

## НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

А. А. ИЛЬЮШИН

(Москва)

### 1. Основные законы механики упругих и пластических деформаций

Пусть в какой-нибудь точке твердого тела, претерпевающего под действием данных сил упругую, пластическую или совместную деформацию, напряженное и деформированное состояние определяется тензорами

$$(\mathbf{S}) = \begin{pmatrix} X_x & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{E}) = \begin{pmatrix} e_{xx} & \frac{1}{2} e_{xy} & \frac{1}{2} e_{xz} \\ \frac{1}{2} e_{yx} & e_{yy} & \frac{1}{2} e_{yz} \\ \frac{1}{2} e_{zx} & \frac{1}{2} e_{zy} & e_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Здесь, как обычно,  $X_x, Y_y, Z_z$  и  $X_y, X_z, Y_z$  обозначают нормальные и касательные напряжения,  $e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{xy}, e_{xz}, e_{yz}$  — относительные удлинения и сдвиги.

Будем предполагать, что до первого нагружения тело было в естественном (не напряженном и не деформированном) состоянии.

Изменение объема элемента тела определяется первым инвариантом тензора деформаций

$$\Theta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} \quad (1.2)$$

или средним относительным удлинением

$$e = \frac{1}{3} \Theta \quad (1.3)$$

Объемная деформация элемента тела вызывается только средним гидростатическим напряжением

$$\sigma = \frac{1}{3} (X_x + Y_y + Z_z) \quad (1.4)$$

представляющим первый инвариант тензора напряжений.

Девизорами напряжений и деформаций называются тензоры

$$(\mathbf{D}_S) = \begin{pmatrix} X_x - \sigma & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y - \sigma & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z - \sigma \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{D}_E) = \begin{pmatrix} e_{xx} - e & \frac{1}{2} e_{xy} & \frac{1}{2} e_{xz} \\ \frac{1}{2} e_{yx} & e_{yy} - e & \frac{1}{2} e_{yz} \\ \frac{1}{2} e_{zx} & \frac{1}{2} e_{zy} & e_{zz} - e \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

характеризующие напряжения и деформации, связанные только с изменением формы, но не объема элемента.

Действительно, работа компонентов девизора напряжений на изменение элемента объема

$$(X_x - \sigma) \delta e + (Y_y - \sigma) \delta e + (Z_z - \sigma) \delta e \quad (1.6)$$

и равна нулю, так же как и работа среднего напряжения на деформациях

являющихся компонентами девиатора деформаций

$$\sigma(e_{xx} - e) + \sigma(e_{yy} - e) + \sigma(e_{zz} - e) \quad (1.7)$$

Введению очень важных понятий интенсивности напряжений и деформаций мы обязаны главным образом Н. Непскому<sup>11</sup>. Приведем формальное определение этих величин.

*Интенсивностью напряжений  $\sigma_i$  называется величина, квадрат которой с точностью до постоянного множителя равен второму инварианту девиатора напряжений; множитель пропорциональности выбирается так, чтобы в случае простого одноосного напряженного состояния интенсивность напряжений в точности совпадала с действующим напряжением.*

*Интенсивностью деформаций  $\varepsilon_i$  называется величина, квадрат которой с точностью до множителя равен второму инварианту девиатора деформаций; множитель пропорциональности выбирается так, чтобы в случае простого одноосного напряженного состояния интенсивность деформаций в точности совпадала с относительным удлинением в направлении действующего напряжения.*

Ссылаясь на любой курс теории упругости или книгу по векторному и тензорному анализу, приводим выражения  $\sigma_i$  и  $\varepsilon_i$  согласно их определению без вывода:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(X_x - Y_y)^2 + (Y_y - Z_z)^2 + (Z_z - X_x)^2 + 6(X_y^2 + Y_z^2 + Z_x^2)} \\ \varepsilon_i &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(e_{xx} - e_{yy})^2 + (e_{yy} - e_{zz})^2 + (e_{zz} - e_{xx})^2 + \frac{3}{2}(e_{xy}^2 + e_{xz}^2 + e_{yz}^2)} \end{aligned} \quad (1.8)$$

В случае простого одноосного напряженного состояния тела, например при растяжении, сжатии образца вдоль оси  $x$ , имеем

$$\begin{aligned} X_y = X_z = Y_z = 0, & \quad Y_y = Z_z = 0 \\ e_{xy} = e_{xz} = e_{yz} = 0, & \quad e_{yy} = e_{zz} = -\frac{1}{m} e_{xx} \end{aligned}$$

следовательно, при  $m = 2$

$$\sigma_i = |X_x|, \quad \varepsilon_i = |e_{xx}|$$

и, таким образом, выписанные выражения интенсивностей соответствуют их определениям. Заметим, что принятое нами в определении интенсивности деформаций значение числа Пуассона  $m = 2$  является произвольным. Однако это не уменьшает общности проводимых рассуждений.

Нетрудно показать, и Непскому<sup>11</sup> это сделал впервые, что квадраты интенсивностей напряжений и деформаций с точностью до постоянных множителей представляют собой работу внутренних сил в единице объема тела, идущую на изменение формы рассматриваемого элемента в предположении, что для вычисления этой работы напряжения и деформации берутся из закона Гука.

Эта теорема проясняет физический смысл величин  $\sigma_i$ ,  $\varepsilon_i$ , но вносит некоторые неясности, поскольку в ней основные величины, характеризующие упругое и пластическое состояния материала, находятся путем применения законов только упругости.

М. Ros и А. Eichinger дали механический смысл величин интенсивностей напряжений и деформаций как результирующего касательного напряжения

и результирующего сдвига по площадкам, отсекающим равнобочные призмы в первых квадрантах трехгранников главных осей напряжений и деформаций. В этом без труда можно убедиться, если воспользоваться обычными в теории напряжений и деформаций формулами преобразования при повороте осей координат.

Однако, предвосхищая дальнейшие результаты, можно указать более важные свойства этих величин. Во-первых, при нагружении элемента тела из естественного состояния для каждого материала существует между интенсивностью напряжений  $\sigma_i$  и интенсивностью деформаций  $\epsilon_i$  однозначная и вполне определенная зависимость. Отсюда следует, что эти величины при сложных деформациях тела ведут себя так же, как осевое напряжение и удлинение при простом растяжении. И, во-вторых, вариация работы внутренних сил в пределах и за пределами упругости прямо пропорциональна вариации любой из этих величин. Отсюда получается возможность определить понятия нагружения и разгрузки, весьма важные в теории упруго-пластических деформаций.

*Нагружением* в некоторой области или точке тела называется процесс, при котором *интенсивность напряжений возрастает*. В противном случае процесс называется *разгрузением*.

Критическим состоянием элемента тела будем называть такое, при котором интенсивность напряжений в нем достигает максимума, т. е. когда процесс нагружения заканчивается или переходит в разгрузение.

Как известно из многочисленных опытов с твердыми телами, при однородных деформациях (т. е. таких, при которых напряженное и деформированное состояние одинаково для всех точек тела) процесс разгрузки следует упругим законам и при снятии нагрузок заканчивается «нулевым напряженным состоянием». Это «нулевое состояние» либо отличается от естественного начального состояния тела остаточными деформациями, если критическое состояние было достигнуто за пределами упругости, либо, в противном случае, совпадает с естественным.

Нулевое состояние элемента тела характеризуется тензором ( $E^0$ ) остаточных деформаций (1.1), при чем тензор напряжений равен нулю ( $S^0 = 0$ ).

Тензоры напряжений и деформаций в критическом состоянии элемента будем отмечать штрихами наверху ( $S'$ ), ( $E'$ ).

Упругой частью общей деформации элемента называется деформация, отсчитываемая от нулевого состояния. Если в результате деформации элемент проходит через несколько критических состояний, то упругая и остаточная деформации элемента после последнего критического состояния определяются тем из них, в котором интенсивность напряжений имела большее значение.

Тензор упругих деформаций, следовательно, имеет вид

$$(E^e) = (E) - (E^0) \quad (1.9)$$

**Закон Гука для объемных деформаций.** *Изменение объема элемента тела прямо пропорционально среднему нормальному напряжению во всем диапазоне деформаций*

$$\sigma = 3k\epsilon = k\Theta \quad (1.10)$$

Этот закон принят во всех существующих теориях пластичности и для различных материалов. После работ Бриджмена, в которых напряжение  $\sigma$  доводилось до многих тысяч атмосфер и все же после снятия давления объем тела возвращался к первоначальному, в справедливости объемного закона Гука и при пластических деформациях не может быть сомнения.

Следствие. Тензор ( $E^\circ$ ) является дивиатором, так как

$$\Theta^\circ = e_{xx}^\circ + e_{yy}^\circ + e_{zz}^\circ = 0 \quad (1.41)$$

**Закон изменения формы элемента.** Если в процессе деформирования в некоторый момент времени происходит нагружение элемента и интенсивность напряжений  $\sigma_i$  не меньше максимального своего значения в предшествующее время, то дивиаторы напряжений ( $D_S$ ) и деформаций ( $D_E$ ) пропорциональны.

Если же происходит нагружение или разгрузка элемента, но интенсивность напряжений не достигает наибольшего предшествующего значения, то дивиатор напряжений ( $D_S$ ) пропорционален дивиатору упругих деформаций ( $D_E$ )<sup>e</sup> = ( $D_E$ ) - ( $E^\circ$ ).

Таким образом второй закон приводит нас к соотношениям

$$(D_S) = 2\mu (D_E) \quad (1.42)$$

$$(D_S) = 2\bar{\mu} (D_E - E^\circ) \quad (1.43)$$

В них существенно, что множители  $\mu$  и  $\bar{\mu}$  являются скалярными величинами.

Условимся называть деформацию элемента активной, если в рассматриваемый момент времени происходит нагружение, причем интенсивности напряжений  $\sigma_i$  и деформаций  $\epsilon_i$  имеют значения больше их предшествующих значений. Если же хотя бы в один из предшествующих моментов времени они имели значения большие, чем в рассматриваемый, то деформацию будем называть пассивной.

Второй закон (изменения формы) может быть формулирован еще так: дивиатор напряжений пропорционален дивиатору деформаций, если деформация является активной, и пропорционален дивиатору упругих деформаций при пассивной деформации.

Если написать второй закон в скалярном виде для главных осей (1, 2, 3) напряжений и деформаций, то равенства (1.42) эквивалентны известным соотношениям

$$\frac{\sigma_1 - \sigma}{e_1 - e} = \frac{\sigma_2 - \sigma}{e_2 - e} = \frac{\sigma_3 - \sigma}{e_3 - e} = 2\mu \quad \text{или} \quad \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{e_1 - e_2} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{e_2 - e_3} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{e_3 - e_1} \quad (1.44)$$

Если отвлечься от явлений релаксации и усталости в телах (в противном случае необходимо ввести поправки как в первый, так особенно и во второй законы), можно а priori предполагать, что третий закон должен выражаться одним единственным соотношением между инвариантами тензоров напряжений и деформаций, так как в противном случае он вошел бы в противоречие с первыми двумя законами и принципами статики.

**Закон упругости и пластичности.** Для каждого материала интенсивность напряжений  $\sigma_i$  является вполне определенной функцией интенсивности

деформаций  $\varepsilon_i$  при активном процессе и линейной однородной функцией интенсивности упругих деформаций  $\varepsilon_i^e$  при пассивном процессе

$$\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i) \tag{1.15}$$

$$\sigma_i = c\varepsilon_i^{(e)} \tag{1.16}$$

Экспериментальные исследования Смирнова-Аляева, М. Ros и А. Eichinger, и некоторых других исследователей показали, что не только при растяжении-сжатии, изгибе и кручении, но и в сложных случаях напряженных состояний зависимость между величинами  $\sigma_i$  и  $\varepsilon_i$  остается одной и той же.

Но если так, то для определения вида функции  $\Phi(\varepsilon_i)$  можно воспользоваться диаграммой растяжения образца (фиг. 1).

Действительно, для образца, растягиваемого вдоль оси, имеем

$$Y_y = Z_z = X_y = Y_z = Z_x = 0$$

$$e_{yy} = e_{zz} = -\frac{1}{m} e_{xx}, \quad e_{xy} = e_{yz} = e_{zx} = 0$$

Следовательно,

$$\sigma_i^e = X_x, \quad \varepsilon_i = \frac{2(1+m)}{3m} e_{xx}$$

Но связь между напряжением  $X_x$  и деформацией  $e_{xx}$  дается диаграммой растяжения и с большими удобствами для дальнейшего может быть представлена в виде

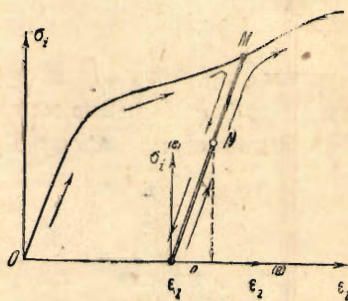
$$X_x = E e_{xx} [1 - \omega(e_{xx})] \tag{1.17}$$

где  $E e_{xx} \omega(e_{xx})$  — функция, обозначающая понижение напряжения, вычисляемого по закону Гука, после перехода за предел пропорциональности, причем  $E$  — модуль Юнга. Следовательно, если  $m$  обозначает число Пуассона и  $G$  — модуль сдвига при упругой деформации, то выражение третьего закона для активного процесса имеет вид

$$\sigma_i = 3G \varepsilon_i [1 - \omega(\varepsilon_i)] \tag{1.18}$$

(мы опустили множитель аргумента функции  $\omega$ , подразумевая очевидно-линейное преобразование).

Обычно твердые тела и особенно металлы подчиняются при малых деформациях в пределах упругости закону Гука, так что кривая (фиг. 1) имеет явно выраженный прямолинейный участок, достигающий окрестности предела упругости, где она резко изменяет свой угол наклона, так что тангенс этого угла  $d\sigma_i/d\varepsilon_i$  уменьшается в несколько десятков раз (для стали в 20 и более раз). После достижения предела текучести ход кривой опять становится довольно плавным. Поэтому иногда кривую  $\Phi(\varepsilon_i)$  представляют в виде ломаной кривой согласно схеме Прандтля (фиг. 2). В таком случае механические свойства металла определяются пятью механическими характеристиками: модулем Юнга  $E'$ , числом Пуассона  $m$ , пределом текучести  $\sigma'$ ,



Фиг. 1

модулем упругости  $E_1$  и пределом прочности  $\sigma''$  или предельной деформации  $\varepsilon_i''$ .

Аналитическое выражение для функции  $\Phi(\varepsilon_i)$ , соответствующее схеме Прандтля, будет иметь вид

$$\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i) = 3G\varepsilon_i [1 - \omega(\varepsilon_i)] \quad (1.19)$$

где

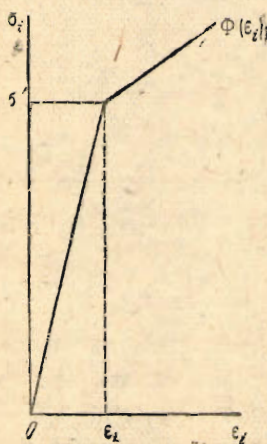
$$\omega = 0 \quad \text{для} \quad \varepsilon_i \leq \varepsilon_i' = \frac{\sigma'}{3G}$$

$$\omega = \lambda \left(1 - \frac{\varepsilon_i'}{\varepsilon_i}\right) \quad \text{для} \quad \varepsilon_i \geq \varepsilon_i' = \frac{\sigma'}{3G} \quad (1.20)$$

причем параметр  $\lambda$ , называемый нами *параметром разупрочнения* и характеризующий понижение напряжения после перехода за предел упругости против его значения по закону Гука, равен

$$\lambda = \frac{E - E_1}{E} = \frac{G - G_1}{G} \quad (1.21)$$

Однако не следует ограничивать при решении различного рода вопросов вид функции  $\omega(\varepsilon_i)$  выражением (1.20). Схема Прандтля может сильно



искажать кривую  $\Phi$  для некоторых материалов, и, кроме того, скачок производной функции может привести к усложнению вычислений. Поэтому часто будем пользоваться самым общим выражением функции в виде бесконечного ряда по четным степеням аргумента  $\varepsilon_i$ :

$$\omega = \sum_{n=1, 2, \dots} \lambda_{2n} \varepsilon_i^{2n} \quad (1.22)$$

Такое представление функций  $\omega$  будет особенно удобным для одного из предлагаемых далее методов решения задач упругости и пластичности. В выражении (1.22) постоянные коэффициенты выражаются через упруго-пластические константы материала. Например, если ограничиться полиномом

$$\omega = \lambda_2 \varepsilon_i^2 + \lambda_4 \varepsilon_i^4 \quad (1.23)$$

то для коэффициентов можно потребовать, чтобы в точке перегиба площадки текучести напряжению  $\sigma_s$  соответствовала деформация  $\varepsilon_s$ . Тогда легко убедиться, что

$$\lambda_2 = \frac{10}{7\varepsilon_s^2} \left(1 - \frac{\sigma_s}{\sigma_s'}\right), \quad \lambda_4 = -\frac{3}{7\varepsilon_s^4} \left(1 - \frac{\sigma_s}{\sigma_s'}\right) \quad (1.24)$$

причем  $\sigma_s' = 3G\varepsilon_s$ .

## 2. Условия равновесия и некоторые теоремы

Для активных процессов деформирования из выражения (1.19) имеем

$$\begin{aligned} X_x - \sigma &= 2\mu(e_{xx} - e), & X_y &= \mu e_{xy} \\ Y_y - \sigma &= 2\mu(e_{yy} - e), & X_z &= \mu e_{xz} \\ Z_z - \sigma &= 2\mu(e_{zz} - e), & Y_z &= \mu e_{yz} \end{aligned} \quad (2.1)$$

см. формулы  
упрочнения  
 $\sigma_s$  и  $\varepsilon_s$

Подставляя из формул (2.1) выражения напряжений в (1.8), получим

$$\mu = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \quad (2.2)$$

или на основании (1.18)

$$\mu = G [1 - \omega(\varepsilon_i)] \quad (2.3)$$

Таким образом коэффициент пропорциональности между девiatorами напряжений и деформаций при активном процессе является вполне определенной функцией интенсивности деформаций. В частности, если связь между  $\sigma_i$  и  $\varepsilon_i$  является линейной, т. е.  $\omega = 0$ , то коэффициент  $\mu$  представляет собой модуль сдвига и зависимости (2.1) и (1.10) выражают обобщенный закон Гука.

**Теорема 1.** Компоненты девiatorа напряжений имеют потенциал  $W_1$ , зависящий только от интенсивности деформаций.

Для доказательства воспользуемся тождествами

$$\begin{aligned} e_{xx} - e &= \frac{3}{4} \frac{\partial}{\partial e_{xx}} (\varepsilon_i^2), & e_{xy} &= \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial e_{xy}} (\varepsilon_i^2) \\ e_{yy} - e &= \frac{3}{4} \frac{\partial}{\partial e_{yy}} (\varepsilon_i^2), & e_{xz} &= \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial e_{xz}} (\varepsilon_i^2) \\ e_{zz} - e &= \frac{3}{4} \frac{\partial}{\partial e_{zz}} (\varepsilon_i^2), & e_{yz} &= \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial e_{yz}} (\varepsilon_i^2) \end{aligned} \quad (2.4)$$

и соотношениями (2.1) и (2.3). Получим

$$X_x - \sigma = \frac{3}{2} G [1 - \omega(\varepsilon_i)] \frac{\partial \varepsilon_i^2}{\partial e_{xx}}, \quad X_y = \frac{3}{2} G [1 - \omega(\varepsilon_i)] \frac{\partial \varepsilon_i^2}{\partial e_{xy}}$$

откуда следует существование потенциала

$$W_1 = \frac{3}{2} G \int_0^{\varepsilon_i} [1 - \omega(\varepsilon_i)] d\varepsilon_i^2 \quad (2.5)$$

**Теорема 2.** При всяком активном упруго-пластическом процессе работа внутренних сил в единице объема тела является функцией только интенсивности деформаций и объемного расширения.

Пусть в некоторый момент активного процесса деформации  $e_{xx}, \dots, e_{yz}$  получают приращения во времени  $\delta e_{xx}, \dots, \delta e_{yz}$ . Внутренние силы совершают при этом работу

$$\begin{aligned} &x_x \delta e_{xx} + Y_y \delta e_{yy} + Z_z \delta e_{zz} + x_y \delta e_{xy} + X_z \delta e_{xz} + Y_z \delta e_{yz} \equiv \\ &\equiv (X_x - \sigma) \delta e_{xx} + (Y_y - \sigma) \delta e_{yy} + (Z_z - \sigma) \delta e_{zz} + X_y \delta e_{xy} + X_z \delta e_{xz} + \\ &\quad + Y_z \delta e_{yz} + \sigma \delta (e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) \end{aligned}$$

На основании предыдущей теоремы и первого закона (1.10) это выражение представляет вариацию функции

$$W = \frac{3}{2} G \int_0^{\varepsilon_i} [1 - \omega(\varepsilon_i)] d\varepsilon_i^2 + \frac{k}{2} \Theta^2 \quad (2.6)$$

которая, очевидно, и представляет собой выражение работы деформаций.

**Следствие.** Работа компонентов девiatorа напряжений является функцией интенсивности деформаций; таким образом необходимым условием активности процесса деформаций является возрастание последней.

В случае, когда функция  $\omega$  определена разложением (1.22), выражение для работы внутренних сил имеет вид

$$W = \frac{3}{2} G \varepsilon_i^2 \left( 1 - \sum_{n=1, 2, \dots} \frac{\lambda_{2n}}{n+1} \varepsilon_i^{2n} \right) + \frac{k}{2} \Theta^2 \quad (2.7)$$

В случае схемы Прандтля (1.20) из (2.6) имеем

$$W = \frac{3}{2} G \varepsilon_i^2 [1 - \Omega(\varepsilon_i)] + \frac{k}{2} \Theta^2 \quad (2.8)$$

где

$$\Omega = 0 \quad \text{для} \quad \varepsilon_i \leq \varepsilon_i' \\ \Omega = \lambda \left( 1 - \frac{2\varepsilon_i'}{\varepsilon_i} + \frac{\varepsilon_i'^2}{\varepsilon_i^2} \right) \quad \text{для} \quad \varepsilon_i \geq \varepsilon_i' \quad (2.9)$$

Условимся упруго-пластическую деформацию тела называть *простой*, если перед последним разгрузением она является всюду активной и последнее разгрузение наступает одновременно во всех точках тела.

Как следует из второго и третьего законов протекания пассивных процессов, в случае простой деформации тела состояние его перед последним разгрузением не зависит от того, через какие промежуточные разгрузки и нагрузки до этого прошло тело; состояние его во время и после разгрузения зависит только от последнего критического состояния и остающихся нагрузок.

**Вариационное уравнение.** Если в теле происходит активная простая деформация, то вариация полной работы внутренних сил равна работе внешних сил на вариациях перемещений тела

$$\delta \iiint W d\tau = \iiint \rho \mathbf{F} \delta \mathbf{r} d\tau + \iint \mathbf{F}_n \delta \mathbf{r} ds \quad (2.10)$$

Здесь  $\rho$  — массовая плотность,  $\mathbf{F}$  — массовая сила,  $\mathbf{F}_n$  — поверхностная сила,  $\mathbf{r}$  — вектор перемещения

$$\mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k} \quad (2.11)$$

Из уравнения (2.10) можно без труда получить как следствие условие равновесия элемента внутри и на границе тела.

Действительно, так как деформация простая, то на основании условия существования потенциала напряжений имеем

$$\delta \iiint W d\tau = \iiint \delta W d\tau = \iiint (X_x \delta e_{xx} + \dots + Y_z \delta e_{yz}) d\tau$$

Но последний интеграл, учитывая выражение Коши для компонентов деформаций, преобразуется к виду

$$- \iiint \delta \mathbf{r} \operatorname{div} (\mathbf{S}) d\tau - \iint \delta \mathbf{r} (\mathbf{S}) \mathbf{n} ds$$

где  $\mathbf{n}$  — вектор единичной нормали и  $(\mathbf{S})$  — тензор напряжений. Следовательно, уравнение (2.10) преобразуется к виду

$$\iiint \left[ [\operatorname{div} (\mathbf{S}) + \rho \mathbf{F}] \delta \mathbf{r} d\tau + \iint [\mathbf{F}_n - \mathbf{n} (\mathbf{S})] \delta \mathbf{r} ds = 0 \quad (2.12) \right.$$

Отсюда вследствие произвольности вектора  $\delta \mathbf{r}$  получаем уравнение Навье-Коши и условие на поверхности

$$\operatorname{div} (\mathbf{S}) + \rho \mathbf{F} = 0 \quad (2.13)$$

$$\mathbf{n} (\mathbf{S}) = \mathbf{F}_n \quad \text{или} \quad \delta \mathbf{r} = 0 \quad (2.14)$$



Обратно, пользуясь уравнениями Навье-Коши, условиями на границе и существованием потенциала напряжений  $W$ , можно доказать правильность вариационного уравнения (2.10).

**Теорема 3.** *Если массовые силы отсутствуют, то для активной простой деформации из всех кинематически возможных деформированных состояний тела, имеющих заданное перемещение на границе, в действительности имеет место то, которое сообщает минимум работе внутренних сил.*

Действительно, если на границе  $\mathbf{F} = 0$  и  $\delta \mathbf{r} = 0$ , то вариационное уравнение (2.10) показывает, что работа внутренних сил

$$V = \iiint W d\tau$$

имеет экстремум. Мы не будем приводить весьма простого доказательства того, что это будет именно минимум.

Переходим к преобразованию законов пассивной деформации.

Пассивная деформация в некоторой точке тела, как это следует из законов деформирования, зависит только от того из предшествующих критических состояний, при котором интенсивность напряжений была наибольшей. Обозначая попережнему тензоры напряжений и деформаций в этом критическом состоянии через  $(S')$  и  $(E')$ , соответствующий тензор остаточных деформаций через  $(E^o)$  и полагая  $\Phi = 3G\varepsilon_i^{(e)}$  из (1.13), имеем

$$(D_S) = 2G(D_E) - 2G(E^o) \quad (2.15)$$

или

$$\begin{aligned} X_x - \sigma &= 2G(e_{xx} - e) - 2Ge_{xx}^o, & X_y &= Ge_{xy} - Ge_{xy}^o \\ Y_y - \sigma &= 2G(e_{yy} - e) - 2Ge_{yy}^o, & X_z &= Ge_{xz} - Ge_{xz}^o \\ Z_z - \sigma &= 2G(e_{zz} - e) - 2Ge_{zz}^o, & Y_z &= Ge_{yz} - Ge_{yz}^o \end{aligned} \quad (2.16)$$

Так как, в частности, и критическое состояние удовлетворяет этому равенству, то для определения остаточных деформаций  $(E^o)$  нулевого состояния получаем уравнение

$$(E^o) = (D_{E'}) - \frac{1}{2G}(D_{S'}) \quad (2.17)$$

Исключая в соотношениях (2.14) остаточные деформации  $(E^o)$ , получим

$$(D_S) = (D_{S'}) + 2G(D_E) - 2G(D_{E'}) \quad (2.18)$$

Если перемещения и деформации, отсчитываемые от критического состояния, мы отметим звездочкой

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r} - \mathbf{r}', \quad (E^*) = (E) - (E') \quad (2.19)$$

то получим обычный закон Гука, для разности напряжений  $(S) - (S') = (S^*)$ :

$$(D_S) = 2G(D_E), \quad \sigma = 3ke^* \quad (2.20)$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} X_x &= X_x' + \lambda\Theta^* + 2Ge_{xx}^*, & X_y &= X_y' + Ge_{xy}^* \\ Y_y &= Y_y' + \lambda\Theta^* + 2Ge_{yy}^*, & Y_z &= Y_z' + Ge_{yz}^* \\ Z_z &= Z_z' + \lambda\Theta^* + 2Ge_{zz}^*, & Z_x &= Z_x' + Ge_{zx}^* \end{aligned} \quad (2.21)$$

Здесь  $\lambda$  и  $G$  — постоянные Ляме.

**Теорема 4.** *Если происходит простая пассивная деформация тела под действием массовых и поверхностных сил  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{F}_n$ , то деформированное*

и напряженное состояние тела отличается от критического на величину упругой деформации, которую получило бы тело в естественном состоянии под действием разности внешних сил критического и рассматриваемого пассивного состояния  $\mathbf{F} - \mathbf{F}'$  и  $\mathbf{F}_n - \mathbf{F}_n'$ .

Действительно, из уравнения равновесия (2.13) после подстановки в него выражений (2.21) для компонента напряжений получим

$$\operatorname{div}(\mathbf{S}') + (\lambda + G) \operatorname{grad} \Theta^* + G \nabla^2 \mathbf{r}^* + \rho \mathbf{F} = 0 \quad (2.22)$$

Но в критическом состоянии имеет место уравнение

$$\operatorname{div}(\mathbf{S}') + \rho \mathbf{F}' = 0 \quad (2.23)$$

следовательно,

$$(\lambda + G) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{r}^* + G \nabla^2 \mathbf{r}^* + \rho (\mathbf{F} - \mathbf{F}_n') = 0 \quad (2.24)$$

Из условий на поверхности тела (2.14) аналогичным образом получим

$$\mathbf{n}(\mathbf{S}^*) = \mathbf{F}_n - \mathbf{F}_n' \quad (2.25)$$

Но (2.24) представляет собой уравнение упругого равновесия в форме Ляме для тела, деформируемого из естественного состояния массовыми силами  $\mathbf{F} - \mathbf{F}'$ ; учитывая поверхностное условие (2.25), убеждаемся в правильности теоремы.

*Следствие.* При простой деформации тела остающиеся в нем напряжения и деформации получаются из критических путем вычитания напряжений и деформаций, которые возникли бы в этом теле, деформированном из естественного состояния внешними силами критического состояния, при условии справедливости закона Гука.

Если деформация тела является сложной, то оно может быть разбито на отдельные части, в каждой из которых имеет место простая активная или пассивная деформация. В таком случае приведенные выше теоремы и уравнения справедливы для соответствующих частей тела. При этом часть поверхностных сил, относящихся к внутренним границам между отдельными частями, становится неизвестной. Однако решение задачи о деформации и отыскании границ между областями возможно, поскольку на этих границах статически и кинематически необходимы условия непрерывности тензора напряжений и вектора перемещений.

### 3. Два общих метода решения упруго-пластических задач

Для краткости изложения методов предположим, что тело под действием заданной системы сил  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{F}_n$  находится в стадии простой активной деформации, которая заканчивается простым разгрузением. Формулы (1.10), (1.12) и (2.3) дают следующие соотношения между напряжениями и деформациями:

$$\begin{aligned} X_x &= 3ke + 2G(1 - \omega)(e_{xx} - e), & X_y &= G(1 - \omega)e_{xy} \\ Y_y &= 3ke + 2G(1 - \omega)(e_{yy} - e), & Y_z &= G(1 - \omega)e_{yz} \\ Z_z &= 3ke + 2G(1 - \omega)(e_{zz} - e), & Z_x &= G(1 - \omega)e_{zx} \end{aligned} \quad (3.1)$$

или в тензорном виде

$$(\mathbf{S}) = 3k(\mathbf{e}) + 2G(\mathbf{D}_E) - 2G\omega(\mathbf{D}_E) \quad (3.2)$$

где  $(e)$  — шаровой тензор. Уравнение равновесия (2.12) можно представить в перемещениях. Для этого заметим, что

$$\operatorname{div} [3k(e) + 2G(D_E)] = (\lambda + G) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{r} + G \nabla^2 \mathbf{r}$$

Тогда получим

$$(\lambda + G) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{r} + G \nabla^2 \mathbf{r} - 2G \operatorname{div} \omega(D_E) + \rho \mathbf{F} = 0 \quad (3.3)$$

Это уравнение является линейным относительно вторых производных вектора перемещения  $\mathbf{r}$ , но коэффициенты при этих производных, являющиеся квадратичными функциями деформаций, зависят также от интенсивности деформаций  $\varepsilon_i$ , и поэтому не приходится рассчитывать на какие-нибудь прямые методы его интегрирования при граничных условиях (2.13) даже в сравнительно простых задачах. Однако вид уравнения (3.3) подсказывает естественный метод решения его последовательными приближениями.

**Метод упругих решений.** Введем обозначение для третьего слагаемого левой части уравнения (3.3).

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= 2G \operatorname{div} \omega(D_E) \equiv 2G \omega \operatorname{div}(D_E) + 2G \operatorname{grad} \omega(D_E) \equiv \\ &\equiv \frac{1}{3} G \omega \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{r} + G \omega \nabla^2 \mathbf{r} + 2G \operatorname{grad} \omega(D_E) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Уравнение (3.3) приобретает вид уравнения упругости в форме Ляме

$$(\lambda + G) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{r} + G \nabla^2 \mathbf{r} + (\rho \mathbf{F} - \mathbf{R}) = 0 \quad (3.5)$$

Если через  $\mathbf{R}_n$  обозначим на поверхности тела вектор

$$\mathbf{R}_n = 2G \omega \mathbf{n}(D_E) \quad (3.6)$$

то и поверхностное условие по отношению к поверхностной силе  $\mathbf{F}_n$ , увеличенной на вектор  $\mathbf{R}_n$ , приобретет обычный в теории упругости вид

$$\lambda \Theta \mathbf{n} + 2G \varepsilon \mathbf{n} = \mathbf{F}_n + \mathbf{R} \quad (3.7)$$

В качестве первого приближения решение задачи находим при  $\omega = 0$ .

В этом случае оба вектора  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{R}_n$  обращаются в нуль и, следовательно, получается обычная задача теории упругости в перемещениях. Решение этой задачи дает первое приближение  $\mathbf{r}_1$ . Заметим, что если бы мы подсчитали по закону (3.2) первые приближения для напряжений, то, вообще говоря, получили бы значения, существенно отличные от упругих. Определив первые приближения для векторов  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{R}_n$  и подставляя их значения в уравнения (3.5), (3.7), получаем вновь задачу теории упругости для нашего тела, но уже с измененными массовыми и поверхностными силами. Решение ее даст второе приближение для вектора перемещения  $\mathbf{r}$ . Последующие приближения получаются повторением этого процесса до тех пор, пока разница между двумя последовательными приближениями не будет достаточно мала. Таким образом этот метод может быть назван методом упругих решений, поскольку каждое следующее приближение получается из предыдущего путем решения для нашего тела задачи теории упругости.

Этот метод может быть особенно успешно применен и сводится только к вычислению квадратур, если известна функция Грина. В последнем случае может быть доказана довольно просто сходимости процесса последовательных приближений. Метод упругих решений будет ниже применен для решения

задач о деформации пластинок и цилиндрических оболочек. Здесь же отметим только, что вопрос об остаточных деформациях и напряжениях при этом методе решается автоматически, — на основании теоремы 4 остаточные перемещения и деформации равны разности их значений в последнем и первом приближениях, а остаточные напряжения равны разности их значений в последнем приближении и значений их, вычисляемых по деформациям первого приближения на основании закона Гука.

**Вариационный метод.** Вариационное уравнение равновесия (2.10) на основании формул (2.7) можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \delta \iiint \left[ \frac{3}{2} G \varepsilon_i^2 \left( 1 - \sum_{n=1, 2, \dots} \frac{\lambda_{2n}}{n-1} \varepsilon_i^{2n} \right) + \frac{k}{2} \Theta^2 \right] dx dy dz = \\ & = \iiint \rho (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dx dy dz + \iint (X_n \delta u + Y_n \delta v + Z_n \delta w) ds \end{aligned} \quad (3.8)$$

Если в нем положить постоянное  $\lambda_{2n} = 0$ , то получается обычное вариационное уравнение равновесия теории упругости, нашедшее себе обширные приложения. Для многих задач упругости уже найдены полные системы функций, ортогональных в нужных пределах, еще больше найдено функций аппроксимирующих с большой степенью точности искомые решения. В соответствующих задачах за пределами упругости эти функции могут быть использованы как наиболее удачные или, точнее, в такой же мере удачные, как в задачах упругих.

Применение ортогональных тригонометрических рядов для выражения перемещений тела вносит относительно столь же большие упрощения при решении упруго-пластических задач, как и при решении задач упругих. Действительно, под интегралом левой части уравнения (3.8) наряду с квадратичной (по деформациям) формой, обычной в теории упругости, входят еще ее квадрат, куб и т. д. Практически для получения зависимости между  $\sigma_i$  и  $\varepsilon_i$  достаточно бывает ограничиться двумя-тремя членами ряда (3.8). Но независимо от этого, пользуясь хорошо известными правилами преобразования тригонометрических функций и их ортогональностью, этот интеграл можно просто вычислить. Тогда для решения задачи остается решить нелинейную систему уравнений относительно произвольных постоянных, получающихся из уравнения (3.8).

Особенно же просто всегда может быть получено решение задачи упругости и пластичности при простой деформации тела в первом приближении. Пусть из каких-то соображений, например, из решения задачи теории упругости, перемещения в теле могут быть представлены известными функциями с точностью до неопределенного множителя  $\alpha$ , характеризующего перемещения,

$$u = \alpha u^*(x, y, z), \quad v = \alpha v^*(x, y, z), \quad w = \alpha w^*(x, y, z) \quad (3.9)$$

Если функции  $u^*$ ,  $v^*$ ,  $w^*$  берутся из решения задачи упругости для рассматриваемого случая, то параметр  $\alpha$  будет пропорционален нагрузке. Пусть нагрузка характеризуется параметром  $q$  так, что

$$X = qX^*, \quad Y = qY^*, \quad Z = qZ^*; \quad X_n = qX_n^*, \quad Y_n = qY_n^*, \quad Z_n = qZ_n^* \quad (3.10)$$

Деформации, отнесенные к параметру  $\alpha$ , будем обозначать звездочками. Тогда из выражения (1.8) находим

$$\varepsilon_i = \alpha z_i^*(x, y, z) \tag{3.11}$$

Подставляя выражения (3.10), (3.11) в уравнение (3.8) и производя дифференцирование, легко найдем

$$q = 3G\alpha \frac{\iiint \varepsilon_i^{*2} d\tau - \sum_{n=1, 2, \dots} \lambda_{2n} \alpha^{2n} \iiint \varepsilon_i^{*(2n+2)} d\tau}{\iiint \rho (X^*u^* + Y^*v^* + Z^*w^*) d\tau + \iint (X_n^*u^* + Y_n^*v^* + Z_n^*w^*) ds} \tag{3.12}$$

Точность формулы (3.12) в большом числе практических случаев является достаточной. В тех же случаях, когда кинематические соотношения (3.9) являются точными, эта формула дает точный результат. Примерами такого рода могут быть задачи о растяжении-сжатии, о чистом изгибе, о кручении бруса круглого сечения как в статически определяемых, так и не определяемых случаях.

#### 4. Задача о деформации плиты

Как показывают многочисленные опыты, основные гипотезы — о плоских сечениях в строительной механике и о нормальном линейном элементе в прикладной теории упругости — остаются справедливыми и за пределом упругости. Поэтому соответствующие результаты этих наук могут быть обобщены и на упруго-пластические деформации. В качестве примера рассмотрим задачу о деформации плиты.

Обозначим через  $u, v$  перемещения какой-нибудь точки плиты, расположенной на высоте  $z$  над срединной поверхностью,  $w$  — перемещение точки срединной поверхности, нормальное к срединной плоскости,  $x, y, z$  — оси координат.

Из гипотезы о нормальном линейном элементе вытекают кинематические формулы

$$\begin{aligned} u &= -z \frac{\partial w}{\partial x}, & e_{xx} &= -z \kappa_1, & \kappa_1 &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ v &= -z \frac{\partial w}{\partial y}, & e_{yy} &= -z \kappa_2, & \kappa_2 &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ & & e_{xy} &= -2z \tau, & \tau &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \tag{4.1}$$

где  $\kappa_1, \kappa_2$  и  $\tau$  представляют собой параметры кривизны и кручения срединной поверхности пластинки.

Пользуясь обычными в теории пластинок условиями малости напряжений  $Z_z$  и неизменяемости объема элемента (хорошо согласующимися между собой), находим из формул (2.1) следующие выражения для напряжений:

$$\begin{aligned} X_x &= -4G [1 - \omega(\varepsilon_i)] \left( \kappa_1 + \frac{1}{2} \kappa_2 \right) z \\ Y_y &= -4G [1 - \omega(\varepsilon_i)] \left( \kappa_2 + \frac{1}{2} \kappa_1 \right) z \\ X_y &= -2G [1 - \omega(\varepsilon_i)] z \tau \end{aligned} \tag{4.2}$$

Интенсивность деформаций  $\varepsilon_i$  может быть выражена через параметры кривизны и кручения пластинки, если учесть, как это делается и в теории упругости, что работа сдвигов в плоскостях  $xz$  и  $yz$  мала сравнительно с работой напряжений  $X_x, Y_y, X_y$ . Действительно из соотношения (1.8) и (4.1) находим

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 + \tau^2} |z| \quad (4.3)$$

Пользуясь выражениями для напряжений (4.2) и имея в виду четность функций  $\varepsilon_i$  и  $\omega$  по переменной  $z$ , легко найти выражения для результирующих сил в плоскости  $xy$  и для крутящего и изгибающих моментов, приходящихся на единичную площадь срединной поверхности пластинки:

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} X_x ds = 0, & S_1 &= \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} X_y dz = 0, & M_1 &= D \left( x_1 + \frac{1}{2} x_2 \right) (1 - \Omega') \\ T_2 &= \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} Y_y dz = 0, & H &= -\frac{1}{2} D \tau (1 - \Omega'), & M_2 &= D \left( x_2 + \frac{1}{2} x_1 \right) (1 - \Omega') \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь  $D$  обозначает жесткость пластинки, а  $\Omega'$  определяется формулой

$$\Omega' = \frac{12}{h^3} \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} \omega(\varepsilon_i) z^2 dz \quad (4.5)$$

Если ввести обозначение для инварианта

$$x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 + \tau^2 = x^2 \quad (4.6)$$

то в общем случае, когда функция  $\omega(\varepsilon_i)$  определена разложением (1.22), получим

$$\Omega' = \sum_{n=1,2,\dots} \frac{3k_{2n}}{2n+3} \left( \frac{xh}{\sqrt{3}} \right)^{2n} \quad (4.7)$$

В случае схемы Прандтля необходимо установить границы упругих и пластических областей. Часть пластинки, в которой будет происходить чисто упругая деформация, находится из условия (1.20); для наиболее напряженных элементов на контуре этой части

$$z = \frac{1}{2} h, \quad \varepsilon_i = \varepsilon_i' \quad (4.8)$$

Если бы величина  $x$  была известна как функция координат, то уравнение контура стало бы известно:

$$x(x, y) = \frac{\varepsilon_i' \sqrt{3}}{h}$$

В той части пластинки, где по ее толщине имеются упругие и пластические зоны, границы последних находятся из условия

$$z = z_0, \quad \varepsilon_i = \varepsilon_i'$$

На основании формулы (4.3) находим

$$z_0 = \pm \frac{\varepsilon_i' \sqrt{3}}{2x} \quad (4.9)$$

Следовательно, функция  $\Omega'$ , равная нулю для целиком упругой части пластинок, для упруго-пластической ее части будет равна:

$$\Omega' = \frac{24}{h^3} \int_{z_0}^{\frac{1}{2}h} \omega z^2 dz = \lambda \left( 1 - \frac{3\sqrt{3}\varepsilon'_i}{2hz} + \frac{3\sqrt{3}\varepsilon_i'^3}{2h^3z^3} \right) \quad (4.10)$$

Работу внутренних сил, приходящуюся на единицу площади пластинки, можно было бы вычислить путем интегрирования выражений (2.6), (2.7), (2.8) по толщине пластинки. Однако проще это сделать непосредственно из соотношений (4.4), заметив, что они могут быть представлены в виде

$$M_1 = -\frac{D}{2}(1-\Omega')\frac{\partial x^2}{\partial x_1}, \quad M_2 = -\frac{D}{2}(1-\Omega')\frac{\partial x^2}{\partial x_2}, \quad 2H = -\frac{D}{2}(1-\Omega')\frac{\partial x^2}{\partial z} \quad (4.11)$$

Из них непосредственно следует, что искомая работа

$$W = \frac{D}{2} \int_0^z (1-\Omega') dx^2 \quad (4.12)$$

Таким образом в общем случае, когда  $\omega(\varepsilon_i)$  определена разложением (1.22) и, следовательно, для  $\Omega'$  имеет место (4.7), работа деформаций, приходящаяся на единицу площади пластинки, будет

$$W = \frac{D}{2} x^2 \left[ 1 - \sum \frac{3\lambda_{2n}}{(n+1)(2n+3)} \left( \frac{xh}{\sqrt{3}} \right)^{2n} \right] \quad (4.13)$$

В случае схемы Прэндтля, т. е. когда функция  $\omega(\varepsilon_i)$  определена (1.19) и (1.20) имеет место (4.8) и (4.9), получим для упругой и упруго-пластической частей пластинки соответственно

$$W = \frac{D}{2} x^2 \quad (\varepsilon_i \leq \varepsilon_i')$$

$$W = \frac{D}{2} x^2 \left[ (1-\lambda) + \lambda \frac{3\sqrt{3}\varepsilon_i'}{hz} + \lambda \frac{3\sqrt{3}\varepsilon_i'^3}{h^3z^3} - \lambda \frac{9\varepsilon_i'^2}{h^2z^2} \right] \quad (\varepsilon_i \geq \varepsilon_i') \quad (4.14)$$

Вариационное уравнение равновесия пластинки имеет вид

$$\iint \delta W dx dy = \iint q \delta w dx dy \quad (4.15)$$

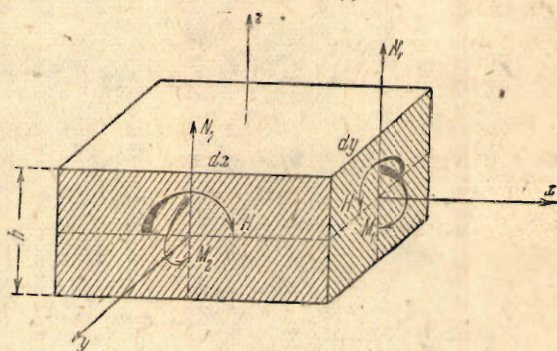
Отсюда можно найти как уравнение равновесия

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + q = 0 \quad (4.16)$$

так и граничные условия, точно совпадающие с обычными в теории упругих плит. Выражения для перерезывающих сил находятся непосредственно из условий статики (фиг. 3):

$$N_1 = \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}, \quad N_2 = \frac{\partial M_2}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} \quad (4.17)$$

Переходя к применению первого метода решения задач упругости



Фиг. 3

и пластичности, представим основное уравнение (4.16) на основании зависимостей (4.4) в виде

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D} + \frac{\partial}{\partial x^2} \left[ \left( x_1 + \frac{1}{2} x_2 \right) \Omega' \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ \left( x_2 + \frac{1}{2} x_1 \right) \Omega' \right] + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [\tau \Omega'] \quad (4.18)$$

Пусть для пластинки данной формы при заданных краевых условиях известна функция Грина  $\Gamma(x, y; \xi, \eta)$ , т. е. решение упругой задачи для единичной сосредоточенной силы, действующей в точке с координатами  $(\xi, \eta)$ .

Тогда путем умножения ее на правую часть уравнения (4.18) и интегрирования по всей площади пластинки преобразуем уравнение (4.18) к виду

$$w = \frac{1}{D} \iint q(\xi, \eta) \Gamma(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta + \tilde{w}(x, y) \quad (4.19)$$

где

$$\tilde{w} = \iint \left[ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left( x_1 + \frac{1}{2} x_2 \right) \Omega' + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left( x_2 + \frac{1}{2} x_1 \right) \Omega' + \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} (\tau \Omega') \right] \Gamma(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta \quad (4.20)$$

Последний интеграл интегрированием по частям приводится к виду

$$\begin{aligned} \tilde{w} = & \iint \left[ x_1 \left( \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \eta^2} \right) + x_2 \left( \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \xi^2} \right) + \tau \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \xi \partial \eta} \right] \Omega' d\xi d\eta + \\ & + \iint \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( x_1 + \frac{1}{2} x_2 \right) \Omega' \cos nx + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( x_2 + \frac{1}{2} x_1 \right) \Omega' \cos ny + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \tau \Omega' \cos nx + \right. \right. \\ & + \left. \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \tau \Omega' \cos ny \right] \Gamma - \left[ \left( x_1 + \frac{1}{2} x_2 \right) \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \cos nx + \left( x_2 + \frac{1}{2} x_1 \right) \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \cos ny + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \tau \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \cos ny + \frac{1}{2} \tau \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} \cos nx \right] \Omega' \right\} ds \end{aligned}$$

Контурный интеграл во всех практически возможных случаях задач с так называемыми естественными граничными условиями, т. е. вытекающими из вариационного уравнения (4.15), обращается в нуль.

Таким образом функция  $\tilde{w}$ , представляющая собой согласно теореме 4 остаточный прогиб пластинки, выражается через функцию Грина упругой задачи и параметры кривизны и кручения в критическом состоянии простой формулой

$$\tilde{w}(x, y) = \iint \left[ x_1 \left( \Gamma_{\xi\xi} + \frac{1}{2} \Gamma_{\eta\eta} \right) + x_2 \left( \Gamma_{\eta\eta} + \frac{1}{2} \Gamma_{\xi\xi} \right) + \tau \Gamma_{\xi\eta} \right] \Omega' d\xi d\eta \quad (4.21)$$

Величины  $\Gamma_{\xi\xi}$ ,  $\Gamma_{\eta\eta}$ ,  $\Gamma_{\xi\eta}$  представляют собой параметры кривизны и кручения пластинки при действии единичной сосредоточенной силы.

Следуя первому методу решения задач, мы полагаем в первом приближении  $\Omega = 0$ . Тогда находим обычное упругое решение задачи

$$w^0 = \frac{1}{D} \iint q(\xi, \eta) \Gamma(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta \quad (4.22)$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} x_1^0 &= \frac{1}{D} \iint q(\xi, \eta) \Gamma_{xx} d\xi d\eta, & \tau^0 &= \frac{1}{D} \iint q(\xi, \eta) \Gamma_{xy} d\xi d\eta \\ x_2^0 &= \frac{1}{D} \iint q(\xi, \eta) \Gamma_{yy} d\xi d\eta, & x^0 &= \sqrt{x_1^{02} + x_2^{02} + x_1^0 x_2^0 + \tau^{02}} \end{aligned} \quad (4.23)$$

По формулам (4.7) или (4.10) находим  $\Omega^0(x^0)$  и из (4.21)—первое приближение остаточного прогиба. Мы вновь, следовательно, имеем очень простую



формулу (4.19) для общего и (4.21) для остаточного прогибов пластинки во втором и первом приближениях соответственно. Получение дополнительных приближений связано только с дифференцированием формулы (4.19) и вычислением квадратур по формуле (4.21), так как, зная второе приближение общего прогиба  $w$ , находим второе приближение остаточного прогиба  $\tilde{w}$  и т. д.

Для прямоугольных пластинок второй метод—вариационный—является более удобным, поскольку при этом могут быть применены во многих случаях тригонометрические ряды. Но прежде всего мы должны привести приближенную формулу, аналогичную соотношению (3.12), выражающую связь между нагрузкой и прогибом пластинки при упругих и пластических деформациях.

Пусть форма изогнутой поверхности пластинки известна с точностью до одного параметра  $w_0$ , являющегося характерным прогибом:

$$w = w_0 w^*(x, y) \tag{4.24}$$

причем нагрузка  $q$  определяется формулой

$$q = q_0 q^*(x, y) \tag{4.25}$$

Отнесем координаты  $x, y$  к характерному размеру пластинки  $a$ :

$$x^* = x/a, \quad y^* = y/a \tag{4.26}$$

Из формулы (4.6) находим выражение «кривизны»:

$$\chi^2 = \frac{w_0^2}{a^4} \chi^{*2} = \frac{w_0^2}{a^4} \left[ \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^* \partial y^*} \right)^2 + \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} \right] \tag{4.27}$$

Следовательно, работа внутренних сил согласно (4.13) будет

$$W = \frac{D w_0^2}{2a^4} \left[ \chi^{*2} - \sum_{n=1,2,\dots} \frac{3\lambda_{2n}}{(n+1)(2n+3)} \left( \frac{w_0 h}{a^2 \sqrt{3}} \right)^{2n} \chi^{*(2n+2)} \right] \tag{4.28}$$

и вариационное уравнение (4.15) нам дает

$$q_0 = \frac{D \sqrt{3}}{a^2 h} \alpha \frac{\iint \chi^{*2} dx^* dy^* - \sum \frac{3\lambda_{2n} \alpha^{2n}}{2n+3} \iint \chi^{*(2n+2)} dx^* dy^*}{\iint q^* w^* dx^* dy^*} \tag{4.29}$$

где

$$\alpha = \frac{w_0 h}{a^2 \sqrt{3}}$$

Обратим внимание на важную теорему, которая здесь доказана.

*Теорема подобия. Для всех пластинок, имеющих подобную форму в плане и нагруженных подобными нагрузками, деформации будут подобны, если величина*

$$\alpha = \frac{w_0 h}{a^2 \sqrt{3}}$$

*характеризующая прогиб, и величина*

$$\frac{q_0 a^2 h}{D \sqrt{3}}$$

*характеризующая нагрузку, остаются неизменными, а кривые, представляющие зависимость между  $\sigma_i$  и  $\epsilon_i$  для материалов этих пластинок, подобны.*

Действительно, для всех таких пластинок уравнения (4.29), в которых при точном решении для безразмерных прогибов  $w^*$  и кривизны  $\chi^*$  должны быть взяты их точные значения, тождественно совпадают, откуда следует совпадение и величин  $w^* = w/w_0$ .

Отсюда вытекает простой метод экспериментального решения задач о деформации пластинок на моделях.

Теорема подобия без труда может быть обобщена на пространственные задачи в общем случае: *в геометрически подобных телах, материал которых имеет подобные диаграммы для зависимости между  $\sigma_i$  и  $\varepsilon_i$ , перемещения соответствующих точек будут относиться как размеры, если нагрузка относится как модули упругости тел.*

Подробное решение задачи об упруго-пластической деформации свободно опертой пластинки, прямоугольной в плане, нам представляется темой для отдельной работы. Поэтому здесь укажем лишь приближенную зависимость прогиба прямоугольной свободно опертой пластинки от действующей на нее равномерной нагрузки, которую легко получить из соотношения (4.29).

Если прямоугольная пластинка не является слишком вытянутой в одном направлении, то приближенное выражение прогиба

$$w = w_0 \sin \pi x^* \sin \frac{\pi y^*}{b^*} \quad (4.30)$$

где  $b^* = b/a$  — отношение сторон, за пределами упругости должно даже лучше изображать деформацию, чем в пределах упругости, так как искривление центральной части в первом случае должно быть больше, чем во втором, а, как известно, формула (4.30) дает для упругой деформации значение кривизны в центре, завышенное на 5—10%.

Вычисления дают

$$\alpha^{*2} = \pi^4 \left[ \left( 1 + \frac{1}{b^{*2}} + \frac{1}{b^{*4}} \right) \sin^2 \pi x^* \sin^2 \pi \frac{y^*}{b^*} + \cos^2 \pi x^* \cos^2 \pi \frac{y^*}{b^*} \right]$$

Следовательно, из (4.29) находим

$$q = \frac{\pi^4 \sqrt{3} D}{4a^2 h} \left[ \pi^2 \alpha A_2 - \sum \frac{3\lambda_{2n}}{2n+3} (\pi^2 \alpha)^{2n+1} A_{2n+2} \right] \quad (4.31)$$

где коэффициенты  $A_{2n+2}$  выражаются через отношение  $a^* = a/b$ .

$$\begin{aligned} 4A_2 &= a^{*2} + (1 + a^{*2} + a^{*4}) \\ 64A_4 &= 9a^{*4} + 2a^{*2}(1 + a^{*2} + a^{*4}) + 9(1 + a^{*2} + a^{*4})^2 \\ 256A_6 &= 25a^{*6} + 3a^{*4}(1 + a^{*2} + a^{*4}) + 3a^{*2}(1 + a^{*2} + a^{*4})^2 + 25(1 + a^{*2} + a^{*4})^3 \\ &\dots \end{aligned} \quad (4.32)$$

Если ограничиться представлением функции  $\omega(\varepsilon_i)$  полиномом (1.23) и рассмотреть квадратную пластинку, то для нагрузки

$$q = \frac{\pi^4 \sqrt{3} D \varepsilon_S}{4a^2 h} q^*$$

и прогиба в центре

$$w_0 = \frac{\sqrt{3} a^2 \varepsilon_S}{\pi^2 h} w_0^*$$

получим соотношение

$$q^* = w_0^* - \frac{9}{7} \frac{\sigma_S' - \sigma_S}{\sigma_S'} \left( 1 - \frac{23}{56} w_0^{*2} \right) w_0^{*3} \quad (4.33)$$

где  $\sigma_S$  и  $\varepsilon_S$  — напряжения и деформации материала при пределе текучести.

Так как на диаграмме для зависимости  $\sigma_i = \sigma(\varepsilon_i)$  нам всегда известна точка разгрузки и соответствующая предельная деформация, то легко решается

вопрос о том, при каком прогибе образуются трещины на поверхности пластинки, т. е. решить вопрос о несущей способности пластинки. На основании выражения (4.27) находим наибольшую «кривизну» в центре

$$\chi = 3\pi^4 \frac{w_0^2}{a^4}$$

и согласно (4.3)—наибольшую интенсивность деформаций

$$\varepsilon_i = \frac{\pi^2 h w_0}{a^2}$$

Сравнивая последнюю с предельной деформацией материала  $\varepsilon_i''$ , находим максимальный прогиб

$$(w_0)_{\max} = \frac{a^2 \varepsilon_i''}{\pi^2 h} \quad (4.34)$$

и максимальную нагрузку

$$q_{\max} = \frac{\pi^4 D_{z_i}''}{4a^2 h} \left[ 1 - \frac{3}{7} \frac{\sigma_S' - \sigma_S}{\sigma_S^2} \frac{\varepsilon_i''^2}{\varepsilon_S^2} \left( 1 - \frac{23}{168} \frac{\varepsilon_i''^2}{\varepsilon_S^2} \right) \right] \quad (4.35)$$

Формулы для расчета доньев толстостенных цилиндров высоких давлений носят аналогичный характер и могут быть получены без особого труда.

Здесь приводятся результаты без подробных вычислений. Предполагая край защемленным, берем прогиб в виде

$$w = w_0 (1 - r^{*2})^2 \quad (4.36)$$

где  $r^* = r/a$  — отношение текущего радиуса к радиусу пластинки. Находим главные кривизны:

$$\chi_1 = \frac{d^2 w}{dr^2} = -\frac{4w_0}{a^2} (1 - 3r^{*2}), \quad \chi_2 = \frac{1}{2} \frac{dw}{dr} = -\frac{4w_0}{a^2} (1 - r^{*2}).$$

$$z^2 = \frac{16w_0^2}{a^4} (3 - 12r^{*2} + 13r^{*4}) = \frac{w_0^2}{a^4} z^{*2}$$

Полагая аналогично предыдущему

$$w_0 = \frac{a^2 \varepsilon_i''}{4h} w_0^*, \quad q = \frac{16 D_{z_i}''}{a^2 h} q^*$$

находим из (4.29) зависимость прогиба от нагрузки

$$q^* = w_0^* - \frac{3}{5} \frac{\sigma_S' - \sigma_S}{\sigma_S^2} \left( 1 - \frac{127}{686} w_0^{*2} \right) w_0^{*3} \quad (4.37)$$

Наибольшая «кривизна» получается в центре:

$$\chi_{\max} = 4 \sqrt{3} \frac{w_0''}{a^2} \quad (4.38)$$

Сравнивая максимальную интенсивность деформаций, вычисляемую по формуле (4.3) при  $z = \frac{1}{2} h$ , с предельной деформацией материала, находим прогиб в центре и предельную нагрузку, при которых образуются первые трещины в материале ( $w_0 = \varepsilon_i'' / \varepsilon_S$ ).

$$(w_0)_{\max} = \frac{a^2 \varepsilon_i''}{4h}$$

$$q_{\max} = \frac{16 D_{z_i}''}{a^2 h} \left[ 1 - \frac{3}{5} \frac{\sigma_S' - \sigma_S}{\sigma_S^2} \frac{\varepsilon_i''^2}{\varepsilon_S^2} \left( 1 - \frac{127}{686} \frac{\varepsilon_i''^2}{\varepsilon_S^2} \right) \right] \quad (4.39)$$

### 5. Осесимметричная деформация цилиндрической оболочки

Принимаем обозначения:  $a$  — средний радиус оболочки,  $h$  — толщина оболочки  $x, y, z$  — оси координат на срединной поверхности согласно фиг. 4;  $T_1, T_2, N$  — продольная и тангенциальная растягивающие и перерезывающие силы;

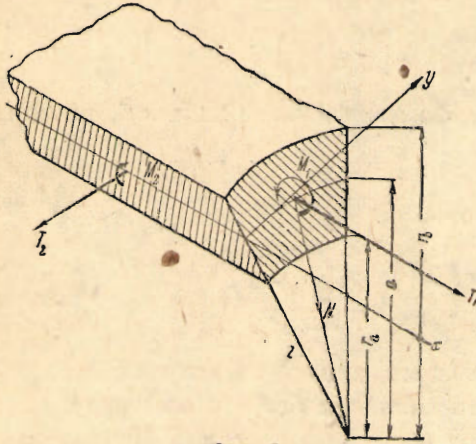
$M_1, M_2$  — изгибающие моменты;  $q$  — внешняя распределенная нагрузка, направленная по оси  $z$ ;  $w$  — радиальное перемещение срединной поверхности.

Основы теории изгиба оболочек остаются теми же, что и для пластинок, а потому без вывода можем написать выражения для основных напряжений и деформаций

$$\begin{aligned} X_x &= 4G(1-\omega) \left( e_{xx} + \frac{1}{2} e_{yy} \right) \\ Y_y &= 4G(1-\omega) \left( e_{yy} + \frac{1}{2} e_{zz} \right) \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$e_{xx} = \epsilon_0 - z \frac{d^2 w}{dz^2}$$

$$e_{yy} = -\frac{\omega}{a-z}$$



Фиг. 4

вытекающие из второго закона пластичности и основной гипотезы. Величина  $\epsilon_0$ , как следует из первой формулы, представляет относительное удлинение срединной поверхности вдоль оси  $x$ .

Интенсивность деформаций  $\epsilon_i$ , связанная с деформациями  $e_{xx}$  и  $e_{yy}$  соотношением

$$\epsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{xx} e_{yy}} \quad (5.2)$$

преобразуется с принятой в теории оболочек точностью к виду

$$\epsilon_i^* = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\epsilon_0^{*2} + \omega^{*2} - \epsilon_0^* \omega^* + \frac{3}{4} \ddot{w} (\omega^* - 2\epsilon_0^*) z^* + \frac{9}{16} \ddot{w}^{*2} z^{*2}} \quad (5.3)$$

Здесь  $\epsilon_i'$  — типичная деформация на диаграмме  $\sigma_i = \sigma(\epsilon_i)$ , величина  $\epsilon_0' = \epsilon_0 / \epsilon_i'$  представляет собой приведенное удлинение срединной поверхности,  $\epsilon_i^* = \epsilon_i / \epsilon_i'$  — приведенная интенсивность деформаций,  $\omega^* = w / (a\epsilon_i')$  — приведенный прогиб,  $\xi = x\sqrt{3} / \sqrt{ah}$  и  $z^* = 2z/h$  — безразмерные координаты соответственно по оси  $x$  и  $z$ . Точками наверху обозначаются производные по переменной  $\xi$ .

В тех случаях, когда продольная сила, растягивающая или сжимающая оболочку по оси, отсутствует или действует после того, как нагрузка  $q$  достигает своего окончательного значения, выражение интенсивности деформаций и вся теория изгиба значительно упрощаются. В самом деле, это условие, учитывая выражения для напряжений (5.1), приводит к равенству

$$-\ddot{w}^* \int_{-1}^{+1} (1-\omega) z^* dz^* + \frac{4}{3} \left( \epsilon_0^* - \frac{1}{2} \omega^* \right) \int_{-1}^{+1} (1-\omega) dz^* = 0 \quad (5.4)$$

Отсюда следует равенство

$$\varepsilon_0^* = \frac{1}{2} \omega^* \quad (5.5)$$

так как интенсивность деформаций при этом будет четной функцией  $z^*$ :

$$\varepsilon_i^* = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{4}{3} \omega^{*2} + \ddot{\omega}^{*2} z^{*2}} \quad (5.6)$$

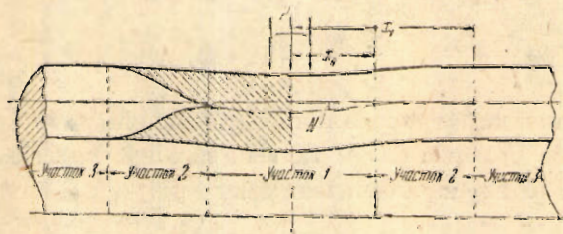
и, следовательно, первый член равенства также обращается в нуль вследствие нечетности подинтегральной функции по переменной  $z^*$ .

В дальнейшем будем предполагать, что диаграмма  $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$  для материала оболочки представляется схемой Прандтля (фиг. 2). Величины  $\sigma'$ ,  $\varepsilon_i'$  в таком случае будут представлять точку перелома диаграммы, т. е. границу между ее упругим и пластическим участками или геометрическое место точек нашей оболочки, в которых деформированное состояние соответствует переходной точке диаграммы  $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ . Полагая  $\varepsilon_i^* = 1$ , в (5.6) находим

$$z^{*2} \ddot{\omega}^{*2} + \frac{4}{3} \omega^{*2} = \frac{4}{3} \quad (5.7)$$

Оболочка разбивается на три участка (фиг. 5).

Участок 1 характеризуется тем, что деформация его будет чисто пласти-



Фиг. 5

ческой как по толщине, так и по длине оболочки. Для любой точки его имеет место неравенство

$$\varepsilon_i^* \geq 1$$

Участок 2 упруго-пластический; в любом сечении оболочки на этом участке будут существовать зоны чисто упругой и чисто пластической деформаций.

Участок 3 — упругий. Для него

$$\varepsilon_i^* \leq 1$$

Граница между первым и вторым участками согласно (5.7) определяется условием

$$\omega^{*2} = 1 \quad (5.8)$$

так как при  $z = 0$  выполняется равенство (5.7), то для других точек сечения  $\varepsilon_i^* > 1$ .

Граница между вторым и третьим участками находится из условия

$$\ddot{\omega}^{*2} + \frac{4}{3} \omega^{*2} = \frac{4}{3} \quad (5.9)$$

так как если при  $z^* = 1$  выполняется равенство (5.7), то для  $z^* < 1$  будет и  $\varepsilon_i^* < 1$ .

Граница между зонами упруго-пластического участка находится из равенства (5.7). Так как  $\varepsilon_1^* < 1$  для  $z^* = 0$  и  $\varepsilon \geq 1$  для  $z = 1$ , то это равенство имеет два действительных корня

$$z_0^* \ddot{\omega} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \omega^{*2}} \operatorname{sign} \ddot{\omega}^* \quad (5.10)$$

из которых первый является положительным, т. е. указывает границу пластической зоны, прилегающую к внутренней поверхности оболочек, второй — отрицательным.

Переходя к статической стороне вопроса, заметим, что напряженное состояние оболочки по толщине является антисимметричным относительно напряжения  $X_x$ . Действительно, функция  $\omega$  имеет значения

$$\begin{aligned} \omega &= 0 && \text{для } \varepsilon_i^* \leq 1 \\ \omega &= \lambda \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{z^{*2} \omega^{*2} + \frac{4}{3} \omega^{*2}}} \right) && \text{для } \varepsilon_i^* \geq 1 \end{aligned} \quad (5.11)$$

и, следовательно, по формулам (5.1) находим

$$\begin{aligned} X_x^* &= \frac{X_x}{3G\varepsilon_i'} = - (1 - \omega) z^* \ddot{\omega}^* \\ Y_y^* &= \frac{Y_y}{3G\varepsilon_i'} = - (1 - \omega) (\omega^* + \frac{1}{2} z^* \ddot{\omega}^*) \end{aligned} \quad (5.12)$$

Для составления дифференциальных уравнений равновесия найдем величины изгибающего момента  $M_1$  и тангенциальной силы  $T_2$  (фиг. 4). Пользуясь формулами (5.12) и обозначениями

$$M_1^* = \frac{4M_1}{\sigma' h^2}, \quad T_2^* = \frac{T_2}{ch} \quad (5.13)$$

исходя из выражений

$$M_1^* = \int_{-1/2}^{1/2} X_x z dz, \quad T_2^* = \int_{-1/2}^{1/2} X_x dz$$

получим

$$M_1^* = -\frac{2}{3} \ddot{\omega}^* + \frac{2}{3} \lambda \delta M_1^*, \quad T_2^* = -\omega^* + \frac{1}{4} \lambda \delta T_2^* \quad (5.14)$$

Величины  $\delta M_1^*$ ,  $\delta T_2^*$ , представляющие собой как бы поправку к упругому моменту и упругой тангенциальной силе, выражаются через функцию  $\omega$  интегралами

$$\delta M_1^* = \frac{3}{2} \ddot{\omega}^* \int_0^1 \omega z^{*2} dz^*, \quad \delta T_2^* = \frac{4}{\lambda} \ddot{\omega}^* \int_0^1 \omega dz^* \quad (5.15)$$

Для пластического (первого) участка оболочек после вычислений получим

$$\begin{aligned} \delta M_1^* &= \ddot{\omega}^* - \frac{\sqrt{3}}{\omega^{*2}} \sqrt{\omega^{*2} + \frac{4}{3} \omega^{*2}} + \sqrt{\frac{4\omega^{*2}}{3\omega^{*2}}} \ln \frac{\sqrt{3} (\omega^* + \sqrt{\omega^{*2} + \frac{4}{3} \omega^{*2}})}{2\omega^* \operatorname{sign} \omega^*} \\ \delta T_2^* &= 4\omega^* - \frac{8}{\sqrt{3}} \frac{\omega^*}{\omega^*} \ln \frac{\sqrt{3} (\omega^* + \sqrt{\omega^{*2} + \frac{4}{3} \omega^{*2}})}{2\omega^* \operatorname{sign} \omega^*} \end{aligned} \quad (5.16)$$

В сечениях упруго-пластического участка интегралы (5.15) в пределах от 0 до  $z_0^*$  обращаются в нуль, и после вычисления получим

$$\delta M^* = \ddot{\omega}^* + \frac{4(1+2\omega^{*2})}{3\sqrt{3}\ddot{\omega}^{*2}} \sqrt{1-\omega^{*2}} \operatorname{sign} \ddot{\omega}^* - \frac{\sqrt{3}}{\ddot{\omega}^*} \sqrt{\ddot{\omega}^{*2} + \frac{4}{3}\omega^{*2}} + \frac{4\omega^{*2}}{\sqrt{3}\ddot{\omega}^{*2}} \ln \frac{\sqrt{3}(\ddot{\omega}^* + \sqrt{\ddot{\omega}^{*2} + \frac{4}{3}\omega^{*2}})}{2(1 + \sqrt{1-\omega^{*2}} \operatorname{sign} \ddot{\omega}^*)} \quad (5.17)$$

$$\delta T_2^* = 4\omega^* - \frac{8\omega^*}{\sqrt{3}\ddot{\omega}^*} \sqrt{1-\omega^{*2}} \operatorname{sign} \ddot{\omega}^* - \frac{8\omega^*}{\sqrt{3}\ddot{\omega}^*} \ln \frac{\sqrt{3}(\ddot{\omega}^* + \sqrt{\ddot{\omega}^{*2} + \frac{4}{3}\omega^{*2}})}{2(1 + \sqrt{1-\omega^{*2}} \operatorname{sign} \ddot{\omega}^*)}$$

Для упругого участка имеем, конечно,

$$\delta M_1^* = \delta T_2^* = 0$$

Уравнения равновесия элемента оболочки в соответствии с принятыми обозначениями (фиг. 4)

$$\frac{dN}{dx} + \frac{1}{a} T_2 + q = 0, \quad \frac{dM}{dx} - N = 0 \quad (5.18)$$

Исключая величину перерезывающей силы и применяя безразмерное обозначение, получаем основное уравнение изгиба оболочки

$$\frac{d^4 \omega^*}{d\xi^4} + 4\omega^* = q^*(\xi) + \lambda \delta T_2^* + \lambda \frac{d^2 \delta M_1^*}{d\xi^2} \quad (5.19)$$

в котором  $q_1^*(\xi)$  представляет приведенную нагрузку

$$q^*(\xi) = \frac{4aq}{c'h} \quad (5.20)$$

Вид этого основного уравнения изгиба позволяет применить первый метод упругих решений (стр. 255).

Решение уравнения (5.20) без правой части выражается через функции Крылова  $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$ , имеющие выражения

$$\begin{aligned} Y_1 &= \operatorname{ch} \xi \cos \xi, & Y_3 &= \frac{1}{2} \operatorname{sh} \xi \sin \xi \\ Y_2 &= \frac{1}{2} (\operatorname{ch} \xi \sin \xi + \cos \xi \operatorname{sh} \xi), & Y_4 &= \frac{1}{4} (\operatorname{ch} \xi \sin \xi - \cos \xi \operatorname{sh} \xi) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Таблицы значений этих функций даны в работе А. Н. Крылова [11] по теории изгиба балок, лежащих на сплошном упругом основании, причем там же детально исследовано решение уравнения (5.19), но с известной правой частью ( $\delta T_2^* = \delta M_1^* = 0$ ).

Для дальнейшего существенны некоторые свойства указанных функций.

1. При нулевом значении аргумента функции  $Y_n$  и их производные удовлетворяют таблице

$n$	$Y_n(0)$	$Y_n'(0)$	$Y_n''(0)$	$Y_n'''(0)$
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1

2. Функции  $Y_n$  удовлетворяют системе дифференциальных уравнений.

$$\frac{dY_2}{d\xi} = Y_1, \quad \frac{dY_3}{d\xi} = Y_2, \quad \frac{dY_4}{d\xi} = Y_3, \quad \frac{dY_1}{d\xi} = -4Y_4$$

3. Для функций  $Y_4(\xi-t)$ ,  $Y_2(\xi-t)$  имеют место разложения:

$$\begin{aligned} Y_4(\xi-t) &= Y_4(\xi) Y_1(t) - Y_1(\xi) Y_4(t) + Y_2(\xi) Y_3(t) - Y_3(\xi) Y_2(t) \\ Y_2(\xi-t) &= Y_2(\xi) Y_1(t) - Y_1(\xi) Y_2(t) + Y_3(\xi) Y_4(t) - 4Y_4(\xi) Y_3(t) \end{aligned}$$

Первая из этих формул приводится в книге Крылова (с опечаткой); вторая же может быть легко проверена.

Учитывая непрерывность величин  $\delta M_1^*$ ,  $\frac{d}{d\xi} \delta M_1$  и  $\delta T_2^*$  на границах различных участков оболочки, можно написать «решение» уравнения (5.19) в виде

$$\begin{aligned} W &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n Y_n(\xi) + \int_0^{\xi} q(t) Y_4(\xi-t) dt + \\ &+ \lambda \int_0^{\xi} [\delta T_2^*(\xi) Y_4(\xi-t) + \delta M_1^*(\xi) Y_2(\xi-t)] dt \end{aligned} \quad (5.22)$$

причем постоянные  $c_n$  являются произвольными. Пользуясь свойствами разложения функций  $Y_n(\xi-t)$  и обозначая

$$\begin{aligned} A_1(\xi) &= c_1 - \lambda \int_0^{\xi} \left[ \left( \delta T_2^* + \frac{q^*}{\lambda} \right) Y_4(t) + \delta M_1^* Y_2(t) \right] dt \\ A_2(\xi) &= c_2 - \lambda \int_0^{\xi} \left[ \left( \delta T_2^* + \frac{q^*}{\lambda} \right) Y_3(t) + \delta M_1^* Y_1(t) \right] dt \\ A_3(\xi) &= c_3 - \lambda \int_0^{\xi} \left[ \left( \delta T_2^* + \frac{q^*}{\lambda} \right) Y_2(t) - 4\delta M_1^* Y_4(t) \right] dt \\ A_4(\xi) &= c_4 - \lambda \int_0^{\xi} \left[ \left( \delta T_2^* + \frac{q^*}{\lambda} \right) Y_1(t) - 4\delta M_1^* Y_3(t) \right] dt \end{aligned} \quad (5.23)$$

функции, зависящие от нагрузки на оболочку, граничных условий и поправки на момент, и тангенциальную силу  $\delta M_1^*$  ( $w^*$ ,  $\bar{w}^*$ ), получим выражения для прогиба и искривления оболочки

$$w^* = \sum_{n=1}^4 A_n(\xi) Y_n(\xi), \quad \bar{w}^* = \lambda \delta M_1^* - 4A_1 Y_2 - 3A_2 Y_4 + A_3 Y_2 + A_4 Y_2 \quad (5.24)$$

Рассмотрим задачу о бесконечно длинном цилиндре, находящемся под действием сосредоточенного кольцевого давления интенсивности  $p$  на единицу длины дуги окружности. Поместим начало координат в сечении, в котором действует приложенное давление, и, пользуясь симметрией, рассмотрим половину оболочки, относящуюся к  $x > 0$ .

Обозначая безразмерный прогиб и искривление оболочки под нагрузкой через  $\alpha$  и  $\beta$ , имеем

$$\alpha = w^*(0) = \frac{w_0}{\sigma \varepsilon_f}, \quad \beta = -\bar{w}^*(0) = -\frac{2h}{3\varepsilon_f} \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \right)_0 \quad (5.25)$$

Из условий

$$w^* = 0, \quad \frac{dw^*}{d\xi} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0$$

определим коэффициенты для (5.22):

$$c_1 = \alpha, \quad c_2 = 0$$



Обозначая  $A_1', A_2', A_3', A_4'$ , постоянные значения функций  $A_1, A_2, A_3, A_4$  на упругом участке, распространяющемся от некоторой координаты  $\xi_1$  до бесконечности, пользуясь (5.24), находим выражение прогиба на упругом участке

$$\omega^* = \frac{1}{2} \{ e^{-\xi} [A_1' - \frac{1}{2}A_2' + \frac{1}{4}A_4'] \cos \xi + (\frac{1}{2}A_2' - \frac{1}{2}A_3' + \frac{1}{4}A_4') \sin \xi \} + e^{\xi} [(A_1' + \frac{1}{2}A_2' - \frac{1}{4}A_4') \cos \xi + (\frac{1}{2}A_2' + \frac{1}{2}A_3' + \frac{1}{4}A_4') \sin \xi] \quad (5.26)$$

Из условий

$$\omega^* = 0, \quad \frac{d\omega^*}{d\xi} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = \infty$$

определяем выражения для

$$A_1' = \alpha - \lambda \int_0^{\xi_1} [\delta T_2^*(\xi) Y_4(\xi) + \delta M_1^*(\xi) Y_2(\xi)] d\xi, \quad A_3' = -2(A_1' + A_2') \quad (5.27)$$

$$A_2' = \lambda \int_0^{\xi_1} [\delta T_2^*(\xi) Y_3(\xi) + \delta M_1^*(\xi) Y_1(\xi)] d\xi, \quad A_4' = 2(2A_1' + A_2')$$

Для величины прогиба на упругом участке  $\xi > \xi_1$  получаем формулу

$$\omega^* = [A_1' \cos \xi + (A_1' + A_2') \sin \xi] e^{-\xi} \quad (5.28)$$

прогиб же на остальной части оболочки, так же как и ее искривление, определяются равенствами (5.24), но в функции  $A_n$  не входят произвольные постоянные, и они имеют вид

$$A_1 = A_1' + \lambda \int_{\xi}^{\xi_1} [\delta T_2^*(t) Y_4(t) + \delta M_1^*(t) Y_2(t)] dt$$

$$A_2 = A_2' - \lambda \int_{\xi}^{\xi_1} [\delta T_2^*(t) Y_3(t) + \delta M_1^*(t) Y_1(t)] dt$$

$$A_3 = A_3' + \lambda \int_{\xi}^{\xi_1} [\delta T_2^*(t) Y_2(t) - \delta M_1^*(t) Y_4(t)] dt$$

$$A_4 = A_4' - \lambda \int_{\xi}^{\xi_1} [\delta T_2^*(t) Y_1(t) - \delta M_1^*(t) Y_3(t)] dt \quad (5.29)$$

Нам остается найти соотношение между прогибом  $\omega_0$  и действующей нагрузкой  $p$ . Для этого проинтегрируем (5.18)

$$N_{\infty} - N + \int_0^{\infty} \frac{1}{a} T_2 dx = 0 \quad (5.30)$$

Замечая, что  $N_{\infty} = 0$ , а  $N_0$  связано с  $p$  соотношением

$$N_0 a = -\frac{1}{2} p (a + \frac{1}{2} h) \quad (5.31)$$

воспользуемся выражением силы  $T_2$  через прогиб (5.14) и получим из этого уравнения искомую зависимость

$$p^* = \int_0^{\infty} \left( \omega^* - \frac{1}{4} \lambda \delta T_2^* \right) d\xi \quad (5.32)$$

где безразмерная величина нагрузки  $p^*$  определяется зависимостью

$$p = \frac{2\sigma' h}{1 + \frac{1}{2} h/a} \sqrt{\frac{2h}{3a}} p^* \quad (5.33)$$

В соответствии с методом упругих решений задач пластичности в первом приближении полагаем  $\lambda = 0$ . Формулы (5.24) дают

$$\omega = \alpha (\sin \xi + \cos \xi) e^{-\xi} = \beta Y_5(\xi), \quad \ddot{\omega}^* = -2\alpha (\cos \xi - \sin \xi) e^{-\xi} = -2\alpha Y_6(\xi) \quad (5.34)$$

т. е. упругое решение.

Из условий (5.8) и (5.9) находим зависимости для определения первых приближений координат границ между первым, вторым и третьим участками оболочки:

$$Y_5(\xi_0) = \frac{1}{\alpha} \quad 3Y_6^2(\xi_1) + Y_5^2(\xi_1) = \frac{1}{\alpha^2} \quad (5.35)$$

В частном случае, если второе из равенств выполняется для точки  $\xi_1 = 0$ , деформация будет чисто упругой и пластическое состояние наступит только в одной точке  $z_0^* = 1, \xi = 0$ . Тогда имеем

$$Y_5(0) = Y_6(0) = 1$$

Следовательно,  $\alpha = \pm \frac{1}{2}$ . Уравнение (5.32) дает нам

$$p = \alpha \quad (5.36)$$

Таким образом, если прогиб удовлетворяет неравенству  $\alpha \leq \frac{1}{2}$ , то он прямо пропорционален силе.

Построения дальнейших приближений состоит в следующем: рассматриваем определенные числовые значения величин  $\lambda > 0$  и  $\alpha > \frac{1}{2}$ . Если одно из этих неравенств не выполнено, то имеет место упругое решение (5.34), (5.36).

Из (5.35) находим числовые значения границ  $\xi_0, \xi_1$  и по формулам (5.34), (5.16), (5.17) вычисляем значения функций  $\omega^*, \ddot{\omega}^*, \delta M_1^*, \delta T_2^*$  для переменной  $\xi$  через определенные малые интервалы. Затем по формулам (5.27), (5.29) и (5.24) вычисляем вторые приближения для значений функций  $\omega^*$  и  $\ddot{\omega}^*$ . После этого находим из условий (5.8) и (5.9) вторые приближения для выражений координат границ участков  $\xi_0, \xi_1$ . Формулы (5.16), (5.17) позволяют построить вторые приближения для  $\delta M_1^*, \delta T_2^*$ , а формулы (5.27), (5.29), (5.24) — третьи приближения для функций  $\omega^*, \ddot{\omega}^*$  и т. д. Достигнув желаемой точности, по последним приближениям значений функций  $\omega^*, \delta T_2, A_1, A_2, A_3, A_4$  и формуле (5.32) определяем величину приведенной силы  $p^*$ .

Таким образом каждой паре чисел  $\lambda, \alpha$  соответствуют определенные числа  $p^*$  и  $\beta = -\ddot{\omega}^*$ . Следовательно, практически задача может быть сведена к построению серии графиков

$$p^* = p^*(\alpha, \lambda), \quad \beta = \beta(\alpha, \lambda) \quad (5.37)$$

Довольно большой объем вычислений при этом искупается общностью полученных результатов, поскольку различные частные расчеты становятся совершенно элементарными.

В табл. 1 приводятся результаты вычислений трех приближений для значений  $p^*$  и  $\beta$ , проведенных С. М. Поповым.

На основании этой таблицы для зависимостей (5.37) на фиг. 6 построена серия графиков, которые могут быть применены для расчетов.

Таблица 1

$\lambda$	$p^*$					$\beta$					
	$\alpha$	0	0.5	1	2	3	0	0.5	1	2	3
0.00	0	0.5	1	2	3	0	1.00	2	4	6	
0.50	0	0.5	0.974	1.595	2.143	0	1.00	2.280	4.523	6.553	
0.75	0	0.5	0.962	1.400	1.738	0	1.00	2.390	4.784	6.830	
1.00	0	0.5	0.950	1.107	1.262	0	1.00	2.520	5.045	7.106	

Так, определим из формулы (5.33) по заданным размерам цилиндра ( $a, h$ ) материала и кольцевой нагрузке  $p$  кг/см величину  $p^*$ . Проведем на фиг. 6 прямую  $p = p^*$ . Абсцисса точки пересечения этой прямой с кривой  $p$  для данного значения  $\lambda$  дает значение величины  $\alpha$ , пересечение же ее ординаты с кривой  $\beta$  для рассматриваемого значения позволяет определить  $\beta$ . Определив  $\alpha$ , прогиб  $w_0$  можно подсчитать из формулы (5.25)

$$w_0 = a z_i' \alpha$$

Наиболее напряженным и деформированным является сечение оболочки под нагрузкой  $p(x=0)$ . Интенсивность деформаций в нем будет (5.6)

$$\varepsilon_i^* = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{4}{3} \alpha^2 + \beta^2 z^{*2}}$$

Ее максимум на внутренней и наружной поверхностях будет ( $\bar{z} = \pm 1$ )

$$(\varepsilon_i^*)_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{4}{3} \alpha^2 + \beta^2}$$

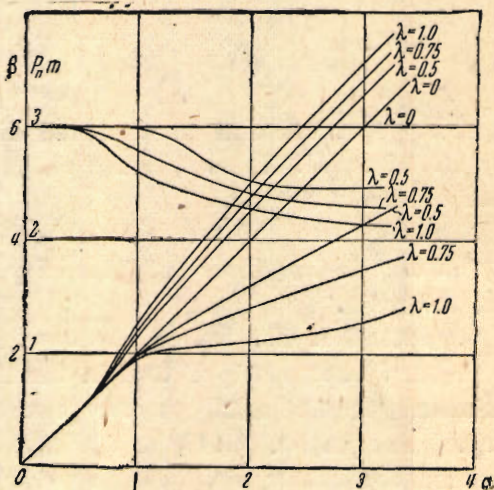
Формулы (5.12) дают распределение напряжений  $X_x^*, Y_y^*$  по толщине оболочки (для простоты предполагаем  $\alpha \geq 1$ )

$$X_x^* = \beta z^* \left( 1 - \lambda + \frac{2\lambda}{\sqrt{3} \sqrt{\beta^2 z^{*2} + \frac{4}{3} \alpha^2}} \right),$$

$$Y_y^* = \left( \frac{\beta z^*}{2} - \alpha \right) \left( 1 - \lambda + \frac{2\lambda}{\sqrt{3} \sqrt{\beta^2 z^{*2} + \frac{4}{3} \alpha^2}} \right)$$

Таким образом расчет оболочки закончен. Нас может интересовать еще величина остаточного прогиба после нагрузки. На основании теоремы о разгрузении заключаем, что остаточный прогиб, выраженный через  $\alpha$ , представляет собой отрезок прямой  $p = p^*$  от точки пересечения с кривой  $p$  до точки пересечения ее с прямой  $p = \alpha$ , т. е.  $\alpha_0 = \alpha - p^*$

З а м е ч а н и е. Если материал оболочки удовлетворяет идеальной кривой Treska, т. е. упрочнение у него отсутствует ( $\lambda = 1$ ), то из формул (5.14), (5.16) имеем



Фиг. 6

$$M_1^* = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[ \frac{1}{\psi} \sqrt{1+\psi^2} + \frac{1}{\psi^2} \ln(\sqrt{1+\psi^2}-1) \right], \quad T_2^* = \frac{1}{\psi} \ln(\sqrt{1+\psi^2}-1)$$

где функция

$$\psi = -\frac{\ddot{w}^* \sqrt{3}}{2w^*}$$

Основное уравнение равновесия, вытекающее из (5.18) в этом случае интегрируется в квадратурах.

Поступила в редакцию  
5 XII 1942.

Институт механики  
Академии Наук СССР

## SOME PROBLEMS ON THE THEORY OF PLASTIC DEFORMATIONS

A. A. ILYUSHIN

(Summary)

The paper contains an extended discussion of results presented up to now by R. Mises, H. Hencky, Huebers, M. Ros and Eichinger, Smirnov-Abiaev and others.

The first two chapters give as preliminary material a score of elementary definitions in the theory of plasticity together with a number of fundamental theorems.

Chapter 3 is devoted to the two methods for solving the elasto-plastic problems. The principal tool in the first method is the consequence of the so-called elastic solutions for equation (3.3) to which is reduced the principal equation (2.10) or (2.12) of equilibrium. In the second variation method the author employs the well-known function used in the theory of elasticity.

In chapter 4 the author illustrates how his constructions can be carried out by working through the problem on the deformation of a plate.

Chapter 5 deals with the deformation of a cylindrical shell having axial symmetry.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Hencky H. Zur Theorie plast. Deform. ZAMM. 1924. В. 4. Н. 4.
2. Hencky H. Простр. зад. упруго-пласт. равновесия. Известия ОН АН СССР. 1937. № 2.
3. Mises R. Mech. der festen Körper in plast. deform. Zustand. Gött. Nachricht. m. p. Kl. 1913.
4. Mises R. Bemerkungen z. Formulir. d. math. Problems Plastizitätstheorie. ZAMM. 1925. Vol. 5.
5. Prandtl L. Spannungsverteilung in plastischen Körpern. Proc. I Intern. Congress for Appl. Mech. Delft. 1924.
6. Nadai A. Plasticity. 1931.
7. Михлин С. Основные уравнения математ. теории пластичности. 1934. АН СССР.
8. Беляев Н. Теория пластических деформаций. Труды Конференции по пластическим деформациям. 1936. АН СССР.
9. Прагер Н. Новая математическая теория пластичности. Прикладная математика и механика. 1941. Т. V. Вып. 3.
10. Bijlaard. Proc. of the section sciences. R. Noderl. Akad. Vol. XLI.
11. Крылов А. Н. О расчете балок на упругом основании. Изд-во АН СССР. 1931.