Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика, том VII, 1943

ЗАМЕТКИ

О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА ПРИ БОЛЬШИХ УГЛАХ КРУТКИ

А. Ю. ИШЛИНСКИЙ

(Москва)

Эта задача подвергалась уже неоднократно элементарному исследованию[1] и, кроме того, исследовалась при помощи теории конечных деформаций Зволинским и Ризом[2].

Здесь мы попытаемся изложить некоторые соображения, позволяющие рассмотреть эту задачу аналитически, оставаясь в рамках классической теории упругости.

Пусть достаточно длинный стержень, ось которого совпадает с осью x, скручивается так, что длина его остается неизменной. Выделим элемент стержня длиною l и обозначим через φ угол, на который повернется правое сечение относительно левого. Если оба крайних сечения расположены вдали от мест закрепления, то образующие цилиндрической поверхности обратятся после деформации в винтовые линии и длина их будет равна

$$\sqrt{l^2 + a^2\varphi^2} \tag{1}$$

если пренебречь возможным сокращением радиуса цилиндрической поверхности. Считая отношение $a\varphi/l$ не слишком большим, получим для относительного удлинения образующих выражение

$$\frac{1}{l}\left(\sqrt{l^2 + a^2\varphi^2} - l\right) = \frac{a^2\varphi^2}{2l^2} \tag{2}$$

Для образующих, расположенных на расстоянии r от оси цилиндра, величина относительного удлинения будет

$$\frac{r^2\varphi^2}{2l^2} = \chi r^2, \qquad \left(\chi = \frac{\varphi^2}{2l^2}\right) \tag{3}$$

Это выражение можно с достаточной точностью принять за меру относительного удлинения частиц цилиндра в направлении оси x, т. е. за компонент тензора деформации ε_x.

Относительное удлинение в направлении радиуса цилиндра и относительное удлинение в направлении, перпендикулярном к плоскостям, проходящим через ось цилиндра, соответственно будут

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \qquad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \tag{4}$$

Здесь через u обозначено радиальное смещение точек цилиндра. Вывод этих простых формул общеизвестен. Что же касается перемещения v, перпендикулярного к осевым сечениям цилиндра, то при условии равномерной крутки оно будет постоянным на каждой цилиндрической поверхности и в формулы для компонент тензора деформации не войдет, Согласно обобщенному закону Гука имеем

$$\sigma_x = \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_x, \qquad \sigma_r = \lambda\Delta + 2\varphi\varepsilon_r, \qquad \sigma_\theta = \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_\theta \tag{5}$$

где λ и μ — константы Ляме, а $\Delta = \varepsilon_x + \varepsilon_r + \varepsilon_\theta$.

---

[1] Список литературы см. в книге С. П. Тимошенко. «Сопротивление материалов», ч. 1, ГТТИ, 1934.
[2] Доклады Академии Наук СССР, 1938.

Подставляя значения компонент тензора деформации, получим

$$\sigma_x = (\lambda + 2\mu)\,\chi r^2 + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right), \qquad \sigma_r = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial r} + \lambda\left(\chi r^2 + \frac{u}{r}\right);$$

$$\sigma_\theta = (\lambda + 2\mu)\frac{u}{r} + \lambda\left(\chi r^2 + \frac{\partial u}{\partial r}\right) \tag{6}$$

Рассмотрим уравнения равновесия элемента цилиндра длиной dx, заключенного между концентрическими цилиндрическими поверхностями радиусов r и $r + dr$ и между двумя осевыми сечениями цилиндра, под углом $d\theta$ друг к другу (фиг. 1).

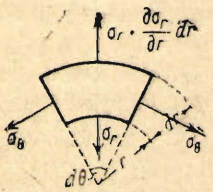
Проектируя все силы, действующие на элемент, на радиальное направление, получим

$$\left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r}\right)(r + dr)\,d\theta\,dx - \sigma_r r\,d\theta\,dx - 2\sigma_\theta\,dr\,dx\,\frac{d\theta}{2} = 0$$

Отсюда

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \tag{7}$$

Этот результат можно было непосредственно заимствовать из теории упругости.



Фиг. 1

Подставляя в это уравнение значения σ_r и σ_θ, получим

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[(\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial r} + \lambda\left(\chi r^2 + \frac{u}{r}\right)\right] + \frac{1}{r}\left[2\mu\frac{\partial u}{\partial r} - 2\mu\frac{u}{r}\right] = 0$$

Отсюда после упрощений получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = -\frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu}\chi r^2 \tag{8}$$

линейное дифференциальное уравнение для определения радиального смещения u как функции r.

Соответствующее уравнение без правой части имеет линейно независимые решения

$$u_1 = r, \qquad u_2 = \frac{1}{r}$$

Уравнение же с правой частью имеет частный интеграл

$$u = -\frac{\lambda}{4(\lambda + 2\mu)}\chi r^3$$

и, таким образом, общее решение примет вид

$$u = -\frac{\lambda}{4(\lambda + 2\mu)}\chi r^3 + Ar + B\frac{1}{r} \tag{9}$$

где A и B — произвольные постоянные.

Так как при $r = 0$ u должно обращаться в нуль, то постоянную B следует положить равной нулю.

Постоянную A можно определить, используя обращение в нуль напряжения σ_r на боковой поверхности цилиндра.

Для напряжения σ_r по формуле (6), подставляя u, имеем

$$\sigma_r = (\lambda + 2\mu)\left(-\frac{3\lambda}{4(\lambda + 2\mu)}\chi r^2 + A\right) + \lambda\left(\chi r^2 - \frac{\lambda}{4(\lambda + 2\mu)}\chi r^2 + A\right) =$$

$$= \frac{\lambda\mu}{2(\lambda + 2\mu)}\chi r^2 + 2(\lambda + \mu)A \tag{10}$$

Полагая теперь $r = a$ и $\sigma_r = 0$, получим

$$A = -\frac{\lambda\mu}{4(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)}\chi a^2 \tag{11}$$

и, следовательно, окончательно

$$\sigma_r = -\frac{\lambda\mu}{2(\lambda + 2\mu)}\chi(a^2 - r^2) \tag{12}$$

Таким образом внутри цилиндра имеет место давление цилиндрических слоев друг на друга. Максимальной величины это давление достигает на оси цилиндра и составляет величину

$$(\sigma_r)_{r=a} = -\frac{\lambda\mu a^2\chi}{2(\lambda+2\mu)} = -\frac{\lambda\mu a^2\varphi^2}{4(\lambda+2\mu)\,l^2} \tag{13}$$

Не представляет труда сделать пересчет констант Ляме λ и μ на естественные константы E и ν, воспользовавшись соотношениями

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \qquad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Далее очевидно, что радиус цилиндра при деформировании будет уменьшаться. Чтобы посчитать это уменьшение, следует положить $r = a$ в выражение (9) для перемещения u. Получим

$$(u)_{r=a} = -\frac{\lambda}{4(\lambda+2\mu)}\chi a^3 + Aa = -\frac{\lambda}{4(\lambda+\mu)}\chi a^3 = -\frac{\lambda\varphi^2 a^3}{8(\lambda+\mu)\,l^2} \tag{14}$$

Выражение для напряжений в поперечном сечении цилиндра, если подставить (9) и (11) в (6), будет

$$\sigma_x = 2\lambda A + 4\frac{(\lambda+\mu)\mu}{\lambda+2\mu}\chi r^2$$

По этим напряжениям можно подсчитать продольную силу P, развивающуюся по поперечному сечению цилиндра. Имеем

$$P = \int \sigma_x dF = \int_0^a 2\pi r\sigma_x dr = 2\pi a^2\lambda A + \frac{(\lambda+\mu)\mu}{\lambda+2\mu}\chi\pi a^4 = \pi a^4\chi\mu^2\frac{2\lambda+\mu}{(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)}$$

$$P = -2\pi a^2\lambda\frac{\lambda\mu}{4(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)}\chi a^2 + \frac{(\lambda+\mu)\mu}{\lambda+2\mu}\chi\pi a^4$$

Таким образом при сохранении длины цилиндра при его крутке он будет подвергаться в целом деформации растяжения. Если же края цилиндра не удерживать, то он укоротится на величину $(Pl)/(EF)$ согласно известной формуле закона Гука. При этом поперечные сечения цилиндра будут искажаться, ибо элементы, расположенные вблизи оси и вблизи поверхности, будут иметь деформации разных знаков.

Наконец, заметим, что касательные напряжения при крутке будут, очевидно, следовать элементарной теории кручения и, следовательно, между углом закрутки и скручивающим моментом будет иметь место линейное соотношение, известное из теории сопротивления материалов.

Поступила в редакцию 7 IV 1941.

THE STRESSED STATE OF A CYLINDER AT LARGE ANGLES OF TORSION

A. J. ISHLINSKY

(Summary)

The paper deals with the twisting of a circular cylinder and with so-called secondary effects such as the shortening of the length of the cylinder, the decrease in diameter and the compressive radial stresses due to torsion.