

ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ С НЕСИММЕТРИЧНЫМ ПРОФИЛЕМ

П. М. РИЗ

(Новосибирск)

Рассмотрим колебания стержня, состоящие из изгибных колебаний с компонентами по направлениям наибольшей и наименьшей жесткости и из крутильных колебаний вокруг оси кручения, которую будем считать совпадающей с линией центров жесткости. Соответственно движения X , Y и θ .

Перечислим силы, действующие на элемент стержня, относим их к единице длины:

1. Упругие силы изгиба с компонентами $(EJ_2 X'')'' - (EJ_1 Y'')''$ с точкой приложения в центрах жесткости.

2. Упругие силы кручения, представляющие пару с моментом $-(GT\theta)'$.

3. Инерционные силы от колебаний изгиба с точкой приложения равнодействующей в центре тяжести и с компонентами $-m\ddot{X}$, $-m\ddot{Y}$.

4. Инерционные силы от колебаний кручения с точкой приложения равнодействующей в центре тяжести. Тангенциальные силы инерции имеют компоненты $-m(y_0 - y_i)\ddot{\theta}$, $-m(x_0 - x_i)\dot{\theta}$; центробежные силы имеют компоненты (фиг. 1) $m(y_0 - y_i)\dot{\theta}^2$, $m(x_0 - x_i)\dot{\theta}^2$. Момент этих сил относительно оси жесткости $-mJ_i\ddot{\theta}$.

5. Внешние возбуждающие силы (мы будем представлять их себе в виде распределенных переменных крутящих пар, для дальнейшего это не существенно) с моментом $M \sin \omega t$.

Для простоты изложения ограничимся случаем, когда жесткость в плоскости наибольшей жесткости может быть принята бесконечно большой и, следовательно движением X можно пренебрегать.

Уравнения движения оказываются в этом случае нелинейными и могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} (EY Y'')'' + m\ddot{Y} + m(y_0 - y_i)\ddot{\theta} - \varepsilon(\dot{\theta})^2 &= 0 \\ -(GT\theta)'' + my_i\ddot{\theta} - m(x_0 - x_i)\dot{\theta} &= M \sin \omega t \end{aligned}$$

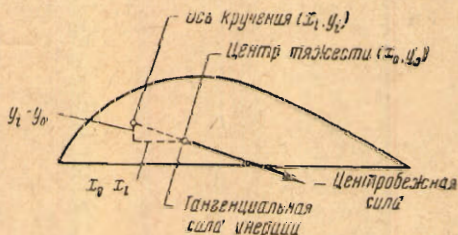
где $\varepsilon = m(y_0 - y_i)$.

Ввиду малости коэффициента ε при нелинейном члене, имеет смысл исследовать систему обычным приемом теории возмущений, разлагая решение по степеням малого параметра

$$Y = Y_0 + \varepsilon Y_1 + \dots, \quad \theta = \theta_0 + \varepsilon \theta_1 + \dots$$

Величины θ_0 и Y_0 легко определяются и представляют обычное вынужденное движение линейной колебательной системы, причем мы будем предполагать отсутствие резонанса.

Для θ_1 и Y_1 получается та же линейная система, что и для θ_0 и Y_0 , но с величиной $(\theta_0)^2$ в правой части первого уравнения и с нулем в правой части второго. Заметим, что так как θ_0 содержат члены вида $\sin \omega t$, то правая часть системы, определяющей Y_1 и θ_1 , будет содержать члены вида $\cos 2\omega t$, и явления резонанса будут наблюдаться при совпадении частоты возбуждающей силы ω с половиной собственной частоты системы. Это явление — возбуждение резонанса половинной частотой, характерное для нелинейных систем,



Фиг. 1

давно наблюдалось при колебаниях воздушных винтов, обладающих резко выраженным несимметричным профилем, но не получило до сих пор удовлетворительного объяснения. Разумеется, при рассмотрении следующих членов ряда будут получаться члены вида $\cos 3\omega t$ и т. д. Легко видеть, что в случае профиля, обладающего осью симметрии $y_0 - y_z = \varepsilon = 0$ и указанное явление не будет иметь места.

Величина рассмотренного эффекта зависит от значения ε , т. е. расстояния между центром тяжести и центром жесткости, и от близости крутильных и изгибных собственных частот. Если эти частоты далеки, то колебания изгиба и кручения можно практически считать независимыми и сам эффект будет слабо наблюдаемым.

Поступила в редакцию
15 I 1943.

Центральный аэрогидродинамический
институт им. Жуковского

OSCILLATION OF BARS OF NON-SYMMETRICAL SHAPE DUE TO BENDING AND TWISTING

P. M. RYZ

(Summary)

The author attempts to explain the appearance of resonance at a frequency equal to the half of the natural frequency of the oscillating system.

This phenomenon can be frequently observed in oscillations of a propeller blade having a very unsymmetrical shape.
