\lambda} - 1\right) \end{cases} \quad (1.6b)$$

с. Степенное упрочнение:

$$\begin{aligned} T = k & \quad \text{для } \frac{k}{G} \leq E \leq m \frac{1}{\mu} \\ T = kmE^\mu & \quad \text{для } E \geq m \frac{1}{\mu} \end{aligned} \quad (1.4c)$$

где m и μ — постоянные, зависящие от материала, $0 \leq \mu < 1$.

Зависимость между E и T представлена на фиг. 5.

Функция f определяется равенствами

$$\begin{aligned} f(x) = 1 & \quad \text{для } 1 \leq x \leq \lambda \frac{1-\mu}{\mu} \\ f(x) = \lambda x^{\frac{\mu}{1-\mu}} & \quad \text{для } x \geq \lambda \frac{1-\mu}{\mu} \end{aligned} \quad (1.5c)$$

где

$$\lambda = m^{\frac{1}{1-\mu}} \left(\frac{k}{G}\right)^{\frac{\mu}{1-\mu}}$$

Условие (1.6) принимает вид

$$(\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 = \begin{cases} 6k^2 & (0 \leq \varphi \leq \lambda^{-\frac{1-\mu}{\mu}} - 1) \\ 6k^2 \lambda^2 (1 + \varphi)^{\frac{2\mu}{1-\mu}} & (\varphi \geq \lambda^{-\frac{1-\mu}{\mu}} - 1) \end{cases} \quad (1.6c)$$

Все последующие рассуждения проводятся для общего случая произвольной функции F .

Условия совместности деформаций имеют вид

$$\frac{d\varepsilon_\theta}{d\rho} + \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_r}{\rho} = 0, \quad \frac{d\varepsilon_z}{d\rho} = 0 \quad (1.7)$$

Последнее условие дает

$$\varepsilon_z = \text{const} = \frac{k(1-2\nu)}{2G(1+\nu)} \delta \quad (1.8)$$

Параметр δ характеризует удлинение трубы.

2. Решение упруго-пластической задачи по теории Генки-Шмидта

Система уравнений теории Генки-Шмидта состоит прежде всего из уравнения равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{d\rho} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{\rho} = 0 \quad (2.1)$$

Добавляем сюда условие упрочнения

$$(\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 = 6k^2 f^2 (1 + \varphi) \quad (1.5)$$

Уравнения (1.7) и (1.8), преобразованные при помощи (1.1) и (1.2), имеют вид

$$\frac{d}{d\rho} (\sigma_z - \sigma_\theta) + (\sigma_z - \sigma_\theta) \frac{d \ln(1 + \varphi)}{d\rho} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{\rho} = 0 \quad (2.2)$$

$$(1 + \varphi) (\sigma_r + \sigma_\theta - 2\sigma_z) = \frac{1-2\nu}{1+\nu} (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z - 3k\delta) \quad (2.3)$$

Четыре уравнения (1.5), (2.1), (2.2) и (2.3) содержат четыре неизвестные функции σ_r , σ_θ , σ_z и φ .

Введем новые искомые функции σ и ψ , положив

$$\sigma_r = k\delta + kf(1 + \varphi)(\sigma + \sin \psi), \quad \sigma_\theta = k\delta + kf(1 + \varphi)(\sigma - \sin \psi) \quad (2.4)$$

$$\sigma_z = k\delta + kf(1 + \varphi)(\sigma + \sqrt{3} \cos \psi)$$

Условие (1.5) удовлетворяется тождественно, а подстановка (2.4) в (2.1) (2.2) и (2.3) дает

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{f'(1 + \varphi)}{f(1 + \varphi)} \text{ctg} \psi + \frac{[3(1-2\nu) + 2(1+\nu)(1 + \varphi)] \text{ctg} \psi + \sqrt{3}(1-2\nu)}{2(1 + \varphi)[2(1-2\nu) + (1+\nu)(1 + \varphi)]} = F_1(\varphi, \psi) \quad (2.5)$$

$$\frac{d \ln \rho}{d\varphi} = -\frac{f'(1 + \varphi)}{2f(1 + \varphi)} - \frac{2(1 + \nu)(1 + \varphi) \text{cosec}^2 \psi + (1-2\nu)(1 + \sqrt{3} \text{ctg} \psi)^2}{4(1 + \varphi)[2(1-2\nu) + (1+\nu)(1 + \varphi)]} = -F_2(\varphi, \psi) \quad (2.6)$$

$$\sigma = -\left[1 + 2\frac{1+\nu}{1-2\nu}(1 + \varphi)\right] \frac{\cos \psi}{\sqrt{3}} \quad (2.7)$$

Для удобства решения задачи переменные σ , ψ и ρ рассматриваются как искомые функции, а φ принимается за независимое переменное.

Вместо φ иногда удобно вводить функцию $\Phi = \ln(1 + \varphi)$.

Будем в дальнейшем буквами e и p отмечать компоненты напряжения соответственно в упругой и пластической областях.

В кольцевой упругой области ($\gamma \leq \rho \leq 1$) компоненты напряжения выражаются известными из теории упругости формулами

$$\begin{aligned}\sigma_r^e &= -k \left(\frac{C}{\rho^2} - D \right), & \sigma_\theta^e &= k \left(\frac{C}{\rho^2} + D \right) \\ \sigma_z^e &= \nu (\sigma_r^e + \sigma_\theta^e) + k(1 - 2\nu)\delta\end{aligned}$$

C и D — постоянные интегрирования. Определяя D из условия на граничной окружности Γ_b , получим

$$\begin{aligned}\sigma_r^e &= -kq - kC \left(\frac{1}{\rho^2} - 1 \right), & \sigma_\theta^e &= -kq + kC \left(\frac{1}{\rho^2} + 1 \right) \\ \sigma_z^e &= 2\nu k(C - q) + k(1 - 2\nu)\delta\end{aligned} \quad (2.8)$$

Предполагаем, что при переходе через границу упругой и пластической областей все компоненты напряжения и деформации изменяются непрерывно и, следовательно, вдоль окружности Γ_c

при $\rho = \gamma$

$$\sigma_r^e = \sigma_r^p, \quad \sigma_\theta^e = \sigma_\theta^p, \quad \sigma_z^e = \sigma_z^p, \quad \varphi = 0 \quad (2.9)$$

Отсюда в силу (1.6) следует, что

при $\rho = \gamma$

$$(\sigma_\theta^e - \sigma_z^e)^2 + (\sigma_z^e - \sigma_r^e)^2 + (\sigma_r^e - \sigma_\theta^e)^2 = 6k^2 f^2(1)$$

Это условие дает возможность выразить постоянное интегрирования C через γ . Получим¹

$$C = \gamma^2 \frac{x \sqrt{3} \sqrt{f^2(1) [3 + \gamma^4(1 - 2\nu)^2] - (1 - 2\nu)^2 (q + \delta)^2 + (1 - 2\nu)^2 \gamma^2 (q + \delta)}}{3 + \gamma^4(1 - 2\nu)^2} \quad (2.10)$$

где $x = \pm 1$.

Формулы (2.8) и (2.10) определяют два решения в зависимости от выбора знака x . Из условия на окружности Γ_c (при $\rho = \gamma$), когда она совпадает с Γ_a (при $\gamma = \alpha$), т. е. в момент возникновения пластической области, ясно, что²

$$x = \text{sign} \{ p [3 + \alpha^4(1 - 2\nu)^2] - q [3 + \alpha^2(1 - 2\nu)^2] - \alpha^2(1 - \alpha^2)(1 - 2\nu)\delta \}$$

Таким образом знак x определяется однозначно из граничных условий.

Заметим, что в момент возникновения пластической области p , q и δ должны удовлетворять равенству

$$3(p - q)^2 + (1 - 2\nu)^2 [(p + \delta)\alpha^2 - (q + \delta)]^2 = 3f^2(1)(1 - \alpha^2)^2$$

Из формул (2.4) и (2.9) следует, что при $\rho = \gamma$

$$\sin \psi = \frac{\sigma_r^e - \sigma_\theta^e}{2kf(1)}, \quad \cos \psi = \frac{2\sigma_z^e - (\sigma_r^e + \sigma_\theta^e)}{2\sqrt{3}kf(1)}, \quad \varphi = 0$$

Эти условия в силу (2.8) могут быть представлены в виде

при $\varphi = 0$

$$\sin \psi = -\frac{C}{\gamma^2 f(1)}, \quad \cos \psi = -\frac{(1 - 2\nu)[C - (q + \delta)]}{\sqrt{3} f(1)}, \quad \rho = \gamma \quad (2.11)$$

где C дано формулой (2.10).

Формулы (2.11) определяют $\psi = \psi^*(\gamma, \delta)$ с точностью до числа, кратного 2π , не влияющего на компоненты напряжения.

¹ Предполагается, что q и δ таковы, что стоящее под знаком радикала выражение положительно.

² Функция $\text{sign } x$ определена равенствами

$$\text{sign } x = +1 \quad (x > 0), \quad \text{sign } x = -1 \quad (x < 0), \quad \text{sign } 0 = 0.$$

В кольцевой пластической области ($\alpha \leq \rho \leq \gamma$) определение компонент напряжения сводится к нахождению функций ψ и ρ из уравнений (2.5), (2.6) и условий (2.11). Пусть $\psi = \psi(\varphi; \gamma, \delta)$ есть решение уравнения (2.5), построенное при условии (2.11):

$$\psi(0; \gamma, \delta) = \psi^*(\gamma, \delta)$$

Тогда функция ρ в силу уравнения (2.6) и условия (2.11) определяется квадратурой

$$\rho = \gamma \exp \left\{ - \int_0^{\varphi} F_2[\varphi, \psi(\varphi; \gamma, \delta)] d\varphi \right\} = \rho(\varphi; \gamma, \delta)$$

Решение окончательно получается в виде $\psi = \psi(\varphi; \gamma, \delta)$, $\rho = \rho(\varphi; \gamma, \delta)$. Подстановка функции $\psi = \psi(\varphi; \gamma, \delta)$ в формулы (2.4) и (2.7) дает возможность найти компоненты напряжения в виде

$$\sigma_r^p = \sigma_r^p(\varphi; \gamma, \delta), \quad \sigma_\theta^p = \sigma_\theta^p(\varphi; \gamma, \delta), \quad \sigma_z^p = \sigma_z^p(\varphi; \gamma, \delta)$$

причем φ определена как функция ρ равенством

$$\rho(\varphi; \gamma, \delta) = \rho.$$

Значение p , определяющее давление внутри трубы¹, дается формулой

$$p = p(\gamma, \delta) = -\delta + f(1 + \tilde{\varphi}) \left\{ \left[1 + 2 \frac{1+\nu}{1-2\nu} (1 + \tilde{\varphi}) \right] \frac{\cos \tilde{\psi}}{\sqrt{3}} - \sin \tilde{\psi} \right\}$$

причем $\tilde{\varphi}(\gamma, \delta)$ находится из уравнения

$$\rho(\varphi; \gamma, \delta) = \alpha$$

а

$$\tilde{\psi}(\gamma, \delta) = \psi[\tilde{\varphi}(\gamma, \delta); \gamma, \delta]$$

В случае трубы конечной длины, не могущей удлиняться в осевом направлении, или бесконечно длинной трубы, параметр δ , входящий в предыдущие формулы, равен нулю и построенное решение будет выражено через один параметр γ .

В случае трубы конечной длины, могущей удлиняться, построенное решение выражено, вообще говоря, через два параметра γ и δ .

Силы, приложенные к поперечным сечениям на концах трубы, даются формулой

$$P = P(\gamma, \delta) = \pi b^2 \sigma_z^e (1 - \gamma^2) - 2\pi b^2 \int_0^{\tilde{\varphi}} \sigma_z^p \rho \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} d\varphi$$

Обычно по условию задачи один из параметров γ или δ бывает задан, тогда решение выражается через другой параметр. Например, в случае трубы, не могущей удлиняться в осевом направлении,

$$\delta = 0$$

На основании изложенной теории могут достаточно эффективно проводиться практические расчеты. Для этого к уравнениям (2.5) и (2.6) следует применять методы численного интегрирования. Примеры расчетов даны ниже.

§ 3. Решение упруго-пластической задачи по упрощенной теории

Теория Генки-Шнидта значительно упрощается при замене в пластической области уравнения (1.1) допущением о несжимаемости пластического материала

$$\epsilon = 0$$

¹ Напомним, что давление внутри трубы обозначено через kr .

В такой упрощенной постановке для частного случая материала со степенным упрочнением поставленная задача рассматривалась Н. М. Беляевым и А. К. Синициным [6].

Система уравнений такой упрощенной теории состоит из уравнения равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{d\rho} + \frac{\sigma_r - \sigma_0}{\rho} = 0 \quad (2.1)$$

и уравнений

$$(\sigma_r - \sigma_0)^2 = 4k^2 f^2 (1 + \varphi) - \frac{3k^2}{(1 + \varphi)^2} \frac{(1 - 2\nu)^2}{(1 + \nu)^2} \delta^2 \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\rho} \left(\sigma_r - \sigma_0 + 3k \frac{1 - 2\nu}{1 + \nu} \frac{\delta}{1 + \varphi} \right) + \\ & + \left(\sigma_r - \sigma_0 + 3k \frac{1 - 2\nu}{1 + \nu} \frac{\delta}{1 + \varphi} \right) \frac{d \ln(1 + \varphi)}{d\rho} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_0)}{\rho} = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$2\sigma_z = \sigma_r + \sigma_0 + 3k \frac{1 - 2\nu}{1 + \nu} \frac{\delta}{1 + \varphi} \quad (3.3)$$

заменяющих уравнения (1.5), (2.2) и (2.3).

Система трех уравнений (2.1), (3.1) и (3.2) содержит три неизвестные функции σ_r , σ_0 и φ . Таким образом компоненты напряжения σ_r и σ_0 могут быть найдены без рассмотрения компоненты σ_z .

Для удобства решения задачи переменные σ_r , σ_0 и ρ рассматриваются как искомые функции, а φ принимается за независимое переменное.

Имеем

$$\frac{d\sigma_r}{d\varphi} + (\sigma_r - \sigma_0) \frac{d \ln \rho}{d\varphi} = 0 \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\varphi} \left(\sigma_r - \sigma_0 + 3k \frac{1 - 2\nu}{1 + \nu} \frac{\delta}{1 + \varphi} \right) + 2(\sigma_r - \sigma_0) \frac{d \ln \rho}{d\varphi} + \\ & + \left(\sigma_r - \sigma_0 + 3k \frac{1 - 2\nu}{1 + \nu} \frac{\delta}{1 + \varphi} \right) \frac{1}{1 + \varphi} = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Решение системы трех уравнений (3.1), (3.4) и (3.5) имеет вид

$$\sigma_r = -\chi k \int_0^\varphi \frac{R(1 + \varphi)}{1 + \varphi} d\varphi - \chi k R(1 + \varphi) + C_1,$$

$$\sigma_0 = -\chi k \int_0^\varphi \frac{R(1 + \varphi)}{1 + \varphi} d\varphi + \chi k R(1 + \varphi) + C_1$$

$$\rho^2 = \frac{C_2}{(1 + \varphi) R(1 + \varphi)}$$

$$R(1 + \varphi) = \sqrt{f^2(1 + \varphi) - \frac{3(1 - 2\nu)^2 \delta^2}{4(1 + \nu)^2(1 + \varphi)^2}}, \quad \chi = \text{sign}(p - q)$$

В рамках упрощенной теории не удается полностью удовлетворить условию непрерывности всех компонент напряжения и деформации на границе упругой и пластической областей.

Предполагаем, что на этой границе компоненты напряжения σ_r и σ_0 непрерывны, а φ равно нулю. Следовательно, вдоль окружности Γ_c

при $\rho = r$

$$\sigma_r^e = \sigma_r^p, \quad \sigma_0^e = \sigma_0^p, \quad \varphi = 0 \quad (3.6)$$

Можно потребовать, чтобы на указанной границе σ_r и T были непре-

ривными, а φ равно нулю. Следовательно, вдоль окружности Γ_c при $\rho = \gamma$

$$\sigma_r^e = \sigma_r^p, \quad (\sigma_\theta^e - \sigma_z^e)^2 + (\sigma_z^e - \sigma_r^e)^2 + (\sigma_r^e - \sigma_\theta^e)^2 = 6k^2 f^2(1) \quad \varphi = 0$$

Условия (3.6) дают возможность найти постоянные интегрирования C_1, C_2 и постоянную C , входящую в формулы (2.8).

В кольцевой упругой области ($\gamma \leq \rho \leq 1$)

$$\begin{aligned} \sigma_r^e &= -kq - \alpha k \gamma^2 R(1) \left(\frac{1}{\rho^2} - 1 \right) \\ \sigma_\theta^e &= -kq + \alpha k \gamma^2 R(1) \left(\frac{1}{\rho^2} + 1 \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

В кольцевой пластической области ($\alpha \leq \rho \leq \gamma$)

$$\begin{aligned} \sigma_r^p &= -kq + \alpha k \gamma^2 R(1) - \alpha k R(1 + \varphi) - \alpha k \int_0^\varphi \frac{R(1 + \varphi)}{1 + \varphi} d\varphi \\ \sigma_\theta^p &= -kq + \alpha k \gamma^2 R(1) + \alpha k R(1 + \varphi) - \alpha k \int_0^\varphi \frac{R(1 + \varphi)}{1 + \varphi} d\varphi \end{aligned} \quad (3.8)$$

где

$$\rho^2 = \gamma^2 \frac{R(1)}{(1 + \varphi) R(1 + \varphi)}, \quad \alpha = \text{sign}(p - q),$$

$$R(1 + \varphi) = \sqrt{f^2(1 + \varphi) - \frac{3(1 - 2\nu)^2 \delta^2}{4(1 + \nu)^2 (1 + \varphi)^2}}$$

Значения $p = p(\gamma, \delta)$ при заданном q определяются по формуле

$$p = p(\gamma, \delta) = q + \alpha \frac{\gamma^2}{\alpha^2} R(1) \left(\frac{1}{1 + \tilde{\varphi}(\gamma, \delta)} - \alpha^2 \right) + \alpha \int_0^{\tilde{\varphi}(\gamma, \delta)} \frac{R(1 + \varphi)}{1 + \varphi} d\varphi$$

где $\tilde{\varphi}(\gamma, \delta)$ определено уравнением

$$(1 + \varphi) R(1 + \varphi) = \frac{\gamma^2}{\alpha^2} R(1)$$

Компонента напряжения σ_z дается формулами

$$\sigma_z^e = \nu(\sigma_r^e + \sigma_\theta^e) + k(1 - 2\nu)\delta, \quad \sigma_z^p = \frac{1}{2}(\sigma_r^p + \sigma_\theta^p) + \frac{3k(1 - 2\nu)\delta}{2(1 + \nu)(1 + \varphi)}$$

Она претерпевает, вообще говоря, конечный скачок на окружности Γ_c , если в упругой области $\nu \neq \frac{1}{2}$.

Отметим еще раз, что в рамках упрощенной теории не удастся полностью удовлетворить условию непрерывности всех компонент напряжения и деформации на границе упругой и пластической областей, поэтому применение этой теории, строго говоря, допустимо лишь в чисто пластических задачах, когда упругой области вовсе нет.

В случае трубы, не могущей удлиняться в осевом направлении (например бесконечно длинной трубы) $\delta = 0$, и функцию $R(1 + \varphi)$ следует заменить на $f(1 + \varphi)$.

Остановимся на этом случае подробнее.

а. Идеальная пластичность:

$$f = 1 \text{ для } x \geq 1 \quad (1.5a)$$

В кольцевой упругой области ($\gamma \leq \rho \leq 1$) по формулам (3.7)

$$\sigma_r^e = -kq - xk\gamma^2 \left(\frac{1}{\rho^2} - 1 \right), \quad \sigma_\theta^e = -kq + xk\gamma^2 \left(\frac{1}{\rho^2} + 1 \right) \quad (3.7a)$$

В кольцевой пластической области ($\alpha \leq \rho \leq \gamma$) в силу (3.8) и (1.5a)

$$\sigma_r^p = -kp + 2xk \ln \frac{\rho}{\alpha}, \quad \sigma_\theta^p = -kp + 2xk \left(1 + \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \quad (3.8a)$$

причем

$$p = q + x \left(1 - \gamma^2 + 2 \ln \frac{\gamma}{\alpha} \right)$$

Эти формулы приведены в книге Надаи [5].

б. Линейное упрочнение:

$$f(x) = 1 \quad \text{для } 1 \leq x \leq \frac{1-n}{\lambda}$$

$$f(x) = \frac{n}{1-\lambda x} \quad \text{для } x \geq \frac{1-n}{\lambda} \quad (1.5b)$$

В кольцевой упругой области ($\gamma \leq \rho \leq 1$) компоненты напряжения попрежнему даются формулами (3.7a).

В кольцевой пластической области ($\alpha \leq \rho \leq \gamma$) в силу (3.8) и (1.5b)

для $\alpha \leq \rho \leq \gamma^*$

$$\sigma_r^p = -kp + xk \left[2n \ln \frac{\rho}{\alpha} + \lambda \frac{\gamma^2}{\rho^2} \left(1 - \frac{\alpha^2}{\rho^2} \right) \right]$$

$$\sigma_\theta^p = -kp + xk \left[2n \left(1 + \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) + \lambda \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{\rho^2} \right) \right] \quad (3.8b)$$

причем

$$p = q + x \left[n \left(1 + 2 \ln \frac{\gamma}{\alpha} \right) - \gamma^2 + (1-n) \ln \frac{1-n}{\lambda} + \lambda \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \right]$$

для $\gamma^* \leq \rho \leq \gamma$

$$\sigma_r^p = -kq - xk \left(1 - \gamma^2 + 2 \ln \frac{\gamma}{\rho} \right), \quad \sigma_\theta^p = -kq + xk \left(1 + \gamma^2 - 2 \ln \frac{\gamma}{\rho} \right)$$

Здесь $\gamma^* = \gamma \sqrt{\frac{\lambda}{1-n}}$ определяет окружность Γ_{c^*} радиуса c^* (фиг. 1), отделяющую идеально-пластическую область от области линейного упрочнения ($\gamma^* = c^*/b$).

с. Степенное упрочнение:

$$f(x) = 1 \quad \text{для } 1 \leq x \leq \lambda^{-\frac{1-\mu}{\mu}}$$

$$f(x) = \lambda x^{\frac{\mu}{1-\mu}} \quad \text{для } x \geq \lambda^{-\frac{1-\mu}{\mu}} \quad (1.5c)$$

В кольцевой упругой области ($\gamma \leq \rho \leq 1$) компоненты напряжения попрежнему даются формулами (3.7a).

В кольцевой пластической области ($\alpha \leq \rho \leq \gamma$) в силу (3.8) и (1.5c)

для $\alpha \leq \rho \leq \gamma^*$

$$\sigma_r^p = -kp + \frac{xk}{\mu} \lambda^{1-\mu} \left(\frac{\gamma}{\alpha} \right)^{2\mu} \left[1 - \left(\frac{\alpha}{\rho} \right)^{2\mu} \right]$$

$$\sigma_\theta^p = -kp + \frac{xk}{\mu} \lambda^{1-\mu} \left(\frac{\gamma}{\alpha} \right)^{2\mu} \left[1 - (1-2\mu) \left(\frac{\alpha}{\rho} \right)^{2\mu} \right] \quad (3.8c)$$

причем

$$p = q + x \left\{ \frac{1}{\mu} \left[\lambda^{1-\mu} \left(\frac{\gamma}{\alpha} \right)^{2\mu} - 1 - (1-\mu) \ln \lambda \right] + (1-\gamma^2) \right\}$$

для $\gamma^* \leq \rho \leq \gamma$ (3.8с)

$$\sigma_r^p = -kq - \chi k \left(1 - \gamma^2 + 2 \ln \frac{\gamma}{\rho} \right), \quad \sigma_\theta^p = -kq + \chi k \left(1 + \gamma^2 - 2 \ln \frac{\gamma}{\rho} \right)$$

Здесь $\gamma^* = \gamma \lambda^{\frac{1-\mu}{2\mu}}$ определяет окружность Γ_c радиуса c^* (фиг. 1), отделяющую идеально-пластическую область от области степенного упрочнения ($\gamma^* = c^*/b$).

Аналогичные формулы (в несколько ином виде) были получены Н. М. Беляевым и А. К. Сеницким^[6].

§ 4. Пример расчета

В качестве примера рассмотрим задачу об определении напряжений и деформаций в цилиндрической трубе, не могущей удлиняться в осевом направлении ($\delta = 0$) и находящейся только под действием внутреннего давления (внешнее давление отсутствует) при постепенном расширении пластической области.

Пусть $\alpha = 0.5$, а γ последовательно принимает значения 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0.

Так как $\delta = 0$, $q = 0$, $p > 0$, то

$$\chi = \text{sign } p = +1$$

Поставленную задачу рассмотрим для трех частных видов функции F , приведенных в § 1.

а. Идеальная пластичность

$$f = 1 \text{ для } \chi \geq 1 \quad (1.5a)$$

В кольцевой упругой области компоненты напряжения даются формулами (2.8) и (2.10), которые при $\delta = 0$, $q = 0$, $f = 1$ и $\chi = +1$ имеют вид

$$\sigma_r^e = -\frac{\sqrt{3}k\gamma^2}{\sqrt{3 + \gamma^4(1-2\nu)^2}} \left(\frac{1}{\rho^2} - 1 \right), \quad \sigma_\theta^e = \frac{\sqrt{3}k\gamma^2}{\sqrt{3 + \gamma^4(1-2\nu)^2}} \left(\frac{1}{\rho^2} + 1 \right) \quad (4.1)$$

$$\sigma_z^e = \frac{2\nu\sqrt{3}k\gamma^2}{\sqrt{3 + \gamma^4(1-2\nu)^2}}$$

В момент возникновения пластической области p должно иметь вид

$$p = \frac{\sqrt{3}(1-\alpha^2)}{\sqrt{3 + \alpha^4(1-2\nu)^2}} \quad (4.2)$$

При вычислениях принимаем $\nu = 0.25$.

В пластической области определение компонент напряжения сводится к заполнению табл. 1 (а).

Условия (2.11) при $\delta = 0$, $q = 0$, $f = 1$ и $\chi = +1$ могут быть переписаны в виде $[\Phi = \ln(1 + \varphi)]$:

при $\Phi = 0$

$$\psi = \psi^*(\gamma) = \pi + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3 + \gamma^4(1-2\nu)^2}}, \quad \rho = \gamma \quad (4.3)$$

где под \arcsin подразумевается его значение, заключающееся между 0 и $+\frac{\pi}{2}$; число, кратное 2π , не влияющее на компоненты напряжения, опущено.

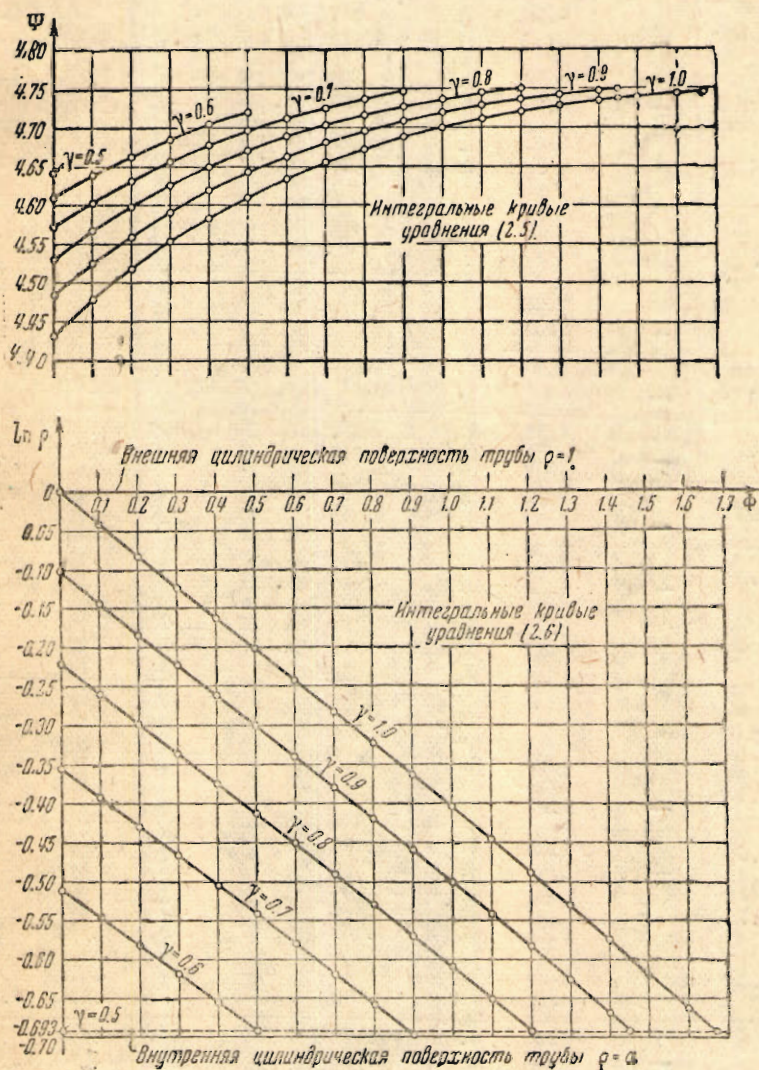
Заполнение табл. 1 (а) проводится в следующем порядке.

В клетке 0-го столбца этой таблицы занесены значения ψ^* (γ) и $-\ln \gamma$ для $\gamma = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0$. При помощи формул

$$\psi_{k+1} = \psi_k + \Delta\Phi \frac{[3(1-2\nu) + 2(1+\nu) \exp \Phi_k] \operatorname{ctg} \psi_k + \sqrt{3}(1-2\nu)}{2[2(1-2\nu) + (1+\nu) \exp \Phi_k]} \quad (4.4)$$

$$(\ln \rho)_{k+1} = (\ln \rho)_k - \Delta\Phi \frac{2(1+\nu) \exp \Phi_k \operatorname{cosec}^2 \psi_k + (1-2\nu)(1 + \sqrt{3} \operatorname{ctg} \psi_k)^2}{4[2(1-2\nu) + (1+\nu) \exp \Phi_k]}$$

полученных из уравнений (2.5) и (2.6) при $f=1$, последовательно вычисляются значения ψ и $\ln \rho$ во всех клетках каждой строки по значениям в нулевой клетке¹.



Фиг. 6

¹ Вычисление значений ψ и $\ln \rho$ в каждой строке обрываются на тех клетках, в которых $\ln \rho \leq \ln \alpha = -0.693$, т. е. $\rho \leq \alpha$.

		k	0	1	2	3	4	5	6	7
γ	Φ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	
		(a) Идеальная пластичность								
0.5	ψ $-\ln p$	4.641 0.693								
0.6	ψ $-\ln p$	4.609 0.511	4.638 0.546	4.662 0.582	4.684 0.618	4.703 0.655	4.719 0.692			
0.7	ψ $-\ln p$	4.572 0.356	4.602 0.393	4.630 0.430	4.655 0.467	4.677 0.504	4.695 0.542	4.711 0.580	4.724 0.619	
0.8	ψ $-\ln p$	4.530 0.223	4.566 0.261	4.597 0.299	4.625 0.337	4.649 0.375	4.670 0.413	4.688 0.451	4.703 0.490	
0.9	ψ $-\ln p$	4.483 0.105	4.523 0.145	4.558 0.185	4.590 0.224	4.617 0.262	4.641 0.301	4.662 0.340	4.679 0.380	
1.0	ψ $-\ln p$	4.432 0	4.477 0.042	4.517 0.084	4.552 0.124	4.582 0.164	4.609 0.204	4.633 0.243	4.654 0.283	
(b) Линейное упрочнение										
γ	Φ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.57	0.6	
		(b) Линейное упрочнение								
0.5	ψ $-\ln p$	4.641 0.693								
0.6	ψ $-\ln p$	4.609 0.511	4.638 0.546	4.662 0.582	4.684 0.618	4.703 0.655	4.719 0.692			
0.7	ψ $-\ln p$	4.572 0.356	4.604 0.393	4.632 0.430	4.656 0.467	4.677 0.504	4.695 0.542	4.707 0.568	4.711 0.583	
0.8	ψ $-\ln p$	4.530 0.223	4.566 0.261	4.597 0.299	4.625 0.337	4.649 0.375	4.670 0.413	4.682 0.440	4.687 0.455	
0.9	ψ $-\ln p$	4.483 0.105	4.523 0.145	4.558 0.185	4.589 0.224	4.617 0.262	4.641 0.301	4.655 0.328	4.661 0.344	
1.0	ψ $-\ln p$	4.432 0	4.477 0.042	4.516 0.084	4.552 0.124	4.582 0.164	4.609 0.204	4.626 0.232	4.633 0.246	
(c) Степенное упрочнение										
γ	Φ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.57	0.6	
		(c) Степенное упрочнение								
0.5	ψ $-\ln p$	4.641 0.693								
0.6	ψ $-\ln p$	4.609 0.511	4.638 0.546	4.662 0.582	4.684 0.618	4.703 0.655	4.719 0.692			
0.7	ψ $-\ln p$	4.572 0.356	4.604 0.393	4.632 0.430	4.656 0.467	4.677 0.504	4.695 0.542	4.707 0.568	4.711 0.583	
0.8	ψ $-\ln p$	4.530 0.223	4.566 0.261	4.597 0.299	4.625 0.337	4.649 0.375	4.670 0.413	4.682 0.440	4.687 0.454	
0.9	ψ $-\ln p$	4.483 0.105	4.523 0.145	4.558 0.185	4.589 0.224	4.617 0.262	4.641 0.301	4.655 0.328	4.661 0.341	
1.0	ψ $-\ln p$	4.432 0	4.477 0.042	4.516 0.084	4.552 0.124	4.582 0.164	4.609 0.204	4.626 0.232	4.633 0.244	

Значения ψ и $\ln p$, набранные курсивом, получены путем линейной интерполяции.

Таблица 4

8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.45	1.5	1.6	1.67	
4.736 0.658	4.743 0.694										
4.716 0.530	4.727 0.570	4.736 0.610	4.744 0.652	4.750 0.694							
4.695 0.419	4.708 0.460	4.719 0.501	4.728 0.542	4.736 0.584	4.742 0.627	4.747 0.670	4.749 0.692				
4.671 0.323	4.687 0.364	4.700 0.405	4.711 0.447	4.720 0.489	4.728 0.531	4.734 0.575	4.737 0.597	4.739 0.618	4.743 0.663	4.745 0.693	
0.7	0.8	0.816	0.9	1.0	1.041	1.1	1.2	1.217	1.3	1.354	
4.724 0.633	4.735 0.684	4.736 0.693									
4.703 0.505	4.717 0.557		4.728 0.611	4.736 0.668	4.739 0.693						
4.680 0.394	4.696 0.446		4.710 0.501	4.721 0.558		4.729 0.618	4.736 0.682	4.737 0.693			
4.655 0.297	4.674 0.350		4.690 0.405	4.704 0.463		4.715 0.523	4.724 0.586		4.730 0.654	4.733 0.693	
0.7	0.8	0.825	0.9	1.0	1.077	1.1	1.2	1.293	1.3	1.4	1.487
4.724 0.631	4.735 0.681	4.737 0.693									
4.703 0.503	4.717 0.553		4.728 0.603	4.737 0.653	4.742 0.693						
4.680 0.390	4.696 0.440		4.709 0.490	4.720 0.541		4.729 0.592	4.737 0.643	4.742 0.693			
4.655 0.285	4.674 0.335		4.690 0.385	4.703 0.437		4.714 0.489	4.723 0.544		4.730 0.593	4.736 0.646	4.740 0.693

Таблица 2

		(a) Идеальная пластичность					(b) Линейное упрочнение					(c) Степенное упрочнение											
ρ	γ	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	4.0	ρ	γ	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	4.0	ρ	γ	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	4.0
		$\frac{\sigma_1}{k}$	$\frac{\sigma_2}{k}$	$\frac{\sigma_3}{k}$	$\frac{\sigma_4}{k}$	$\frac{\sigma_5}{k}$	$\frac{\sigma_6}{k}$			$\frac{\sigma_7}{k}$	$\frac{\sigma_8}{k}$	$\frac{\sigma_9}{k}$	$\frac{\sigma_{10}}{k}$	$\frac{\sigma_{11}}{k}$	$\frac{\sigma_{12}}{k}$			$\frac{\sigma_{13}}{k}$	$\frac{\sigma_{14}}{k}$	$\frac{\sigma_{15}}{k}$	$\frac{\sigma_{16}}{k}$	$\frac{\sigma_{17}}{k}$	$\frac{\sigma_{18}}{k}$
0.5	0.5	0.75	1.03	1.25	1.38	1.46	1.50	0.5	0.5	0.75	1.03	1.24	1.42	1.56	1.67	0.5	0.5	0.75	1.03	1.24	1.40	1.53	1.65
0.6	0.6	0.44	0.64	0.83	0.97	1.05	1.10	0.6	0.6	0.44	0.64	0.83	0.97	1.06	1.12	0.6	0.6	0.44	0.64	0.83	0.98	1.08	1.16
0.7	0.7	0.26	0.37	0.50	0.64	0.72	0.76	0.7	0.7	0.26	0.37	0.51	0.64	0.73	0.75	0.7	0.7	0.26	0.37	0.51	0.64	0.73	0.79
0.8	0.8	0.14	0.20	0.27	0.35	0.43	0.47	0.8	0.8	0.14	0.20	0.27	0.35	0.43	0.47	0.8	0.8	0.14	0.20	0.27	0.35	0.43	0.47
0.9	0.9	0.06	0.08	0.11	0.15	0.18	0.23	0.9	0.9	0.06	0.08	0.11	0.15	0.18	0.23	0.9	0.9	0.06	0.08	0.11	0.15	0.18	0.23
1.0	1.0	0	0	0	0	0	0	1.0	1.0	0	0	0	0	0	0	1.0	1.0	0	0	0	0	0	0
0.5	0.5	1.25	0.97	0.75	0.62	0.54	0.50	0.5	0.5	1.25	0.97	0.88	0.88	0.92	1.01	0.5	0.5	1.25	0.97	0.86	0.81	0.78	0.76
0.6	0.6	0.94	1.35	1.17	1.03	0.95	0.90	0.6	0.6	0.94	1.35	1.17	1.09	1.12	1.18	0.6	0.6	0.94	1.35	1.17	1.08	1.07	1.08
0.7	0.7	0.76	1.09	1.48	1.36	1.28	1.24	0.7	0.7	0.76	1.09	1.48	1.36	1.29	1.35	0.7	0.7	0.76	1.09	1.48	1.36	1.29	1.31
0.8	0.8	0.64	0.92	1.25	1.01	1.55	1.52	0.8	0.8	0.64	0.92	1.25	1.01	1.55	1.52	0.8	0.8	0.64	0.92	1.25	1.01	1.55	1.52
0.9	0.9	0.56	0.80	1.09	1.40	1.75	1.74	0.9	0.9	0.56	0.80	1.09	1.40	1.75	1.74	0.9	0.9	0.56	0.80	1.09	1.40	1.75	1.74
1.0	1.0	0.50	0.72	0.97	1.26	1.58	1.92	1.0	1.0	0.50	0.72	0.97	1.26	1.58	1.92	1.0	1.0	0.50	0.72	0.97	1.26	1.58	1.92
0.5	0.5	0.12	-0.02	-0.19	-0.32	-0.40	-0.44	0.5	0.5	0.12	-0.02	-0.14	-0.22	-0.26	-0.28	0.5	0.5	0.12	-0.02	-0.14	-0.24	-0.32	-0.39
0.6	0.6	0.12	0.18	0.11	0.02	-0.06	-0.12	0.6	0.6	0.12	0.18	0.11	0.04	0.02	0.03	0.6	0.6	0.12	0.18	0.11	0.04	-0.01	-0.03
0.7	0.7	0.12	0.18	0.24	0.23	0.20	0.19	0.7	0.7	0.12	0.18	0.24	0.23	0.20	0.22	0.7	0.7	0.12	0.18	0.24	0.23	0.20	0.20
0.8	0.8	0.12	0.18	0.24	0.32	0.34	0.36	0.8	0.8	0.12	0.18	0.24	0.31	0.34	0.36	0.8	0.8	0.12	0.18	0.24	0.31	0.34	0.36
0.9	0.9	0.12	0.18	0.24	0.32	0.40	0.45	0.9	0.9	0.12	0.18	0.24	0.31	0.39	0.45	0.9	0.9	0.12	0.18	0.24	0.31	0.39	0.45
1.0	1.0	0.12	0.18	0.24	0.32	0.40	0.48	1.0	1.0	0.12	0.18	0.24	0.31	0.39	0.48	1.0	1.0	0.12	0.18	0.24	0.31	0.39	0.48

Приращение независимого переменного Φ , определяющее точность расчета, принято равным

$$\Delta\Phi = 0.1$$

На фиг. 6 изображены интегральные кривые уравнений (2.5) и (2.6), построенные по координатам точек, вычисленным в табл. 1(a).

В табл. 2(a) занесены найденные значения компонент напряжения при $\gamma = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0$, для $\rho = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0$. Цифры первой строки (набранные жирно) определяют значения внутренних давлений $k\rho$, соответствующих рассматриваемым значениям γ .

Для сравнения приводим решение того же примера по упрощенной теории. Перепишем формулы (3.7a) и (3.8a) при $q = 0$ и $\kappa = +1$

$$\sigma_r^e = -k\gamma^2 \left(\frac{1}{\rho^2} - 1 \right), \quad \sigma_\theta^e = k\gamma^2 \left(\frac{1}{\rho^2} + 1 \right) \quad (4.5)$$

$$\sigma_r^p = -k \left(1 - \gamma^2 + 2\ln \frac{\gamma}{\rho} \right), \quad \sigma_\theta^p = k \left(1 + \gamma^2 - 2\ln \frac{\gamma}{\rho} \right) \quad (4.6)$$

Значение p , определяющее внутреннее давление в трубе, дается формулой

$$p = 1 - \gamma^2 + 2\ln \frac{\gamma}{\alpha}$$

В момент возникновения пластической области p должно иметь вид

$$p = 1 - \alpha^2$$

В табл. 3(a) приведены значения компонент напряжения¹ σ_r и σ_θ при $\gamma = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0$ для $\rho = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0$

б. Линейное упрочнение:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 & \text{для } 1 \leq x \leq \frac{1-n}{\lambda} \\ f(x) &= \frac{n}{1-\lambda x} & \text{для } x \geq \frac{1-n}{\lambda} \end{aligned} \quad (1.5b)$$

При вычислениях принимаем $m = 50$, $n = 0.82$, $G/k = 500$, при этом $\lambda = mk/G = 0.10$.

В кольцевой упругой области ($\gamma \leq \rho \leq 1$) компоненты напряжения поперекнему даются формулами (4.1).

В кольцевой пластической области ($\alpha \leq \rho \leq \gamma$) определение компонент напряжения сводится к заполнению табл. 1(b). Значения ψ и $\ln \rho$ для $0 \leq \Phi \leq \ln \frac{1-n}{\lambda}$ поперекнему вычисляются из формул (4.4), исходя из значений (4.3) в клетках 0-го столбца. Таким образом столбцы 0—5 табл. 1(a) и 1(b) совпадают. Клетки столбца 6, соответствующие $\Phi = \ln \frac{1-n}{\lambda}$, заполнены путем линейной интерполяции. Значения ψ и $\ln \rho$ для $\Phi \geq \ln \frac{1-n}{\lambda}$ во всех клетках² каждой строки вычисляются по значениям в клетках столбца 6 при помощи формул

¹ Подчеркнутые цифры в табл. 2(a) и 3(a) соответствуют границам упругих и пластических областей.

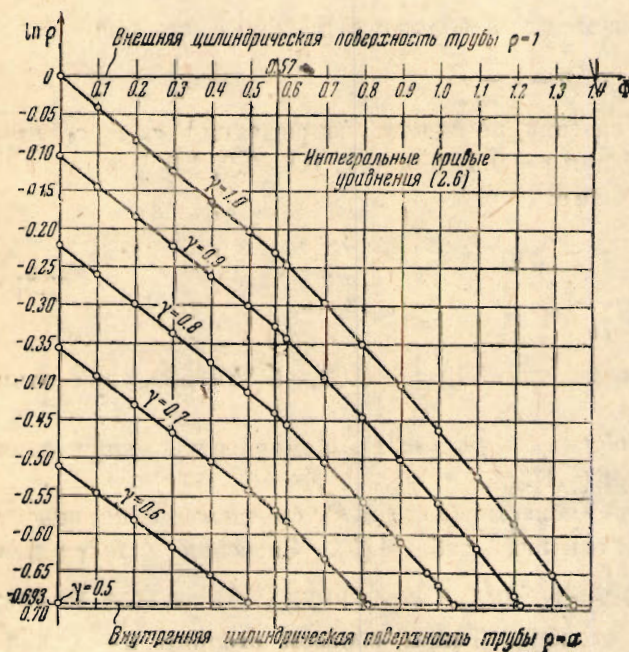
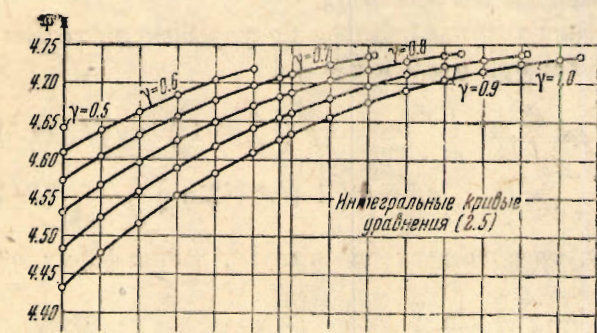
² Вычисление значений ψ и $\ln \rho$ в каждой строке обрывается на тех клетках, в которых $\ln \rho \leq \ln \alpha = -0.693$, т. е. $\rho \leq \alpha$.

$$\psi_{k+1} = \psi_k + \Delta\Phi \left\{ \frac{\lambda \exp \Phi_k}{1 - \lambda \exp \Phi_k} \operatorname{ctg} \psi_k + \frac{[3(1-2\nu) + 2(1+\nu) \exp \Phi_k] \operatorname{ctg} \psi_k + \sqrt{3(1-2\nu)}}{2[2(1-2\nu) + (1+\nu) \exp \Phi_k]} \right\} \quad (4.7)$$

$$(\ln \rho)_{k+1} = (\ln \rho)_k - \frac{\Delta\Phi}{2} \left\{ \frac{\lambda \exp \Phi_k}{1 - \lambda \exp \Phi_k} + \frac{2(1+\nu) \exp \Phi_k \operatorname{cosec}^2 \psi_k + (1-2\nu)(1 + \sqrt{3} \operatorname{ctg} \psi_k)^2}{2[2(1-2\nu) + (1+\nu) \exp \Phi_k]} \right\}$$

полученных из (2.5) и (2.6) при $f(x) = \frac{n}{1-\lambda x}$.

На фиг. 7 изображены интегральные кривые уравнений (2.5) и (2.6), построенные по координатам точек, приведенным в табл. 1(b). Эти кривые



Фиг. 7

для $\alpha \leq \rho \leq \gamma^*$

$$\sigma_r^p = -k \left\{ n \left(1 + 2 \ln \frac{\gamma}{\rho} \right) - \gamma^2 + (1-n) \ln \frac{1-n}{\lambda} + \lambda \frac{\gamma^2}{\rho^2} \right\}$$

$$\sigma_\theta^p = +k \left\{ n \left(1 - 2 \ln \frac{\gamma}{\rho} \right) + \gamma^2 - (1-n) \ln \frac{1-n}{\lambda} + \lambda \frac{\gamma^2}{\rho^2} \right\}$$

¹ Подчеркнутые цифры табл. 2(b) и 3(b) соответствуют границам упругих и пластических областей.

претерпевают переломы в точках, соответствующих

$$\Phi = \ln \frac{1-n}{\lambda} = 0.57.$$

В табл. 2(b) записаны найденные значения компонент напряжения при $\gamma = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0$ для $\rho = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0$. Цифры первой строки (набранные жирно) определяют значения внутренних давлений $k\rho$, соответствующих рассматриваемым значениям γ .

В табл. 3(b) приведены значения компонент напряжения σ_r и σ_θ , найденные по упрощенной теории ¹.

Вычисления этих величин проведены следующим образом.

В упругой ($\gamma \leq \rho \leq 1$) области компоненты напряжения вычислены по формулам (4.5).

В кольцевой пластической области ($\alpha \leq \rho \leq \gamma$) компоненты напряжения вычислены по формулам (3.8b), которые при $q = 0$ и $\kappa = +1$ имеют вид:

для $\gamma^* \leq \rho \leq \gamma$ (4.8)

$$\sigma_r^p = -k \left(1 - \gamma^2 + 2 \ln \frac{\gamma}{\rho} \right), \quad \sigma_\theta^p = +k \left(1 + \gamma^2 - 2 \ln \frac{\gamma}{\rho} \right)$$

$$\text{где } \gamma^* = \gamma \sqrt{\frac{\lambda}{1-n}}$$

с. Степенное упрочнение:

$$j(x) = 1 \quad \text{для } 1 \leq x \leq \lambda^{-\frac{1-\mu}{\mu}} \quad (1.5c)$$

$$f(x) = \lambda x^{\frac{\mu}{1-\mu}} \quad \text{для } x \geq \lambda^{-\frac{1-\mu}{\mu}}$$

При вычислениях принимаем $m = 2.56$, $\mu = 1/6$, $G/k = 500$, при этом

$$\lambda = m^{\frac{1}{1-\mu}} \left(\frac{k}{G} \right)^{\frac{\mu}{1-\mu}} = 0.89.$$

В кольцевой упругой области ($\gamma \leq \rho \leq 1$) компоненты напряжения поперекнему даются формулами (4.1)

В кольцевой пластической области определение компонент напряжения сводится к заполнению табл. 1 (с). Столбцы 0—5 табл. 1 (а) и 1 (с) совпадают. Клетки столбца 6, соответствующие $\Phi = -\frac{1-\mu}{\mu} \ln \lambda$, заполнены путем линейной интерполяции. Значения ψ и $\ln \rho$ для $\Phi \geq -\frac{1-\mu}{\mu} \ln \lambda$ вычисляются при помощи формул¹

$$\psi_{k+1} = \psi_k + \Delta\Phi \left\{ \frac{\mu}{1-\mu} \operatorname{ctg} \psi_k + \frac{[3(1-2\nu) + 2(1+\nu)\exp\Phi_k] \operatorname{ctg} \psi_k + \sqrt{3}(1-2\nu)}{2[2(1-2\nu) + (1+\nu)\exp\Phi_k]} \right\} \quad (4.9)$$

$$(\ln \rho)_{k+1} = (\ln \rho)_k - \frac{\Delta\Phi}{2} \left\{ \frac{\mu}{1-\mu} + \frac{2(1+\nu)\exp\Phi_k \operatorname{cosec}^2 \psi_k + (1-2\nu)(1 + \sqrt{3} \operatorname{ctg} \psi_k)^2}{2[2(1-2\nu) + (1+\nu)\exp\Phi_k]} \right\}$$

полученных из (2.5) и (2.6) при $f(x) = \lambda x^{\frac{\mu}{1-\mu}}$.

На фиг. 8 изображены интегральные кривые уравнений (2.5) и (2.6), построенные по координатам точек, вычисленным в табл. 1 (с). Эти кривые претерпевают переломы в точках, соответствующих $\Phi = -\frac{1-\mu}{\mu} \ln \lambda = 0.57$.

В табл. 2 (с) занесены найденные значения компонент напряжения при $\gamma = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0$, для $\rho = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0$. Цифры первой строки (набранные жирно) определяют значения внутренних давлений $k\rho$, соответствующих рассматриваемым значениям γ .

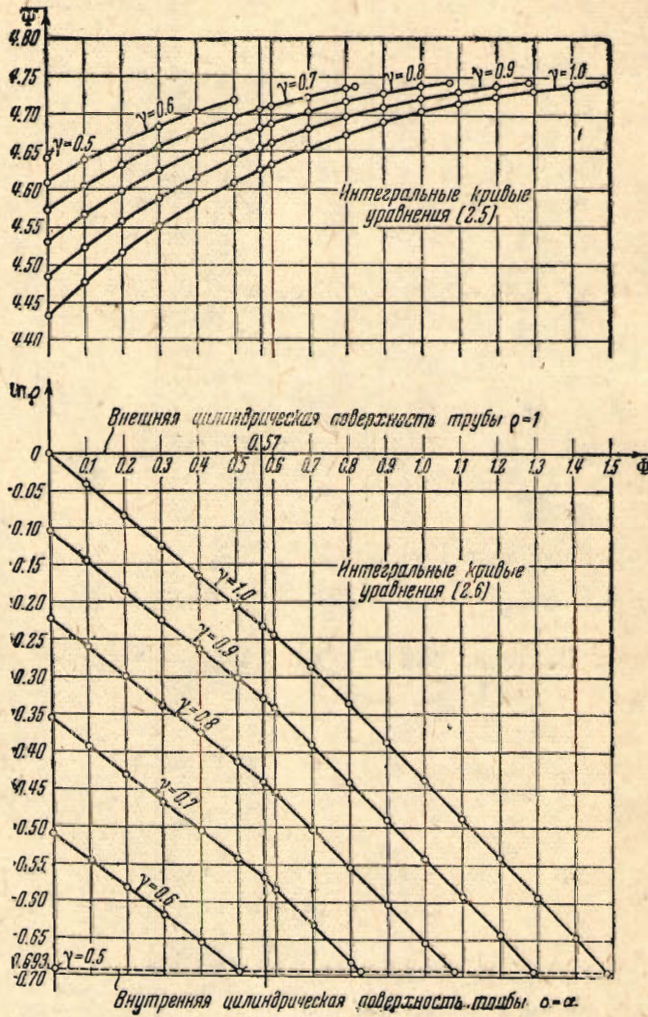
В табл. 3 (с) приведены значения компонент напряжения σ_r и σ_θ найденные по упрощенной теории².

¹ Вычисление значений ψ и $\ln \rho$ в каждой строке обрывается на тех клетках, в которых $\ln \rho \leq \ln \lambda = -0.573$, т. е. $\rho \leq \lambda$.

² Подчернутые цифры в табл. 2 (с) и 3 (с) соответствуют границам упругих и пластических областей.

Вычисления этих величин проведены следующим образом.

В упругой ($\gamma_1 \leq \rho \leq 1$) области компоненты напряжения вычислены по формулам (4.5).



Фиг. 8

В кольцевой пластической области ($\alpha \leq \rho \leq \gamma$) компоненты напряжения вычислены по формулам (3.8с), которые при $q=0$ и $x=+1$ имеют вид:

для $\alpha^* \leq \rho \leq \gamma^*$

$$\sigma_r^p = -k \left\{ \frac{1}{\mu} \left[\lambda^{1-\mu} \left(\frac{\gamma}{\rho} \right)^{2\mu} - 1 - (1-\mu) \ln \lambda \right] + (1-\gamma^2) \right\}$$

$$\sigma_\theta^p = +k \left\{ \frac{1}{\mu} \left[1 - \lambda^{1-\mu} (1-2\mu) \left(\frac{\gamma}{\rho} \right)^{2\mu} + (1-\mu) \ln \lambda \right] - (1-\gamma^2) \right\}$$

для $\gamma^* \leq \rho \leq \gamma$

$$\sigma_r^p = -k \left(1 - \gamma^2 + 2 \ln \frac{\gamma}{\rho} \right), \quad \sigma_\theta^p = +k \left(1 + \gamma^2 - 2 \ln \frac{\gamma}{\rho} \right)$$

(4.10)

где

$$\gamma^* = \gamma \lambda^{\frac{1-\mu}{2\mu}}$$

Таблица 3

		$\rho \backslash \gamma$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
(a) Идеальная пластичность	$\frac{\sigma_r}{k}$	0.5	<u>0.75</u>	<u>1.00</u>	<u>1.18</u>	<u>1.30</u>	<u>1.37</u>	<u>1.39</u>
		0.6	0.44	<u>0.64</u>	0.82	0.93	1.00	1.02
		0.7	0.26	0.37	<u>0.51</u>	0.63	0.69	0.71
		0.8	0.14	0.20	0.28	<u>0.36</u>	0.43	0.45
		0.9	0.06	0.08	0.11	0.15	<u>0.19</u>	0.21
		1.0	0	0	0	0	0	<u>0</u>
	$\frac{\sigma_\theta}{k}$	0.5	<u>1.25</u>	<u>1.00</u>	0.82	0.70	0.63	0.61
		0.6	0.94	<u>1.36</u>	<u>1.18</u>	<u>1.07</u>	<u>1.00</u>	0.98
		0.7	0.76	<u>1.09</u>	<u>1.49</u>	<u>1.37</u>	<u>1.31</u>	<u>1.29</u>
		0.8	0.64	0.92	<u>1.26</u>	<u>1.64</u>	<u>1.57</u>	<u>1.55</u>
		0.9	0.56	0.80	<u>1.09</u>	<u>1.41</u>	<u>1.81</u>	<u>1.79</u>
		1.0	0.50	0.72	0.98	1.28	<u>1.62</u>	<u>2.00</u>
(b) Линейное упрочнение	$\frac{\sigma_r}{k}$	0.5	<u>0.75</u>	<u>1.00</u>	<u>1.18</u>	<u>1.31</u>	<u>1.41</u>	<u>1.46</u>
		0.6	0.44	<u>0.64</u>	1.82	0.94	1.01	1.04
		0.7	0.26	0.37	<u>0.51</u>	0.63	0.69	0.72
		0.8	0.14	0.20	0.28	<u>0.36</u>	0.43	0.45
		0.9	0.06	0.08	0.11	0.15	<u>0.19</u>	0.21
		1.0	0	0	0	0	0	<u>0</u>
	$\frac{\sigma_\theta}{k}$	0.5	<u>1.25</u>	<u>1.00</u>	0.85	0.84	0.89	0.98
		0.6	0.94	<u>1.36</u>	<u>1.18</u>	<u>1.07</u>	<u>1.09</u>	<u>1.16</u>
		0.7	0.76	<u>1.09</u>	<u>1.49</u>	<u>1.37</u>	<u>1.31</u>	<u>1.34</u>
		0.8	0.64	0.92	<u>1.26</u>	<u>1.64</u>	<u>1.57</u>	<u>1.55</u>
		0.9	0.56	0.80	<u>1.09</u>	<u>1.43</u>	<u>1.81</u>	<u>1.79</u>
		1.0	0.50	0.72	0.98	1.28	<u>1.62</u>	<u>2.00</u>
(c) Степенное упрочнение	$\frac{\sigma_r}{k}$	0.5	<u>0.75</u>	<u>1.00</u>	<u>1.18</u>	<u>1.31</u>	<u>1.40</u>	<u>1.44</u>
		0.6	0.44	<u>0.64</u>	0.82	0.94	1.01	1.04
		0.7	0.26	0.37	<u>0.51</u>	0.63	0.69	0.72
		0.8	0.14	0.20	0.28	<u>0.36</u>	0.43	0.45
		0.9	0.06	0.08	0.11	0.15	<u>0.19</u>	0.21
		1.0	0	0	0	0	0	<u>0</u>
	$\frac{\sigma_\theta}{k}$	0.5	<u>1.25</u>	<u>1.00</u>	0.85	0.82	0.81	0.85
		0.6	0.94	<u>1.36</u>	<u>1.18</u>	<u>1.07</u>	<u>1.08</u>	<u>1.12</u>
		0.7	0.76	<u>1.09</u>	<u>1.49</u>	<u>1.37</u>	<u>1.31</u>	<u>1.33</u>
		0.8	0.64	0.92	<u>1.26</u>	<u>1.64</u>	<u>1.57</u>	<u>1.55</u>
		0.9	0.56	0.80	<u>1.09</u>	<u>1.43</u>	<u>1.81</u>	<u>1.79</u>
		1.0	0.50	0.72	0.98	<u>1.28</u>	<u>1.62</u>	<u>2.00</u>

Из сопоставления результатов, приведенных в табл. 2 и 3, видно, что расхождение значений даже основных компонент напряжения σ_r и σ_θ , вычисленных по теории Генки-Шмидта и по упрощенной теории, иногда достигает нескольких процентов. Вычисление же остальных компонент напряжения и деформации по упрощенной теории, на наш взгляд, вовсе не допустимо.

Поступила в редакцию
19 V 1941

Институт механики
Академии наук СССР

ELASTICO-PLASTIC STATE OF A CYLINDRICAL TUBE YIELDING WITH A STRAIN-HARDENING OF MATERIAL

W. W. SOKOLOVSKY

(Summary)

The paper contains an extended discussion of results previously published under the same title in the Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS, vol. XXXVII, № 5—6 (1942).

The author, following the theory of plasticity of H. Hencky, employs the condition of R. Schmidt for plasticity of matter yielding with strain-hardening, which means that a most general relationship between E and T (fig. 2) is used.

In particular for a perfectly plastic matter (*a*), for a matter yielding with the strain-hardening according the linear law (*b*) and for a matter with the strain-hardening according the power law (*c*) the relationship between E and T are given in fig. 3, 4 and 5 correspondingly.

The main subject discussed, is the solution of the problem in conformity with the general theory of Hencky-Schmidt. And only for the sake of comparison is given the solution of the same problem obtained by means of the simplified theory assuming the incompressibility of the plastic matter.

As an example a cylindrical tube under internal pressure yielding without change of axial length is treated in detail. The region of plasticity is supposed to be expanded gradually.

The results of computations due to the general theory are given in table 2, and due to the simplified theory in table 3 for all three kinds of matter (*a*), (*b*) and (*c*), mentioned above.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Уруго-пластическое напряженное состояние трубы при наличии упрочнения материала. ДАН. 1942. Т. XXXVII. № 5—6.
2. Соколовский В. В. Уруго-пластическое напряженное состояние трубы, находящейся под действием равномерных внутреннего и внешнего давлений. Прикладная математика и механика. 1943. Т. VII. № 1.
3. Hencky H. Zeitschr. angew. Math. u. Mech. 1924. Bd. 4.
4. Schmidt R. Ingenieur Archiv. 1932. Bd. 3.
5. Надаи А. Пластичность. 1936.
6. Беляев Н. М. и Сивилский А. К. Напряжения и деформации в толстостенных цилиндрах при уруго-пластическом состоянии материала с учетом упрочнения. Известия Академии Наук СССР. ОТН, 1938. № 4.