

## РАЗРУШЕНИЕ ДЛИННЫХ ВОЛН В КАНАЛЕ

М. С. МАРАНЦ

(Одесса)

Так называемые «длинные волны» в каналах и реках подробно рассмотрены в работе С. А. Христиановича [1]. В ней же рассмотрен вопрос о разрушении плотины, а также разрушение так называемой волны одного направления у фронта ее сопряжения с равномерным движением.

В настоящей работе рассматривается задача о разрушении волны произвольного типа. Принятые обозначения:  $s$  — расстояние вдоль канала,  $t$  — время,  $U$  — средняя скорость в данном поперечном сечении русла,  $F$  — площадь живого сечения,  $H$  — высота уровня,  $B$  — ширина водного зеркала.

Приведем те положения и соотношения из работы С. А. Христиановича [1], которые будут использованы в этой статье.

Система дифференциальных уравнений неустановившегося движения в канале имеет два семейства характеристик: первое

$$U + \lambda(F) = \xi, \quad ds = \left( U + \sqrt{\frac{gF}{B}} \right) dt = W dt \quad (0.1)$$

и второе

$$U - \lambda(F) = \eta, \quad ds = \left( U - \sqrt{\frac{gF}{B}} \right) dt = \Omega dt \quad (0.2)$$

причем

$$\lambda(F) = \int_0^F \sqrt{\frac{g}{BF}} dF$$

Если за неизвестные функции принять  $s$  и  $t$ , а за независимые переменные  $\xi$  и  $\eta$ , дифференциальные уравнения движения принимают вид

$$\frac{\partial s}{\partial \eta} = W \frac{\partial t}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial s}{\partial \xi} = \Omega \frac{\partial t}{\partial \xi} \quad (0.3)$$

Из уравнений (0.3) путем исключения получаем для определения  $t(\xi, \eta)$  уравнение второго порядка, которое для параболического русла  $F = cH^n$ , где  $c = \text{const}$ , принимает вид

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\beta}{\xi - \eta} \left( \frac{\partial t}{\partial \xi} - \frac{\partial t}{\partial \eta} \right), \quad \beta = \frac{2n+1}{2} \quad (0.4)$$

Решение системы (0.3) имеет физический смысл, если

$$\Delta = \frac{D(s, t)}{D(\xi, \eta)} = 2 \sqrt{\frac{gF}{B}} \frac{\partial t}{\partial \xi} \frac{\partial t}{\partial \eta} \neq 0 \quad (0.5)$$

С другой стороны, обращение этого якобиана в нуль есть необходимое и достаточное условие наступления разрушения.

С момента наступления разрушения возникают новые волны. Одна из них образует прерывный фронт.

Обозначим буквами без черты величины, характеризующие сечение обрушивающейся волны, а буквами с чертой — величины для волны, на которую обрушивается предыдущая. Тогда имеет место соотношение

$$U = \bar{U} \pm \sqrt{\Psi(\lambda, \bar{\lambda})}, \quad \Psi = \frac{1}{4n(n+1)} \left( \frac{\lambda^{2n+2}}{\bar{\lambda}^{2n}} + \frac{\bar{\lambda}^{2n+2}}{\lambda^{2n}} - \lambda^2 - \bar{\lambda}^2 \right) \quad (0.6)$$

В плоскости  $\xi\eta$  этому уравнению соответствуют кривые

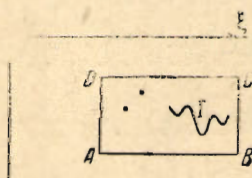
$$\eta = x_1(\xi), \quad \eta = x_2(\xi) \quad (0.7)$$

соответственно одна для знака плюс, другая для знака минус.

Для скорости распространения прерывного фронта имеем

$$\theta = \frac{UF - \bar{U}\bar{F}}{F - \bar{F}} \quad (0.8)$$

Как установлено в цитируемой работе, все волны, т. е. интегралы уравнения (0.4), делятся на четыре типа в зависимости от знаков производных  $\partial t / \partial \xi$ ,  $\partial t / \partial \eta$ . В настоящей статье подробно рассматривается разрушение «прямой волны повышения», далее отмечаются отличия, которые имеют место для волны «смешанного» типа. Волны типа «обратной волны повышения» могут быть сведены к первому из рассмотренных типов. Волны четвертого типа разрушения не испытывают.



Фиг. 1

**1. Возникновение разрушений.** Рассмотрим для определенности прямую волну повышения, т. е. решение уравнения (0.4)  $t(\xi, \eta)$  в прямоугольнике  $ABCD$ , для которого  $\partial t / \partial \xi > 0$ ,  $\partial t / \partial \eta > 0$  вблизи точки  $A$  (фиг. 1).

Может случиться, что для некоторого  $\xi$  функция  $\partial t / \partial \xi$  имеет несколько нулей в данном прямоугольнике. Рассмотрим нули функции  $\partial t / \partial \xi$  с наименьшими ординатами. Ограничимся тем случаем, когда таких изолированных нулей есть конечное число, все же остальные располагаются на ограниченном числе кривых, не имеющих особенностей. То же допустим и о функции  $\partial t / \partial \eta$ . Предположим также, что эти кривые не могут иметь на конечном участке бесконечного числа общих точек, не совпадая целиком на этом участке. Тогда получаем, что для функции  $\Delta$  [см. (0.5)] нули с наименьшей ординатой располагаются так же (т. е. изолированных нулей есть конечное число), остальные же располагаются на конечном числе некоторых кривых  $\Gamma$ .

Покажем, что в вершинах кривых  $\Gamma$ , соответствующих минимуму  $\eta$ , функция  $t(\xi, \eta)$  имеет минимум по сравнению со своими значениями в точках этой кривой.

Действительно, во-первых, ни на какой дуге  $\Gamma$ , не параллельной оси  $\xi$ , не может быть

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} = \frac{\partial t}{\partial \eta} = 0$$

Это вытекает из единственности решения задачи Коши.



Тогда вдоль прерывного фронта согласно (0.8) имеем

$$\frac{ds}{dt} = \theta(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \xi, \eta)$$

Вдоль кривой  $\bar{\nu}$  это запишется в виде

$$\frac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{\xi}} d\bar{\xi} + \frac{\partial \bar{s}}{\partial \bar{\eta}} d\bar{\eta} = \theta \left( \frac{\partial \bar{t}}{\partial \bar{\xi}} d\bar{\xi} + \frac{\partial \bar{t}}{\partial \bar{\eta}} d\bar{\eta} \right)$$

Здесь  $\bar{s} = \bar{s}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ ,  $\bar{t} = \bar{t}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$  — волна (а).

Откуда

$$d\bar{\eta} = \frac{\theta \frac{\partial \bar{t}}{\partial \bar{\xi}} - \partial \bar{s} / \partial \bar{\xi}}{\partial \bar{s} / \partial \bar{\eta} - \theta \frac{\partial \bar{t}}{\partial \bar{\eta}}} d\bar{\xi}$$

Заметим, что

$$\frac{\partial \bar{s} / \partial \bar{\xi}}{\partial \bar{t} / \partial \bar{\xi}} = \left( \frac{ds}{dt} \right)_{\bar{\eta} = \text{const}} = \bar{\Omega}, \quad \frac{\partial \bar{s} / \partial \bar{\eta}}{\partial \bar{t} / \partial \bar{\eta}} = \left( \frac{ds}{dt} \right)_{\bar{\xi} = \text{const}} = \bar{W}$$

как угловые коэффициенты характеристик  $\bar{\eta} = \text{const}$  и соответственно  $\bar{\xi} = \text{const}$  волны (а) согласно (0.1) и (0.2).

Поэтому

$$d\bar{\eta} = \frac{(\theta - \bar{\Omega}) \frac{\partial \bar{t}}{\partial \bar{\xi}}}{(\bar{W} - \theta) \frac{\partial \bar{t}}{\partial \bar{\eta}}} d\bar{\xi} \quad (2.1)$$

Дифференциал времени  $t$  вдоль прерывного фронта

$$d\bar{t} = \frac{\partial \bar{t}}{\partial \bar{\xi}} d\bar{\xi} + \frac{\partial \bar{t}}{\partial \bar{\eta}} d\bar{\eta} = \frac{D(\bar{t}, \bar{s})}{D(\bar{\xi}, \bar{\eta})} \frac{d\bar{\xi}}{(\bar{W} - \theta) \frac{\partial \bar{t}}{\partial \bar{\eta}}} \quad (2.2)$$

То же значение дифференциала времени  $dt$  очевидно должно быть и вдоль соответствующего элемента кривой  $\nu$ , проводимой из  $M$ .

Обозначим  $s = s(\xi, \eta)$ ,  $t = t(\xi, \eta)$  волну (с). В области некоторой криволинейной трапеции, ограниченной с одной стороны отрезком  $MK$ , с другой — кривой  $\nu$ , имеем

$$\frac{\partial s}{\partial \xi} = \Omega \frac{\partial t}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial s}{\partial \eta} = W \frac{\partial t}{\partial \eta} \quad (2.3)$$

Вдоль кривой  $\nu$  должно быть

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial t}{\partial \eta} d\eta = dt, \quad \frac{\partial s}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial s}{\partial \eta} d\eta = \theta dt \quad (2.4)$$

где  $dt$  имеет прежнее значение (2.2).

Для получения дифференциальных уравнений кривой  $\nu$  определим из соотношений (2.4) величину  $d\xi$  для кривой  $\nu$ :

$$d\xi = \frac{(\theta - W) dt}{(\Omega - W) \partial t / \partial \xi} \quad (2.5)$$

Кроме того, точки кривой  $\nu$  должны лежать на кривой  $\eta = \eta_1(\xi)$ , проведенной из соответствующей точки кривой  $\bar{\nu}$ . Следовательно, можно записать  $\eta = \eta_1(\xi, \bar{\xi}, \bar{\eta})$ , и для кривой  $\nu$  поэтому имеем

$$d\eta = \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \eta_1}{\partial \bar{\xi}} d\bar{\xi} + \frac{\partial \eta_1}{\partial \bar{\eta}} d\bar{\eta} \quad (2.6)$$

Для определения волны (с) будем сначала находить функцию  $t(\xi, \eta)$  из уравнения второго порядка, получаемого исключением  $s$  из (2.3) при условии, что функция  $t$ , во-первых, принимает на отрезке  $MK$  заданные значения, а, во-вторых, на кривой  $\nu$ , задаваемой уравнениями (2.5) и (2.6), принимает

значения, удовлетворяющие первому уравнению (2.4), где для  $dt$  взято выражение (2.2).

Затем будем определять функцию  $s$  из уравнений (2.3) по начальному значению в точке  $M$ . Вдоль кривой  $\nu$  для  $ds = \Omega (\partial t / \partial \xi) d\xi + W (\partial t / \partial \eta) d\eta$  получим значение, взяв из первого уравнения (2.4) выражение  $(\partial t / \partial \eta) d\eta$ , а из (2.5) выражение  $d\xi$ . Значения вдоль кривой  $\nu$  совпадут с значениями  $s$  в соответствующих точках кривой  $\nu$ .

Таким образом для определения волны (с) и прерывного фронта получится система уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 t}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{\beta}{\xi - \eta} \left( \frac{\partial t}{\partial \xi} - \frac{\partial t}{\partial \eta} \right), & d\bar{\eta} &= \frac{(\theta - \bar{\Omega}) \partial \bar{t} / \partial \bar{\xi}}{(\bar{W} - \theta) \partial \bar{t} / \partial \bar{\eta}} d\bar{\xi} \\ dt_v &= \frac{D(\bar{t}, \bar{s})}{D(\bar{\xi}, \bar{\eta})} \frac{1}{(W - \theta) \partial t / \partial \eta} d\bar{\xi} \\ d\bar{\xi}_v &= \frac{D(\bar{t}, \bar{s})}{D(\bar{\xi}, \bar{\eta})} \frac{(\theta - W)}{(\bar{\Omega} - W)(\bar{W} - \theta) (\partial \bar{t} / \partial \bar{\eta}) (\partial \bar{t} / \partial \bar{\xi})} d\bar{\xi} \\ d\eta_v &= \frac{\partial x_1}{\partial \bar{\xi}_v} d\bar{\xi}_v + \frac{\partial x_1}{\partial \bar{\xi}} d\bar{\xi} + \frac{\partial x_1}{\partial \bar{\eta}} d\bar{\eta} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь  $\xi_v, \eta_v, t_v$  — координаты кривой  $\nu$  и значения функции  $t$  на ней в отличие от обозначений независимых переменных  $\xi, \eta$  и значений функции  $t(\xi, \eta)$  для определяемой волны (с), которые не имеют индексов.

Краевые и начальные условия:

- 1) на отрезке  $MK$  функция  $t(\xi, \eta)$  принимает заданные значения;
- 2) на кривой  $\nu$  функция  $t = t_v$ ;
- 3) для  $\bar{\xi} = \bar{\xi}_M = \bar{\xi}_0$

$$t_v(\bar{\xi}) = t_0, \quad \bar{\xi}_v(\bar{\xi}) = \bar{\xi}_M = \bar{\xi}_0, \quad \eta_v(\bar{\xi}) = \eta_M = \eta_0, \quad \eta(\bar{\xi}) = \eta_M = \eta_0$$

**3. Исследование уравнений.** Определим знаки правых частей в последних четырех уравнениях для  $H > \bar{H}$ .

Предварительно обнаруживаем, что разности  $W - \theta, \theta - \bar{W}, \theta - \bar{\Omega}$ , встречающиеся в выражениях правых частей, положительны. Для первой разности это установлено в названной работе С. А. Христиановича. Аналогично устанавливаем это для второй разности. Тогда вследствие того, что  $\bar{W} > \bar{\Omega}$ , это имеет место и для последней разности.

Отсюда получаем, что

$$\frac{d\eta}{d\bar{\xi}} < 0, \quad \frac{dt_v}{d\bar{\xi}} < 0 \quad (3.1)$$

так как частные производные  $\partial t / \partial \bar{\xi}, \partial \bar{t} / \partial \bar{\eta}$ , а также  $D(\bar{t}, \bar{s}) / D(\bar{\xi}, \bar{\eta})$  для волны (а) по предположению положительны в прямоугольнике  $ABCD$  для точек ниже кривой  $\Gamma$ .

Точно так же можно отметить, что повсюду, где положительна частная производная  $\partial t / \partial \xi$  функции  $t(\xi, \eta)$ , определяющей волну (с),

$$\frac{d\bar{\xi}_v}{d\bar{\xi}} < 0 \quad (3.2)$$

Напомним, что  $\partial t / \partial \xi > 0$  в точке  $M$  и на отрезке  $MK$ .

Покажем теперь, что

$$\frac{d\eta_v}{d\bar{\xi}} = \frac{\partial \eta_v}{\partial \bar{\xi}} + \frac{\partial \eta_v}{\partial \bar{\eta}} \frac{d\bar{\eta}}{d\bar{\xi}} + \frac{\partial \eta_v}{\partial \bar{\xi}_v} \frac{d\bar{\xi}_v}{d\bar{\xi}} < 0$$

Рассмотрим раньше  $\partial\eta_v/\partial\bar{\xi} = \partial x_1/\partial\bar{\xi}$ . Так как  $\eta_v = x_1(\bar{\xi}, \xi, \bar{\eta})$  есть кривая, соответствующая уравнению (0.6)

$$U = \bar{U} + \sqrt{\Psi(\lambda, \bar{\lambda})}$$

то для определения  $\partial x_1/\partial\bar{\xi}$  совершим подстановку в это уравнение, переходя от переменных  $U, \lambda$  к  $\xi, \eta$ , согласно (0.1), (0.2). Получаем

$$\frac{\partial x_1}{\partial\bar{\xi}} = \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{\Psi}} \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda}\right) : \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{\Psi}} \frac{\partial\Psi}{\partial\bar{\lambda}}\right)$$

Согласно (0.6) имеем

$$\Psi = \frac{1}{4n(n+1)} \frac{1}{\lambda^{2n}\bar{\lambda}^{2n}} (\lambda^{2n} - \bar{\lambda}^{2n}) (\lambda^{2n+2} - \bar{\lambda}^{2n+2})$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda} = \frac{1}{2n(n+1)} \frac{1}{\lambda^{2n+1}\bar{\lambda}^{2n}} [(n+1)\bar{\lambda}^{4n+2} - n\lambda^{4n+2} - \bar{\lambda}^{2n+2}\lambda^{2n}]$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\bar{\lambda}} = \frac{1}{2n(n+1)} \frac{1}{\lambda^{2n+1}\bar{\lambda}^{2n}} [(n+1)\lambda^{4n+2} - n\bar{\lambda}^{4n+2} - \lambda^{2n+2}\bar{\lambda}^{2n}]$$

При  $\lambda > \bar{\lambda}$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda} > 0, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial\bar{\lambda}} < 0$$

Покажем, что  $\partial x_1/\partial\bar{\xi} \leq 0$ . Для этого обнаружим, что

$$\left| \frac{1}{2\sqrt{\Psi}} \frac{\partial\Psi}{\partial\bar{\lambda}} \right| \geq 1$$

Вводя обозначение  $\bar{\lambda}/\lambda = v$  ( $v < 1$ ), имеем

$$\frac{1}{2\sqrt{\Psi}} \left| \frac{\partial\Psi}{\partial\bar{\lambda}} \right| = \Phi(v) = \frac{n + v^{2n+2} - (n+1)v^{4n+2}}{2\sqrt{n(n+1)} v^{n+1} \sqrt{(1-v^{2n})(1-v^{2n+2})}}$$

Обозначим

$$v^{2n+2} - v^{4n+2} = l, \quad 1 - v^{2n+2} = k$$

Тогда

$$\Phi(v) = \frac{[nk + (n+1)l]}{2\sqrt{nk(n+1)l}}$$

откуда  $\Phi(v) \geq 1$  и, следовательно,  $\partial x_1/\partial\bar{\xi} \leq 0$ .

Рассматривая далее  $\partial x_1/\partial\eta$ , имеем

$$\frac{\partial x_1}{\partial\eta} = \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{\Psi}} \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda}\right) : \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{\Psi}} \frac{\partial\Psi}{\partial\bar{\lambda}}\right) > 0$$

Наконец, имеем  $\partial x_1/\partial\xi > 0$ , что вытекает из формы кривой  $\eta = x_1(\xi)$ . Таким образом окончательно получаем согласно (3.1), (3.2)

$$\frac{d\eta_v}{d\bar{\xi}} < 0 \tag{3.3}$$

повсюду, где  $\partial t/\partial\xi > 0$ .

Установленные знаки позволяют судить о форме кривых  $\bar{v}$ ,  $v$ . Из неравенств

$$\frac{d\eta_v}{d\bar{\xi}} < 0, \quad \frac{d\bar{\eta}}{d\bar{\xi}} < 0, \quad \frac{d\bar{\xi}_v}{d\bar{\xi}} < 0, \quad \frac{d\eta_v}{d\bar{\xi}} < 0$$

видно: 1) с ростом  $t$  функция  $\bar{\xi}$  убывает, 2) для кривой  $\bar{v}$  угловой коэффициент отрицателен и она расположена влево от  $\bar{M}$ , 3) для кривой  $v$  угловой коэффициент положителен и она располагается вправо от  $M$ . Все это вполне согласуется с непосредственными соображениями.

Тот факт, что  $d\bar{\xi}/d\xi < 0$ ,  $d\eta/d\bar{\xi} < 0$ , можно использовать с тем, чтобы в качестве параметра вдоль кривых  $\nu$ ,  $\nu$  выбрать  $\xi$ , или  $\eta$ . Выбрав параметр  $\eta$ , имеем вместо (2.7):

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \bar{\xi} \partial \eta} = \frac{\beta}{\xi - \eta} \left( \frac{\partial t}{\partial \bar{\xi}} - \frac{\partial t}{\partial \eta} \right)$$

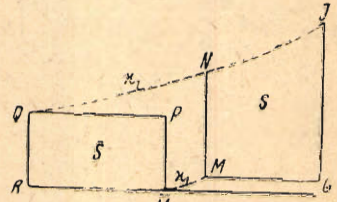
$$\frac{d\bar{\xi}}{d\eta_\nu} = \left( \frac{\partial x_1}{\partial \bar{\xi}} + \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \frac{d\bar{\eta}}{d\bar{\xi}} + \frac{\partial x_1}{\partial \xi_\nu} \frac{d\xi_\nu}{d\bar{\xi}} \right)^{-1} = f_1 \left\{ \bar{\xi}, \eta, \xi_\nu, \eta_\nu, \left( \frac{\partial t}{\partial \bar{\xi}} \right)_\nu \right\} \quad (3.4)$$

$$\frac{d\bar{\eta}}{d\eta_\nu} = \frac{d\bar{\eta}}{d\bar{\xi}} \frac{d\bar{\xi}}{d\eta_\nu} = f_2, \quad \frac{d\xi_\nu}{d\eta_\nu} = f_3, \quad \frac{d\xi_\nu}{d\eta_\nu} = f_4$$

Здесь  $f_2, f_3, f_4$  — функции тех же аргументов, что и функция  $f_1$ , а  $(\partial t / \partial \bar{\xi})$  обозначает значение  $\partial t / \partial \bar{\xi}$  для волны ( $c$ ) в точке кривой  $\nu$ .

Покажем ограниченность правых частей в последних четырех уравнениях (3.4), рассматриваемых как функции пяти аргументов  $\bar{\xi}, \eta, \xi_\nu, \eta_\nu, (\partial t / \partial \bar{\xi})$ , в некоторой области их изменения.

Область построим так. От точки  $\bar{M}$  откладываем влево по горизонтали  $\eta = \bar{\eta}_0$  некоторый отрезок (фиг. 3), на котором строим прямоугольник  $\bar{M}PQR$ . Стороны его достаточно малы, чтобы в пределах его  $D(\bar{t}, s) / D(\bar{\xi}, \eta) \neq 0$ . Этот прямоугольник — область изменения  $\bar{\xi}, \eta$ . Назовем его  $\bar{S}$ .



Фиг. 3

Теперь из точки  $Q$  проведем кривую  $\eta = x_1(\bar{\xi}, \bar{\xi}_Q, \bar{\eta}_Q)$ . Областью изменения  $\bar{\xi}, \eta$  выберем  $MGJN$ . Обозначим ее  $S$ . Так как  $\partial x_1 / \partial \bar{\xi} < 0$ ,  $\partial x_1 / \partial \bar{\eta} > 0$ , то всякая кривая  $\eta = x_1(\bar{\xi}, \bar{\xi}, \bar{\eta})$ , проведенная из любой точки  $\bar{S}$ , окажется расположенной ниже кривой  $\eta = x_1(\bar{\xi}, \bar{\xi}_Q, \bar{\eta}_Q)$ .

Область изменения  $(\partial t / \partial \bar{\xi})$ , пусть составляют значения, близкие к значениям  $\partial t / \partial \bar{\xi}$  на отрезке  $MG$  настолько, чтобы все они были положительными и притом больше некоторого положительного числа.

Покажем раньше ограниченность правых частей второго, третьего и четвертого уравнений системы (2.7).

Заметим, что  $\lambda - \bar{\lambda} > C > 0$  для всяких двух точек кривой  $\eta = x_1(\bar{\xi}, \bar{\xi}, \bar{\eta})$ , взятых соответственно из  $\bar{S}, S$ , а следовательно, и  $H - \bar{H} > C_1 > 0$ , где  $C, C_1$  зависят от величины щели  $\bar{M}E$ . Это вытекает из положительности, непрерывности и ограниченности  $\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \frac{1}{2\sqrt{\Psi}} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda}$  в областях  $\bar{S}$  и  $S$ .

Отсюда и из сказанного на стр. 183 заключаем, что  $\theta - W$  остается большим некоторого положительного числа в  $\bar{S}$  и  $S$ . Из последнего же, а также из того, как выбраны размеры  $\bar{S}$  и  $S$ , вытекает, что в этой области ограничены правые части трех рассматриваемых уравнений.

Покажем теперь ограниченность  $d\bar{\xi}/d\eta_\nu$ .

Очевидно, исходя из рассмотренных ранее знаков,

$$\left| \frac{d\bar{\xi}}{d\eta_\nu} \right| = \left| \left( \frac{\partial x_1}{\partial \bar{\xi}} + \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \frac{d\bar{\eta}}{d\bar{\xi}} + \frac{\partial x_1}{\partial \xi_\nu} \frac{d\xi_\nu}{d\bar{\xi}} \right)^{-1} \right| \leq \left| \left( \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \frac{d\bar{\eta}}{d\bar{\xi}} \right)^{-1} \right|$$

Но

$$\frac{\partial x_1}{\partial \eta} = \left( 1 + \frac{1}{2\sqrt{\Psi}} \left| \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \right| \right) : \left( 1 + \frac{1}{2\sqrt{\Psi}} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \right)$$

Как было уже упомянуто,  $\frac{1}{2\sqrt{\Psi}} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda}$  остается меньше некоторого положительного числа  $A$  в областях  $\bar{S}$  и  $S$ . Точно так же установлено, что  $\frac{1}{\sqrt{\Psi}} \left| \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \right| \geq 1$ . Следовательно,  $\frac{\partial x_1}{\partial \eta} \geq \frac{2}{1+A}$ . Исходя из тех же соображений, что при рассмотрении разности  $\theta - \bar{W}$ , получаем, что

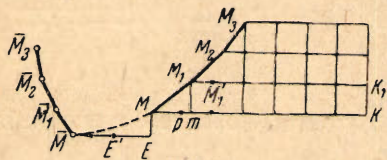
$$\left| \frac{d\eta}{d\bar{\xi}} \right| = \frac{(\theta - \bar{W}) \partial \bar{t} / \partial \bar{\xi}}{|\bar{W} - \theta| \partial \bar{t} / \partial \eta} > B > 0$$

Отсюда имеем

$$\left| \frac{d\bar{\xi}}{d\eta} \right| < \frac{1+A}{2B}$$

Исходя из ограниченности функций, которым приравнены  $d\eta/d\bar{\xi}$ ,  $dt/d\bar{\xi}$ ,  $d\bar{\xi}_v/d\bar{\xi}$ ,  $d\bar{\xi}/d\bar{\xi}$ ,  $d\bar{\xi}/d\eta$ , в системе (2.7), получаем ограниченность правых частей последних четырех уравнений системы (3.4).

Форма уравнений системы (3.4) позволяет построить приближенное решение. Заменяем для этого эти уравнения конечно разностными. Выбрав  $\eta$  в качестве параметра вдоль кривых  $\bar{v}$ ,  $v$ , можно сообщить  $\Delta\eta$ , некоторое малое значение и найти  $\Delta\bar{\xi}$ ,  $\Delta\eta$ ,  $\Delta t$ ,  $\Delta\bar{\xi}_v$ , т. е. построить по одному отрезочку для ломаных, заменяющих кривые  $\bar{v}$  и  $v$ . Получим точки  $\bar{M}_1, M_1$  и значение  $t$  в этих точках. Тогда, заменяя уравнение в частных производных второго порядка системы (3.4) конечно разностным, получаем



Фиг. 4

$$t_{\bar{\xi}M_1} = t_{\bar{\xi}m_1} + \Delta\eta \frac{\beta}{\bar{\xi}_{m_1} - \eta_{m_1}} (t_{\bar{\xi}m_1} - t_{\eta m_1}) \quad \text{причем} \quad t_{\eta m_1} = \frac{t_{M_1} - t_{m_1}}{\Delta\eta}$$

При этом на отрезке  $MK$  точки деления ( $M, p, \dots$ ) взаимно отстоят на  $\Delta\eta$ .

Условливаемся внутри каждого такого отрезочка изменять  $t$  линейно. Следовательно,  $t_{\bar{\xi}m_1} = t_{\bar{\xi}p}$ . Зная  $t_{\bar{\xi}M_1}$ , узнаем тем самым  $t_{M_1}$  и точно так же значения  $t$  последовательно во всех точках деления отрезка  $M_1K_1$ . Далее можно продолжать попрежнему и построить ломаные  $\bar{v}$  и  $v$  и значения функции  $t$  в вершинах квадратной сетки, у которой сторона каждой ячейки равна  $\Delta\eta$ .

**4. Явление разрушения в конечной области.** Рассмотрим, как протекает явление разрушения волны во всем прямоугольнике  $ABCD$ .

На фиг. 5 нанесены ветви кривой  $\Gamma$  с вершинами  $E_0', E_1', E_2'$ . Точки  $g_1'$  и  $g_2'$  — изолированные нули с наименьшей ординатой  $\eta$  при данной абсциссе  $\bar{\xi}$ .

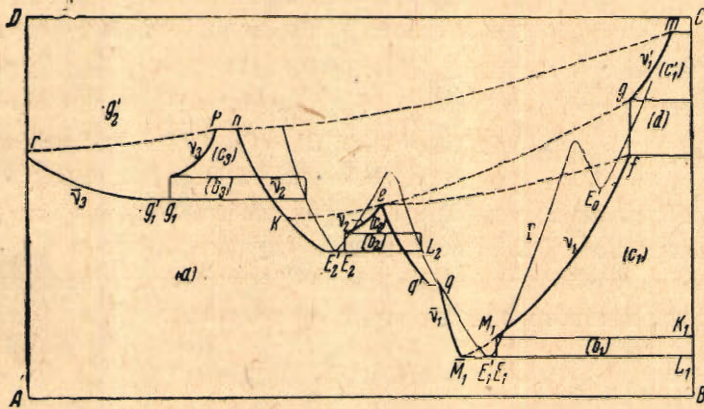
Построение прерывных волн начинаем с той вершины  $\Gamma$ , у которой ордината наименьшая, в данном случае  $E_1'$ . Строим у этой точки волну ( $b_1$ ) по значениям  $t$  на характеристиках  $E_1L_1$  и  $M_1E_1$  (вдоль  $M_1E_1$  функция  $t = \text{const} = t_{E_1}$ ). Точка  $M_1$  получена проведением кривой  $\eta = x_1(\bar{\xi})$  через  $\bar{M}_1$ . Проводим кривые  $\bar{v}_1$  и  $v_1$  соответственно через точки  $\bar{M}_1$  и  $M_1$ .

Если кривая  $\bar{v}_1$  пересечет кривую  $\Gamma$  (как это на чертеже, в точке  $q$ ), то, так как это может случиться лишь на дуге  $\Gamma$  с отрицательным угловым коэффициентом, это означает, что в этой точке волны ( $a$ ) производная  $\partial t / \partial \bar{\xi} = 0$ , т. е. так же, как и в точке  $E_1'$ , в данный момент для малого значения  $ds$  переменная  $\bar{\xi}$  изменяется на конечную величину, и дальше



следует продолжать построение  $\gamma_1$  от некоторой точки  $q'$ , лежащей на той же горизонтали левее.

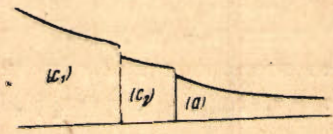
Может случиться, что кривая  $\bar{\gamma}_1$  не пересечет прямой  $E_2'L_2$ , а пройдет левее вершины  $E_2'$ . В таком случае построения при этой точке делать не придется. В данном случае  $\bar{\gamma}_1$  пересекает  $E_2'L_2$ . Поэтому приостанавливаем построение  $\bar{\gamma}_1$ , соответствующей дуги  $\gamma_1$  и волны  $(c_1)$  и обращаемся к вершине  $E_2'$ , при которой строим соответствующие ей волны  $(b_2)$  и  $(c_2)$



Фиг. 5

и кривые  $\bar{\gamma}_2, \gamma_2$ , определяющие [новый прерывный фронт. Теперь кривую  $\bar{\gamma}_1$  будем продолжать на волне  $(b_2)$ , а потом на волне  $(c_2)$ .

Может случиться, что  $\gamma_1$  пересечет кривую  $\gamma_2$ , как это показано на фиг. 5. Это означает, что первый прерывный фронт настиг второй. Мгновенный профиль в этом месте имеет вид, представленный на фиг. 6. Здесь на небольшом отрезке  $ds$  в данный момент  $t$  рядом очутятся скорости и высоты, соответствующие точкам  $k, e, f$ . Поэтому продолжаем кривую  $\eta = \alpha_1(\xi)$ , проведенную через точку  $k$  до пересечения с вертикалью (фиг. 5), проведенной через точку  $f$  до точки  $g$ . Образуется один прерывный фронт, по обе стороны которого будут высоты и скорости, определяемые точками  $k$  и  $g$ . Назад пойдет обратная волна  $(d)$ , которая определяется по характеристике  $gf$ , на которой  $t = \text{const}$ , и характеристике  $fh$ , вдоль которой происходит сопряжение с волной  $(c_1)$ .

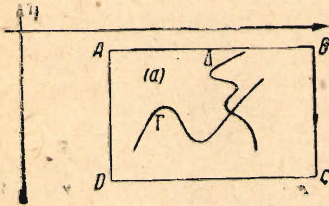


Фиг. 6

В дальнейшем ничего нового не встретится. Заканчиваться кривые  $\gamma$  и  $\bar{\gamma}$  могут по-разному. На чертеже приводится пример возможного окончания. Здесь в конце концов устанавливаются два прерывных фронта между равномерными движениями  $m, n$  и  $p, r$ .

**5. Разрушение волны «смешанного» типа.** Исследуем, как протекает явление разрушения у волны смешанного типа, которая получается, если решить уравнение (0.4) в прямоугольнике  $ABCD$  (фиг. 7), причем  $dt/\partial\xi > 0$ ,  $dt/\partial\eta < 0$  вблизи точки  $A$ . В этом случае рассмотрим нули функции  $dt/\partial\xi$  с наибольшей ординатой  $\eta$  и нули  $dt/\partial\eta$  с наименьшей абсциссой  $\xi$  в прямоугольнике  $ABCD$ . Ограничиваемся рассмотрением лишь того случая, когда существует коначное число изолированных нулей, а остальные располагаются соответственно на двух кривых  $\Gamma$  и  $\Delta$  с конечным числом максимумов  $\eta$

на первой и минимумов  $\xi$  на второй. У этих кривых не может быть общей дуги. Допускаем опять, что они могут иметь лишь ограниченное число общих точек пересечения. Точно так же, как и раньше, имеем, что  $t$  достигает в указанных вершинах этих кривых минимум по сравнению со своими значениями на этих кривых. Построение проводим, начиная с вершины кривой  $\Delta$ ,

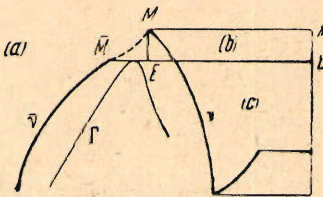


Фиг. 7

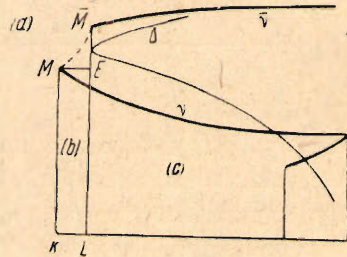
имеющей наименьшую абсциссу  $\xi$ , и с вершины кривой  $\Gamma$ , имеющей наибольшую ординату  $\eta$ .

Построение, проводимое у вершины кривой  $\Gamma$ , не являющейся притом точкой пересечения с кривой  $\Delta$  ( $\partial t / \partial \xi = 0$ ,  $\partial t / \partial \eta \neq 0$ ), а также у вершины кривой  $\Delta$ , не являющейся пересечением с  $\Gamma$  ( $\partial t / \partial \xi \neq 0$ ,  $\partial t / \partial \eta = 0$ ), будет аналогичным рассмотренному. Возможный ход явления указан на фиг. 8 и 9. Здесь обратная волна (b) на втором листе, волна (c) на двух листах и притом покрывает (b). Может также случиться, что волна (c) — прямая или соответственно обратная волна одного направления, представится отрезком  $MK$ , вдоль которого она и сопрягается с волной (b).

Здесь обратная волна (b) на втором листе, волна (c) на двух листах и притом покрывает (b). Может также случиться, что волна (c) — прямая или соответственно обратная волна одного направления, представится отрезком  $MK$ , вдоль которого она и сопрягается с волной (b).

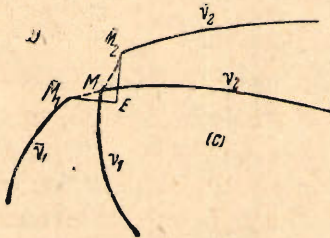


Фиг. 8

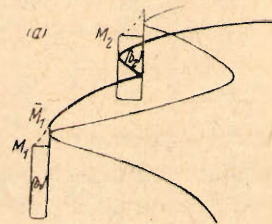


Фиг. 9

Если приходится совершать построение от точки, в которой пересекаются обе кривые  $\Gamma$  и  $\Delta$ , для которой, следовательно,  $\partial t / \partial \xi = \partial t / \partial \eta = 0$ , то возможны три случая, в зависимости от взаимного расположения кривых  $\eta = x_1(\xi, \bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1)$ ,  $\eta = x_2(\xi, \bar{\xi}_2, \bar{\eta}_2)$ , проведенных соответственно из точек  $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_2$ .



Фиг. 10



Фиг. 11

Если кривая  $x_1$  расположится над  $x_2$  или под нею в пределах угла  $\bar{M}_1 E \bar{M}_2$ , то построение будет таким же, как в только что рассмотренных случаях. Интерес представляет третья возможность, когда кривые  $x_1$  и  $x_2$  пересекаются в пределах этого угла (фиг. 10). В этом случае получаем два фронта прерывной волны (c), нарушающей волну (a) влево и вправо.

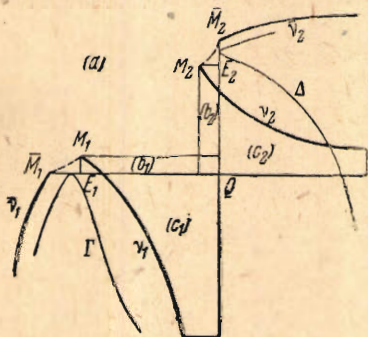
Обратимся к тому, как протекает разрушение смешанной волны во всем прямоугольнике. Здесь возможны случаи, когда последовательное построение волны проводится у двух вершин одной и той же кривой или разных кривых. Первый случай (фиг. 11) не отличается существенно от уже рассмотренного

для «прямой волны повышения» (п. 4). Следует лишь учесть, что волна (b) лежит вторым листом над волной (a), а волна (c) над волной (b).

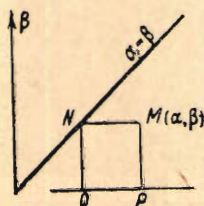
Второй случай, когда построение последовательных волн придется проводить у двух вершин обеих кривых  $\Gamma$  и  $\Delta$ , представлен на фиг. 12.

Здесь на характеристиках  $E_1M_1$  и  $E_1Q$  построена волна  $b_1$  у вершины  $E_1$  кривой  $\Gamma$ . Соответственно построена волна ( $b_2$ ). Эти волны расположены вторыми листами над волной (a). Волны ( $c_1$ ) и ( $c_2$ ) расположены третьими листами. Ясно, что если развернуть листы, следует достроить еще четыре волны, каждую по двум характеристикам.

**6. Доказательство существования решения и его единственности.** Покажем, что если существует решение системы (3.4) при указанных краевых условиях, для которого функции, образующие решение, и встречающиеся



Фиг. 12



Фиг. 13

в дифференциальных уравнениях их производные непрерывны, то можно совершить замену переменных

$$\xi = \xi_0 + \alpha, \quad \eta = \eta(\beta)$$

при которой кривая  $\gamma$  преобразуется в биссектрису координатного угла плоскости  $\alpha\beta$ . Имеем для кривой  $\gamma$

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{d\xi}{d\alpha} \frac{d\alpha}{d\beta} \frac{d\beta}{d\eta} = f_4$$

При  $d\alpha/d\beta = 1$  имеем  $d\beta/d\eta = f_4$ . За начальное условие принимаем  $\eta = \eta_0$  для  $\beta = 0$ . Тогда имеем  $\beta = \beta(\eta)$ . Из сказанного в § 3 видно, что в известной области существует функция, обратная по отношению к ней.

Система (3.4) перейдет в новых переменных в следующую:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 t}{\partial \alpha \partial \beta} &= f \left( \xi, \eta, \frac{d\eta}{d\beta}, \frac{\partial t}{\partial \alpha}, \frac{\partial t}{\partial \beta} \right) \\ \frac{d\bar{\xi}}{d\beta} &= \frac{d\xi}{d\eta} \frac{d\eta}{d\beta} = \frac{f_1}{f_4} = \varphi_1, & \frac{d\bar{\eta}}{d\beta} &= \frac{f_2}{f_4} = \varphi_2 \\ \frac{d\bar{t}}{d\beta} &= \frac{f_3}{f_4} = \varphi_3, & \frac{d\eta}{d\beta} &= \frac{1}{f_4} = \varphi_4 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Здесь  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  и  $\varphi_4$  функции аргументов  $\xi, \eta, \bar{\xi}, \eta, (\partial t / \partial \xi)$ . Краевые условия будут  $t(\alpha, \beta) = \varphi(\alpha)$  для  $\beta = 0$ . При этом предполагаем, что  $\varphi(\alpha)$  имеет ограниченную вторую производную на рассматриваемом отрезке  $\beta = 0$ ,

$$\begin{aligned} t(\alpha, \beta) &= t, \quad \text{для } \alpha = \beta, \\ \bar{\eta} &= \bar{\eta}_0, \quad \bar{\xi} = \bar{\xi}_0; \quad t_0 = t_0, \quad \eta_0 = \eta_0 \quad \text{для } \beta = 0. \end{aligned}$$

Очевидно,  $\xi, = \xi_0 + \beta$ .

Функции  $t(\alpha, \beta)$ ,  $\bar{\xi}(\beta)$ ,  $\bar{\eta}(\beta)$ ,  $t_0(\beta)$ ,  $\eta_0(\beta)$ , удовлетворяющие предшествующей системе, удовлетворяют также и следующей системе интегродифференциальных уравнений, получаемой интегрированием тождеств по прямоугольнику  $MNQP$  (фиг. 13) (далее всюду под знаками интегралов  $\alpha$  и  $\beta$  заменяется соответственно на  $u$  и  $v$ ):

$$\begin{aligned} t(\alpha, \beta) &= \int_{\beta}^{\alpha} \int_0^{\beta} f du dv + \varphi(\alpha) - \varphi(\beta) + t_0(\beta), & t_0(\beta) &= \int_0^{\beta} \varphi_3 dv + t_0 \\ \bar{\xi}(\beta) &= \int_0^{\beta} \varphi_1 dv + \bar{\xi}_0, & \bar{\eta}(\beta) &= \int_0^{\beta} \varphi_2 dv + \bar{\eta}_0, & \eta(\beta) &= \int_0^{\beta} \varphi_4 dv + \eta_0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Дифференцируем эти тождества (вводя для дальнейшего обозначения),

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial \alpha} &= p = \int_0^{\beta} f dv + \frac{d\varphi}{d\alpha}, & \frac{d\eta}{d\beta} &= \eta' = \varphi_4(\beta, \beta) \\ \frac{\partial t}{\partial \beta} &= q = \int_{\beta}^{\alpha} f(u, \beta) du - \int_0^{\beta} f(\beta, v) dv + \varphi_3(\beta, \beta) - \frac{d\varphi}{d\beta} \end{aligned} \quad (6.2')$$

В подинтегральных функциях  $\varphi_i$  следует брать

$$\left( \frac{\partial t}{\partial \xi} \right)_v = \left( \frac{\partial t}{\partial \bar{\xi}} \right)_{\alpha=\beta}$$

Решение этой системы интегродифференциальных уравнений  $t(\alpha, \beta)$ ,  $p(\alpha, \beta)$ ,  $q(\alpha, \beta)$ ,  $\bar{\xi}(\beta)$ ,  $\bar{\eta}(\beta)$ ,  $t_0(\beta)$ ,  $\eta_0(\beta)$ ,  $\eta'(\beta)$  определяет собой решение исходной дифференциальной системы (6.1). Существование решения и его единственность докажем методом последовательных приближений.

Раньше всего заметим, что функции  $\varphi_i(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \xi, \eta, p, q)$  определены в точке  $(\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, \xi_0, \eta_0, p_0, q_0, \eta_0')$  и непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в некоторой ее окрестности. (Здесь  $p_0, q_0, \eta_0'$  — значения  $p, q, \eta'$ , получаемые из последних равенств при  $\alpha = \beta = 0$ ). Пусть эта окрестность определяется неравенствами:

$$|\bar{\xi} - \bar{\xi}_0| < A_{\bar{\xi}}, \dots, |\eta' - \eta_0'| < A_{\eta'} \quad (6.3)$$

где  $A_{\bar{\xi}}, \dots, A_{\eta'}$  — некоторые определенные числа. Тогда для этой окрестности определяются числа  $M, K$  так, что

$$\begin{aligned} |\varphi_i| < M, & \quad |f| < M, & \quad \left| \frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} \right| < M \\ |\varphi_i - \varphi_i^*| < K [ |\bar{\xi} - \bar{\xi}^*| + |\bar{\eta} - \bar{\eta}^*| + \dots + |p - p^*| ] \\ |f - f^*| < K [ |\xi - \xi^*| + \dots + |q - q^*| ] \end{aligned} \quad (6.4)$$

Возьмем первое приближение в виде

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_1(\beta) &= \xi_0 + \int_0^{\beta} \varphi_1[0] dv, & \left( \varphi_i[n] &= \varphi_i[\bar{\xi}_n, \bar{\eta}_n, \xi_n, \eta_n, p_n] \right), & p_1(\alpha, \beta) &= \frac{d\varphi}{d\alpha} \\ \eta_1(\beta) &= \bar{\eta}_0 + \int_0^{\beta} \varphi_2[0] dv, & \eta_1(\beta) &= \eta_0 + \int_0^{\beta} \varphi_4[0] dv, & \eta_1'(\alpha, \beta) &= \varphi_4[1] \\ q_1(\alpha, \beta) &= -\frac{d\varphi}{d\beta} + \varphi_3[1], & t_1(\alpha, \beta) &= \varphi(\alpha) - \varphi(\beta) + t_0 + \int_0^{\beta} \varphi_3[0] dv \end{aligned} \quad (6.5)$$

В силу (6.4) можно подобрать такую область  $0 \leq \alpha \leq a_1$ ,  $0 \leq \beta \leq b_1$  изменения  $\alpha$ ,  $\beta$ , чтобы все функции, входящие в первое приближение, были в ней определены и чтобы для них выполнялись неравенства (6.4).

Возьмем последующие приближения так:

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_n(\beta) &= \bar{\xi}_0 + \int_0^\beta \varphi_1[n-1] dv, & \bar{\eta}_n(\beta) &= \bar{\eta}_0 + \int_0^\beta \varphi_2[n-1] dv \\ \eta_n(\beta) &= \eta_0 + \int_0^\beta \varphi_4[n-1] dv, & p_n(\alpha, \beta) &= \frac{d\varphi}{d\alpha} + \int_0^\beta f[n-1] dv \\ q_n(\alpha, \beta) &= -\frac{d\varphi}{d\beta} + \varphi_2[n] + \int_0^\alpha f[n-1] du - \int_0^\beta f[n-1] dv, & \eta_n'(\beta) &= \varphi_4[n] \\ t_n(\alpha, \beta) &= \varphi(\alpha) - \varphi(\beta) + t_0 + \int_0^\beta \varphi_2[n-1] dv + \int_0^\alpha \int_0^\beta f[n-1] du dv \end{aligned} \quad (6.6)$$

Теперь можно подобрать опять-таки в силу (6.4) область  $0 \leq \alpha \leq a$ ,  $0 \leq \beta \leq b$  изменения  $\alpha$ ,  $\beta$ , в которой все функции для любого  $n$  будут определены и удовлетворяют неравенствам (6.3). Доказательство этого проводится переходом от  $n$  к  $(n+1)$ .

Докажем сходимость функций, получаемых для приближения порядка  $n$ . Для этого рассмотрим модули разностей

$$\begin{aligned} &|\bar{\xi}_n(\beta) - \bar{\xi}_{n-1}(\beta)|, & |\bar{\eta}_n(\beta) - \bar{\eta}_{n-1}(\beta)|, & |\eta_n(\beta) - \eta_{n-1}(\beta)| \\ &|p_n(\alpha, \beta) - p_{n-1}(\alpha, \beta)|, & |\eta_n'(\beta) - \eta_{n-1}'(\beta)| \\ &|q_n(\alpha, \beta) - q_{n-1}(\alpha, \beta)|, & |t_n(\alpha, \beta) - t_{n-1}(\alpha, \beta)| \end{aligned}$$

Проведем выкладки для последовательности функций  $\bar{\xi}_n$ , так как для остальных последовательностей они вполне аналогичны. Имеем

$$\begin{aligned} &|\bar{\xi}_n(\beta) - \bar{\xi}_{n-1}(\beta)| < \int_0^\beta |\varphi_1[n-1] - \varphi_1[n-2]| dv < \\ &< \int_0^\beta K [|\bar{\xi}_{n-1} - \bar{\xi}_{n-2}| + |\eta_{n-1} - \bar{\eta}_{n-2}| + |\eta_{n-1} - \eta_{n-2}| + |p_{n-1} - p_{n-2}|] dv \end{aligned}$$

Выберем число  $A$  так, чтобы оно было больше каждой из разностей:

$$\begin{aligned} &|\bar{\xi}_2(\beta) - \bar{\xi}_1(\beta)|, & |\bar{\eta}_2(\beta) - \bar{\eta}_1(\beta)|, & |\eta_2(\beta) - \eta_1(\beta)|, \\ &|p_2(\alpha, \beta) - p_1(\alpha, \beta)|, & |q_2(\alpha, \beta) - q_1(\alpha, \beta)|, & |\eta_2'(\beta) - \eta_1'(\beta)| \end{aligned}$$

в рассматриваемой области.

Переходом от  $n$  к  $(n+1)$  доказываем, что тогда имеет место неравенство

$$|\bar{\xi}_{n+2}(\beta) - \bar{\xi}_{n+1}(\beta)| < AB^n \frac{(\alpha + \beta)^n}{n!}$$

Аналогичные неравенства с той же правой частью получаются и для последовательностей  $\bar{\eta}_n$ ,  $\eta_n$ ,  $\eta_n'$ ,  $p_n$ ,  $q_n$ . Для последовательности же  $t_n$

$$|t_{n+2}(\alpha, \beta) - t_{n+1}(\alpha, \beta)| < AB^n \frac{(\alpha + \beta)^n}{n!} \left[ 1 + \frac{\alpha + \beta}{n+1} \right]$$

В этих неравенствах  $B$  — постоянная, не зависящая от  $n$ , а лишь от области изменения  $\alpha$ ,  $\beta$ .

Отсюда получаем, что все рассматриваемые функции  $\bar{\xi}_n(\beta)$ ,  $\dots$ ,  $t_n(\alpha, \beta)$  сходятся равномерно во взятой области и предельные функции удовлетво-

