Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика, том VII, 1943

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКОСТЕННОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ

Х. М. МУШТАРИ

(Казань)

Обобщение имеющихся решений задачи устойчивости упругого равновесия тонкостенной цилиндрической оболочки кругового сечения под действием сжимающих и сдвигающих усилий, равномерно распределенных по концевым сечениям, на случай конической оболочки кругового сечения представляет значительный интерес для уточнения расчета на устойчивость конических отсеков фюзеляжей типа монокок. В работе автора [1] были выведены в общем виде дифференциальные уравнения, решающие эту задачу, которые затем были значительно упрощены. Там же дано обобщение на случай ортотропной оболочки решения, данного Штаерманом [2] для случая симметричной формы потери устойчивости от продольного сжатия. В настоящей работе рассматривается приближенное решение этих задач.

1. Принятые обозначения. Будем пользоваться обозначениями, примененными в курсе теории упругости Ляв.

Основные из них:

2γ — угол конусности, r — расстояние от вершины конуса до точки на срединной поверхности оболочки, r_0 — расстояние до точки малого торцевого сечения, l — длина оболочки по образующей, a и b — радиусы малого и большого торцевых сечений, $2h$ — толщина оболочки, φ — угол между аксиальной плоскостью, проходящей через данную точку, и некоторой плоскостью отсчета, n — число волн, образующихся по окружности при потере устойчивости оболочки, T_0 и S_0 — соответственно сжимающее и сдвигающее усилия на единицу длины, приложенные к краю $r=r_0$.

Далее u, v, w — компоненты смещения соответственно по образующей, по касательной к сечению $r=\mathrm{const}$ и по нормали к срединной поверхности.

Как обычно

$$K_1=\frac{2E_1h}{1-\sigma_1\sigma_2},\qquad K_2=\frac{2E_2h}{1-\sigma_1\sigma_2},\qquad K_{12}=2h\mu_3,\qquad S_0'=\frac{S_0}{Eh}\tag{1.1}$$

жесткости при сжатии и сдвиге,

$$D_1=\frac{2}{3}\,\frac{E_1h^3}{1-\sigma_1\sigma_2},\qquad D_2=\frac{2}{3}\,\frac{E_2h^3}{1-\sigma_1\sigma_2},\qquad D_3=\frac{\mu_3h^3}{3(1-\sigma_1\sigma_2)}\tag{1.2}$$

жесткости на изгиб и скручивание.

Кроме того, будем пользоваться обозначениями

$$\ln\frac{r}{r_0}=z,\qquad \frac{b}{a}=1+\frac{l}{r_0}=k,\qquad \ln k=t,\qquad \lambda=\frac{\pi}{t}\tag{1.3}$$

$$\varphi_1=\varphi\sin\gamma,\qquad n_1=\frac{n}{\sin\gamma}\,.\tag{1.4}$$

2. Дифференциальные уравнения нейтрального равновесия и решение их в частных случаях. В работе автора решение задачи устойчивости изотропной конической оболочки при кручении было приведено к краевой задаче для системы уравнений

$$\frac{1}{r}\nabla^2\nabla^2(ru) = -\frac{\operatorname{ctg}\gamma}{r^3}\left[\frac{\partial^3 w}{\partial r\,\partial\varphi_1^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi_1^2} + (1-3\sigma)\,r\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} - \sigma r^2\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}\right] \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{r}\nabla^2\nabla^2(rv) = \operatorname{ctg}\gamma\left[\frac{1}{r^4}\frac{\partial^3 w}{\partial\varphi_1^3} + (2+\sigma)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 w}{\partial r^2\partial\varphi_1} + \frac{3}{r^3}\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial\varphi_1} + \frac{1}{r^4}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi_1^2}\right] \quad (2.2)$$

$$\frac{h_2}{3(1-\sigma^2)}\frac{1}{r}\nabla^2\nabla^2(r^3\nabla^2\nabla^2 w) + \frac{\operatorname{ctg}^2\gamma}{r^2}\left(r^2\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + 6r\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + 6\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right) +$$

$$+ S_0' r_0^2\frac{1}{r}\nabla^2\nabla^2\left[r\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial\varphi_1}\left(\frac{w}{r}\right)\right] = 0 \quad (2.3)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi_1^2}$$

Полагая

$$w = f_1\cos n\varphi + f_2\sin n\varphi, \qquad f = f_1 + if_2 \quad (2.4)$$

и пренебрегая во второстепенных членах единицей по сравнению с n_1^2 для случая недлинных оболочек из (2.3), находим:

$$\bar{\varepsilon}^2\sin^2\gamma\,[(D^2-n_1^2)^4 - 12D(D^2-n_1^2)^3]\,f + \operatorname{ctg}^2\gamma e^{2z}(D^4-D^2)\,f -$$

$$- iS_0' n_1\,[D(D^2-n_1^2)^2 + (D^2-n_1^2)(n_1^2-9D^2)]\,f = 0 \quad (2.5)$$

где

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{h^2}{3(1-\sigma^2)a^2}, \qquad D^k = \frac{d^k}{dz^k} \quad (2.6)$$

3. Частный случай кольцевой пластинки. Этот случай был подробно разобран Dean [3]. При этом $\left(\gamma = \frac{1}{2}\pi\right)$ из (2.3) имеем

$$\bar{\varepsilon}^2\Delta^2\nabla^2 w + S_0'\frac{\partial^2}{r^2\partial r\,\partial\varphi_1}\left(\frac{w}{r}\right) = 0 \quad (3.1)$$

причем

$$f = c\exp\{(1+im)\ln r\}, \qquad S_0' = -\frac{\bar{\varepsilon}^2}{mn}\left[(m^2+1)^2 + 2n^2(m^2-1) + n^4\right] \quad (3.2)$$

Проведенные Dean вычисления с учетом обоих краевых условий не привели к какой-либо расчетной формуле для определения критического значения S_0. Поэтому поставим задачей удовлетворить только более важному краевому условию $w=0$ при $r=a$ и $r=b$, т. е.

$$C_1\exp\{im_1\ln a\} + C_2\exp\{im_2\ln a\} = 0,$$

$$C_1\exp\{im_1\ln b\} + C_2\exp\{im_2\ln b\} = 0 \quad (3.3)$$

Отсюда следует, что

$$m_2 = m_1 - 2\lambda \quad (3.4)$$

Полагая

$$S = \frac{2a^2 S_0}{D} = \frac{S_0}{Eh\bar{\varepsilon}^2} \quad (3.5)$$

имеем

$$S = -\frac{1}{mn}\left[(m^2+1)^2 + 2n^2(m^2-1) + n^4\right]. \quad (3.6)$$

Из уравнения $\partial S / \partial n = 0$ определяем зависимость между m и n, соответствующую наименьшему значению S, из которой находим, что

$$n^2 = \frac{1}{3}\left(-m^2 + 1 + \sqrt{(m^2-1)^2 + 3(m^2+1)^2}\right) \tag{3.7}$$

При этом достигается абсолютный минимум S, определяемый из уравнения $\partial S / \partial m = 0$, а именно

$$m_{\text{кр}} = 0, \quad S_{\text{кр}} = 0 \quad \text{при} \quad n = 1 \quad \text{и} \quad m^2 = 0.767, \quad S = 9.9 \quad \text{при} \quad n = 2 \tag{3.8}$$

Из (3.7) при $n = 2$ находим $m = -3.147$. Следовательно, устойчивость теряется с образованием не более двух волн, если

$$|m| < 3.147 \quad \text{и} \quad k > 7.40$$

Из (3.7)

$$n^2 = \frac{1}{3}\left\{-m^2 + 1 + 2(m^2+1)\left[1 - \frac{1}{2}\frac{m^2}{(m^2+1)^2} + \ldots\right]\right\} \tag{3.9}$$

Даже при $n = 2$ можно с ошибкой меньше 0.6% принять

$$n^2 \approx \frac{1}{3}(m_2^{\,2} + 2) \tag{3.10}$$

Действительно, при $m_2 = -3.150$ отсюда следует $n = 3.976 \approx 4$.

При вычислении S по (3.10) и (3.6) ошибка будет еще меньше. Значения m_1 и m_2, соответствующие критическому значению S, определяются из (3.4) и из уравнения (3.6)

$$m_2 \approx -3.150, \qquad m_1 \approx -0.13 \quad \text{при} \quad n = 2, \quad k = 7.40$$

Учитывая сказанное, при $k < 7.40$ для приближенного определения m_2 можно пользоваться уравнением

$$\frac{(n^2-1)^2}{m_1} = \frac{(n^2+m_2^{\,2})^2}{m_2} \tag{3.11}$$

В виду малости m_1, заменяем m_2 через -2λ и находим

$$m_1 \approx -\frac{2\lambda\,(n^2-1)^2}{(n^2+4\lambda^2)^2} \tag{3.12}$$

Следовательно, исправленное значение

$$m_2 = -\frac{2\lambda\left[(n^2-1)^2 + (n^2+4\lambda^2)^2\right]}{(n^2+4\lambda^2)^2} \tag{3.13}$$

При этом

$$S_{\text{кр}} = -\frac{1}{n m_2}\left[(m_2^{\,2}+1)^2 + 2n^2(m_2^{\,2}-1) + n^4\right] \tag{3.14}$$

Уравнения (3.10), (3.13) и (3.14) дают решение задачи.

Если окажется, что устойчивость теряется при значениях n^2 не очень больших по сравнению с единицей, то необходимо в формулу (3.14) подставить каждое из двух целых чисел, между которыми окажется значение S, найденное из (3.10) и (3.13). Меньшее из найденных таким образом значений будет критическим.

Для $\lambda^2 \gg 1$ можно получить простые приближенные формулы для определения $S_{\text{кр}}$ и $n_{\text{кр}}$. Действительно, в этом случае из (3.10), (3.13) и (3.14) соответственно имеем

$$n^2 \approx \frac{4\lambda^2}{3} \quad (n^2 \gg 1), \qquad m_2 \approx -2.125\lambda, \qquad S_{\text{кр}} = 13.8\lambda^2 \tag{3.15}$$

Отсюда

$$S_0 \approx \frac{68.8D}{a^2}\ln^{-2}\frac{b}{a} \tag{3.16}$$

Результаты подсчетов по этим формулам показывают, что критическое усилие в кольцевой пластинке, определенное без учета защемления, оказывается равным около 80% от критического усилия, вычисленного с учетом обоих краевых условий $w=0$ и $\partial w/\partial r=0$. В действительности имеет место менее жесткое закрепление и разница, повидимому, будет меньше.

В случае цилиндрической оболочки [4] критическое сдвигающее усилие, вычисленное аналогичным путем, т. е. с учетом только одного условия $w=0$, отличается от результатов подсчетов по Зволинскому [7] и по Donnell [5] не более чем на 10%. Следует ожидать, что для помежуточных случаев $0<\gamma<\frac{1}{2}\pi$, не учитывая влияния защемления, мы сделаем ошибку самое большее от 10 до 20% в числовом коэффициенте. При этом характер закономерностей сохраняется, а отклонения от «точного» подсчета получаются в сторону уменьшения критического усилия, т. е. в сторону прочности.

4. Случай цилиндрической оболочки. Положим в (2.5)

$$f=\exp\frac{miz}{\sin\gamma} \tag{4.1}$$

Находим определительное уравнение

$$\bar{\varepsilon}^2(m^2+n^2)^4+m^4+\frac{S_0}{Eh}mn(m^2+n^2)^2=0 \tag{4.2}$$

Заметим, что

$$\frac{mz}{\sin\gamma}=\frac{m}{\sin\gamma}\ln\left(1+\frac{r-r_0}{r_0}\right)=\frac{mx}{r_0\sin\gamma}\left(1-\frac{1}{2}\frac{x}{r_0}+\ldots\right) \tag{4.3}$$

где $x=r-r_0$.

При $\gamma=0$

$$r=\infty,\qquad r_0\sin\gamma=a,\qquad \frac{mz}{\sin\gamma}=\frac{mx}{a} \tag{4.4}$$

Таким образом (4.1) вместе с (2.4) дает известное решение Schwerin [6].

5. Решение задачи по методу Ритца. Задача приводится к отысканию минимума некоторого функционала. До потери устойчивости имеем

$$T_{1,0}r=\text{const}=-T_0r_0,\qquad S_{1,0}=-S_{2,0}=-\frac{S_0r_0^2}{r^2} \tag{5.1}$$

Для компонентов добавочного смещения, появляющегося при потере устойчивости, принимаем выражения

$$\begin{aligned} u&=Ae^z\{\sin(\mu_1z+n_1\varphi_1)-\sin(\mu_2z+n_1\varphi_1)\}\\ v&=Be^z\{\sin(\mu_1z+n_1\varphi_1)-\sin(\mu_2z+n_1\varphi_1)\}\\ w&=-2Ce^z\sin(\mu z+n_1\varphi_1)\sin\lambda_z \end{aligned} \tag{5.2}$$

где

$$\mu_1=\frac{m_1}{\sin\gamma},\qquad \mu_2=\frac{m_2}{\sin\gamma},\qquad \mu=\frac{\mu_1+\mu_2}{2},\qquad \lambda=\frac{\mu_1-\mu_2}{2} \tag{5.3}$$

A, B, C — постоянные величины.

Нетрудно видеть, что функции (5.2) являются точными интегралами дифференциальных уравнений нейтрального равновесия в случаях $\gamma=0$, $\gamma=\frac{\pi}{2}$, а в общем случае удовлетворяют граничным условиям $u=v=w=0$ при $r=r_0$ и $r=r_0+l$, т. е. при $z=0$ и $z=t$.

Определение критических усилий по методу, развитому в статье [1] (см. § 7, формулу 44_2) приводится к отысканию минимума некоторого функционала, который в рассматриваемом случае приводится к виду

$$
\begin{aligned}
Q_1 = \frac{1}{2r_0} \int_0^l \int_0^{2\pi \sin\gamma} \Big\{ & -T_0 e^{-z} \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 - 2S_0 e^{-2z} \frac{\partial w}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi_1} + v \operatorname{ctg}\gamma\right) + \\
& + K_{12} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - v + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + K_1 \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + K_2 \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi_1} + u - w \operatorname{ctg}\gamma\right)^2 + \\
& + 2K_1 \sigma_2 \frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi_1} + u - w \operatorname{ctg}\gamma\right) + \frac{1}{r_0^2} e^{-2z} \Big[D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \\
& + D_2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi_1^2} + \operatorname{ctg}\gamma \frac{\partial v}{\partial \varphi_1}\right)^2 + 2D_1 \sigma_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial w}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi_1^2} + \right. \\
& \left. + \operatorname{ctg}\gamma \frac{\partial v}{\partial \varphi_1}\right) + 4D_3 \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi_1} + v \operatorname{ctg}\gamma - \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi_1 \partial z} - \operatorname{ctg}\gamma \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \Big] \Big\} \, dz \, d\varphi_1
\end{aligned} \tag{5.4}
$$

При развертывании членов, содержащих множителем D / r_0^2, учитываем, что в случае коротких оболочек $n^2 \gg 1$, $m^2 \gg 1$, а значит, и подавно $n_1^2 \gg 1$, $\mu^2 \gg 1$. В случае же весьма длинных цилиндрических оболочек $n_{\text{кр}} = 2$, $m^2 \ll n^2$. Эти же неравенства имеют место и в случае конической оболочки, если γ не близка к $\frac{1}{2}\gamma$. Имея в виду в дальнейшем рассматривать предельные случаи коротких или весьма длинных конических оболочек небольшой конусности, в членах, содержащих D / r_0^2, т. е. имеющих малый множитель h^2 / a^2 будем отбрасывать μ^2 по сравнению с n_1^2 или μ^4. Это упрощение для тонких цилиндрических оболочек приводит к весьма небольшим ошибкам, как показано в работе Donnell [5], а также автора [1]. Кроме того, введем обозначения

$$
\eta^2 = \frac{2D_1 (1 + \lambda^2) \ln k}{\lambda^2 K_1 (k^2 - 1) r_0^2}, \qquad c_0 = \frac{4S_0 (1 + \lambda^2) \ln k}{\lambda^2 K_1 (k^2 - 1)}, \qquad t_0 = \frac{8T_0 (1 + \lambda^2)}{(1 + 4\lambda^2) K_1 (k + 1)}
$$

$$
k_2 = \frac{K_2}{K_1}, \qquad k_{12} = \frac{K_{12}}{K_1}, \qquad \delta_2 = \frac{D_2}{D_1}, \qquad \delta_3 = \frac{D_3}{D_1} \tag{5.5}
$$

После преобразований получим

$$
\begin{aligned}
Q' = \frac{2Q_1 r_0 (1 + \lambda^2)}{\pi \sin\gamma \lambda^2 (k^2 - 1) K_1} = & -t_0 C^2 \frac{\mu_1^2 + \mu_2^2 + 1}{2} - c_0 \mu (n_1 C^2 - BC \operatorname{ctg}\gamma) + \\
& + A^2 \left(k_{12} n_1^2 + k_2 + \frac{\mu_1^2 + \mu_2^2 + 1}{2}\right) + B^2 \left[\frac{k_{12}}{2} (\mu_1^2 + \mu_2^2 + 4) + k_2 n_1^2\right] + \\
& + 2AB\mu n_1 (k_{12} + \sigma_2) + k_2 C^2 \operatorname{ctg}^2\gamma - 2k_2 BC n_1 \operatorname{ctg}\gamma - 2\sigma_2 AC\mu \operatorname{ctg}\gamma + \\
& + C^2 \eta^2 \Big\{ \frac{\mu_1^4 + \mu_2^4}{2} + \sigma_2 (\mu_1^2 + \mu_2^2) \left(n_1^2 - \frac{Bn_1}{C} \operatorname{ctg}\gamma\right) + \\
& + \delta_2 \left(n_1^2 - \frac{Bn_1}{C} \operatorname{ctg}\gamma - 1\right)^2 + 2\delta_3 (\mu_1^2 + \mu_2^2) \left(n_1 - \frac{B \operatorname{ctg}\gamma}{C}\right)^2 \Big\}
\end{aligned} \tag{5.6}
$$

6. Об устойчивости длинной тонкостенной конической трубки при кручении. Если оболочка весьма длинна, то для всех значений γ в замкнутом интервале $(0, \frac{1}{2}\pi)$

$$
n_{\text{кр}} = 2, \qquad n_1^4 \gg 1, \qquad \mu_1 = \mu_2 = \mu \tag{6.1}
$$

Во всех случаях с достаточно большой точностью можно отбросить члены вида $\eta^2 \mu^2$, малые по сравнению с остальными. Представляет интерес случай небольшой конусности. Поэтому полагаем $\gamma \leqslant 30^\circ$.

Необходимые уравнения получаем дифференцированием выражения (5.6) для Q' по A, B и C и приравниванием результатов нулю. Имеем

$$A\,(k_{12}n_1^2+k_2+1+\mu^2)+B\mu n_1\,(k_{12}+\sigma_2)=C\sigma_2\mu\,\mathrm{ctg}\,\gamma \tag{6.2}$$

$$A\mu n_1\,(k_{12}+\sigma_2)+B\,\{k_{12}\,(\mu^2+2)+k_2n_1^2+\eta^2\delta_2\,\mathrm{ctg}^2\,\gamma n_1^2\}=$$
$$=C\,\mathrm{ctg}\,\gamma\left\{k_2n_1-\frac{c_0\mu}{2}+\delta_2\eta^2\,(n_1^2-1)^2\,n_1\right\} \tag{6.3}$$

$$-c_0\mu\left(n_1-\frac{B\,\mathrm{ctg}\,\gamma}{2C}\right)+\mathrm{ctg}\,\gamma\left(k_2-\frac{k_2Bn_1}{C}-\frac{A\mu\sigma_2}{C}\right)+$$
$$+\eta^2\delta_2\,(n_1^2-1)\left(n_1^2-n_1\,\mathrm{ctg}\,\gamma\,\frac{B}{C}-1\right)=0 \tag{6.4}$$

Из (6.2) и (6.3) находим, что в членах с малыми коэффициентами можно положить

$$\frac{B}{C}\approx\frac{\mathrm{ctg}\,\gamma}{n_1}$$

Подставляя это значение в (6.4) и вводя обозначения

$$\varepsilon'^2=\frac{D_1}{2K_1a^2}, \qquad \zeta=\frac{\lambda^2\,(k^2-1)}{4\,(1+\lambda^2)\ln k} \tag{6.5}$$

получим уравнение

$$\frac{S_0}{K_1}\frac{m}{n}\,(n^2-\cos^2\gamma)=\frac{\zeta\cos^2\gamma}{n^4}\,\{2\,(k_{12}+k_2+1)\sin^4\gamma+(3+k_2-2\sigma_1\sigma_2)\,m^2\sin^2\gamma+$$
$$+(1-\sigma_1\sigma_2)\,m^4\}+\varepsilon'^2\delta_3\,(n^2-1)^2 \tag{6.6}$$

Если величина γ настолько мала, что $\sin^2\gamma$ можно пренебрегать по сравнению с единицей, то

$$n_{\text{кр}}=2, \qquad m^4=\frac{\varepsilon'^2\delta_2\,(n^2-1)^2n^4}{3\zeta\,(1-\sigma_1\sigma_1)} \tag{6.7}$$
$$S_{0,\,\text{кр}}=\frac{2D_2^{3/4}}{a^{\frac{3}{2}}}\sqrt[4]{\frac{K_1}{3}\,(1-\sigma_1\sigma_2)\left(1+\frac{l\sin\gamma}{a}\right)}$$

При этом, как видно из (6.7), условие $m^2\ll n^2$ для малых значений h/a выполняется.

В рассматриваемом случае $a=r_0\sin\gamma$; последняя из формул (6.7) при $r=\infty$, $\sin\gamma=0$ дает обобщение формулы Schwerin на случай анизотропной цилиндрической оболочки.

Обозначим через M' и M критические значения крутящего момента для цилиндрической оболочки радиуса $R=\frac{1}{2}(a+b)$ и для конической оболочки при малых γ. Имеем

$$M':M_{\text{кр}}=\left\{\left(1+\frac{l\sin\gamma}{a}+\frac{1}{4}\frac{l^2\sin^2\gamma}{a^2}\right):\left(1+\frac{l\sin\gamma}{a}\right)\right\}^{\frac{1}{4}} \tag{6.8}$$

Площади срединных поверхностей этих оболочек равны между собою. Следовательно, критическое значение крутящего момента в случае длинной тонкостенной конической трубки всегда меньше, чем соответствующая величина для цилиндрической трубки того же веса.

7. Об устойчивости недлинной оболочки при продольном сжатии. Как известно, в случае недлинных тонкостенных оболочек при $\gamma=0$ и $\gamma=\frac{1}{2}\pi$ по окружности образуется столь большое число волн n, что во второстепенных членах выражения Q' можно пренебрегать единицей по сравнению с n^2.

Тем более $n_1^2 \gg 1$. Кроме того, отношение B/C будет порядка n^{-1}. Поэтому из (5.6) имеем с достаточной точностью

$$Q' = -t_0(\mu^2+\lambda^2)C^2 - c_0\mu n_1 C^2 + A^2(k_{12}n_1^2+\mu^2+\lambda^2) + B^2[k_2 n_1^2 + k_{12}(\mu^2+\lambda^2)] + \\ + 2AB(k_{12}+\sigma_2)\mu n_1 + k_2 C^2 \operatorname{ctg}^2\gamma - 2k_2 BCn_1 \operatorname{ctg}\gamma - 2\sigma_2 AC\mu \operatorname{ctg}\gamma + \\ + C^2\eta^2\left\{\frac{\mu_1^4+\mu_2^4}{2} + 2n_1^2(\mu^2+\lambda^2)(2\delta_3+\sigma_2) + \delta_2 n_1^4\right\} \tag{7.1}$$

Отсюда после дифференцирования по A, B и C и приравнивания результатов нулю получим

$$A\Delta = C\operatorname{ctg}\gamma\{\sigma_2\mu[k_2n_1^2+k_{12}(\mu^2+\lambda^2)] - k_2n_1^2\mu(k_{12}+\sigma_2)\} \tag{7.2}$$

$$B\Delta = C\operatorname{ctg}\gamma\{k_2n_1(k_{12}n_1^2\mu^2+\mu^2+\lambda^2) - \sigma_2\mu^2 n_1(k_{12}+\sigma_2)\} \tag{7.3}$$

где

$$\Delta = k_2k_{12}n_1^4 + [(k_2+k_{12}^2)(\mu^2+\lambda^2) - \mu^2(k_{12}+\sigma_2)^2]n_1^2 + k_{12}(\mu^2+\lambda^2)^2$$

$$t_0(\mu^2+\lambda^2) + c_0\mu n_1 = \frac{\operatorname{ctg}^2\gamma\,\{(\mu^2+\lambda^2)[\lambda^2+\mu^2(1-\sigma_1\sigma_2)+k_{12}\lambda^2 n_1^2\}\,k_2k_{12}}{k_2k_{12}n_1^4 + [(k_2+k_{12}^2)(\mu^2+\lambda^2) - \mu^2(k_{12}+\sigma_2)^2]\,n_1^2 + k_{12}(\mu^2+\lambda^2)^2} + \\ + \eta^2\{(\mu^2+\lambda^2)^2 + 4\mu^2\lambda^2 + 2n_1^2(\mu^2+\lambda^2)(2\delta_3+\sigma_2) + \delta_2 n_1^4\} \tag{7.4}$$

В дальнейшем полагаем, что $\operatorname{ctg}^2\gamma$ не мало и что оболочка не имеет ребер жесткости. Тогда

$$\delta_2 = k_2, \qquad \delta_3 = k_{12}, \qquad K_2\sigma_1 = K_1\sigma_2 \tag{7.5}$$

В рассматриваемой задаче

$$c_0 = 0, \qquad \mu_1 \approx \mu_2 = \mu, \qquad \mu^2 \gg \lambda^2$$

Величины μ^2, n_1^2 будут одного порядка, как это видно из последующего решения и из решений при $\gamma = 0$ и $\gamma = \frac{1}{2}\pi$.

Поэтому из уравнения $\partial t_0 / \partial\mu = 0$ следует, что

$$n_1^2 = \frac{\mu^2}{\sqrt{k_2}}$$

$$t_0 = 2\eta\sqrt{k_2-\sigma_2^2}\operatorname{ctg}\gamma\,(\sqrt{k_2}+\sigma_2+2k_{12})^{\frac{1}{2}} : \left(\sqrt{k_2} + \frac{k_2-\sigma_2^2}{2k_{12}} - \sigma_2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{7.6}$$

при

$$\mu^2 = \frac{k_2\operatorname{ctg}\gamma\sqrt{1-\sigma_1\sigma_2}}{2\eta}\left\{(\sqrt{k_2}+\sigma_2+2k_{12})\left(\sqrt{k_2} + \frac{k^2-\sigma_2^2}{2k_{12}} - \sigma_2\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

Условие $\mu^2 \gg 1$; $n_1^2 \gg 1$ выполняется.

При симметричной форме потери устойчивости $n_1 = 0$, но по-прежнему $\mu^2 \gg 1$. Поэтому

$$t_0 \approx \eta^2\mu^2 + (k_2-\sigma_2^2)\frac{\operatorname{ctg}^2\gamma}{\mu^2} \tag{7.7}$$

Из сравнения (7.6) и (7.7) видно, что устойчивость теряется по симметричной форме, если

$$Q = \frac{2\mu_3(1+\sqrt{\sigma_1\sigma_2})}{\sqrt{E_1E_2}} \geqslant 1 \tag{7.8}$$

В случае изотропной оболочки одновременно возможны обе формы потери устойчивости, так как $Q = 1$.

При симметричной форме потери устойчивости по (5.5) и (7.7) имеем

$$T_0 = 2\,\mathrm{ctg}\,\gamma \sqrt{1-\sigma_1\sigma_2}\sqrt{\frac{D_1K_2}{r_0^2}}\,F(k) \tag{7.9}$$

где

$$F(k) = \frac{\lambda^2+1}{\lambda\sqrt{1+\lambda^2}}\sqrt{\frac{(k+1)\ln k}{2(k-1)}} \tag{7.10}$$

По формуле же Штаермана [2], выведенной им для изотропной оболочки в предположении потери устойчивости по симметричной форме путем интегрирования дифференциальных уравнений нейтрального равновесия, но с выполнением краевых условий защемления только на конце $r = r_0 + l$

$$T_0' = \frac{2\cos\gamma}{a}\sqrt{2EhD} \tag{7.9}$$

причем r_0 предполагалось малым.

Для сравнения приведем отношения T_0 / T_0'

$l\sin\gamma : a$	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	2.0
$T_0 : T_0'$	1.000	1.001	1.002	1.003	1.004	1.007	1.023

Как видно, критическое усилие, определяемое по формуле (7.7), выведенной в предположении, что оболочка недлинна, а r_0 — какое угодно, незначительно отличается от соответствующего значения, определяемого формулой Штаермана. Поэтому можно считать установленным, что потеря устойчивости тонкой изотропной конической оболочки от продольного сжатия может происходить по симметричной или несимметричной форме и что во всех практически важных случаях критическое усилие сжатия на единицу длины меньшего сечения может быть определено по формуле Штаермана (7.9)

Для анизотропной оболочки при условии (7.8)

$$T_0 = \frac{2\cos\gamma}{a}\sqrt{2E_2hD_1} \tag{7.10}$$

Если условие (7.8) не выполняется, то устойчивость теряется по несимметричной форме и

$$T_0 = \frac{2\cos\gamma}{a}\sqrt{2E_2hD_1Q} \tag{7.11}$$

Отсюда при $\gamma = 0$ получается формула (88), выведенная в нашей прежней работе[1].

Далее имеем для малых значений $l\sin\gamma : a$

$$n_{\text{кр}}^2 = m_{\text{кр}}^2\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} = \frac{\cos\gamma}{2}\sqrt{\frac{3a^2}{h^2}\left(1+\frac{l\sin\gamma}{a}\right)Q(1-\sigma_1\sigma_2)} :$$
$$: \left[1+\sqrt{\sigma_1\sigma_2}+Q\left(1-\sqrt{\sigma_1\sigma_2}\right)\right] \tag{7.12}$$

8. Об устойчивости недлинной конической оболочки при кручении усилиями, равномерно распределенными по концевым сечениям. В этом случае $t_0 = 0$. Вводя новые обозначения

$$\varepsilon^2 = \frac{\gamma\lambda^2}{\mathrm{ctg}\,\gamma\sqrt{k_2}(1-\sigma_1\sigma_2)}, \qquad \beta = \frac{\varepsilon(\sqrt{k_2'}\,n_1^2+\mu^2+\lambda^2)}{\lambda\sqrt{\mu^2+\lambda^2}}, \qquad \frac{\mu^2+\lambda^2}{\lambda^2} = \nu^2 \tag{8.1}$$

$$q = \frac{k_{12}}{(1-\sigma_1\sigma_2)\sqrt{k_2}}, \qquad q_0 = \frac{\sigma_1\sigma_2}{1-\sigma_1\sigma_2}, \qquad q_1 = \frac{k_2-2k_{12}\sigma_2-\sigma_2^2}{k_{12}} - 2\sqrt{k_2} \tag{8.2}$$

$$q_2 = \frac{(k_{12}+\sigma_2)^2}{k_{12}}, \qquad q_3 = \left(\sqrt{k_2}-\sigma_2\right)(Q-1)$$

Из (7.4) и (8.2) находим уравнение

$$c_0' = \frac{c_0\lambda^2}{k_2\sqrt[4]{k_2\varepsilon^2}\sqrt{\varepsilon}\,(1-\sigma_1\sigma_2)\,\mathrm{ctg}^2\gamma} = \frac{\nu^{\frac{3}{2}}(1-\varepsilon\nu/\beta)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\nu^2-1}}\left\{\beta^{\frac{3}{2}}\left[1+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon^3(4\mu^2\lambda^2+2n_1^2q_3(\mu^2+\lambda^2))}{\beta^2\lambda^2(\mu^2+\lambda^2)}\right]+\frac{1}{\beta^2\sqrt{\beta}}\left[1+\frac{q\beta}{\varepsilon\nu^3}\left(1-\frac{\nu\varepsilon}{\beta}\right)+\frac{q_0}{\nu^2}\right]:$$

$$\left.:\left(1+\frac{(1-\varepsilon\nu/\beta)(\nu^2q_1+q_2)\varepsilon}{\sqrt{k_2}\beta\nu}\right)\right\} \tag{8.3}$$

Дальнейшая задача заключается в определении из (8.3) таких значений $\mu_1, \mu_2=\mu_1-2\lambda$ и n_1, при которых c_0', а значит, и S_0 имеет наименьшее значение. Эта задача может быть решена графически: строя для каждого целого значения n графики изменения c_0' в зависимости от μ, определяем по ним искомые критические значения μ, n_1 и c_0'. При этом для сокращения объема работы приближенное значение n_1 может быть взято по формуле, выведенной ниже. Несмотря на это, графический метод решения является весьма громоздким. Поэтому мы выводим приближенные расчетные формулы, применение которых приводит к ошибке, не превышающей ошибки вследствие неучета краевого условия $w_r=0$ или $w_{rr}=0$. Эта последняя идет в запас прочности, а благодаря неточному определению критических значений μ_1, μ_2 и n_1 соответствующее значение S_0 несколько увеличивается, что в какой-то степени компенсирует указанную выше ошибку.

Во всех практически важных случаях тонких оболочек $\varepsilon \leqslant 0{,}1$. Предполагая это для получения расчетной формулы, определяющей критическое значение крутящего момента, будем в дальнейшем пренебрегать ε^2 по сравнению с единицей.

Далее, как показывают примерные подсчеты в случае изотропной оболочки при значениях ε, равных 0.1, 0.05 и 0.02, критические значения ν приблизительно равны 2, 2.5 и 3.5, а критическое значение β во всех случаях равно приблизительно 1.22. Поэтому с ошибкой в сторону прочности менее, чем в 2% величину c_0' можно определять по приближенной

$$c_0' = \frac{\nu^{\frac{3}{2}}(1-\varepsilon\nu/\beta)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\nu^2-1}}\left\{\beta^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{\beta^{\frac{5}{2}}}\left[1+\frac{q\beta}{\varepsilon\nu^3}\left(1-\frac{\nu\varepsilon}{\beta}\right)\right]\right\} \tag{8.4}$$

если, кроме того, выполняется $q_1 \leqslant 0.1$, $q_3 \leqslant 0.1$, что имеет место при $|Q-1| \leqslant 0.1$.

Из уравнений $\partial c_0'/\partial\nu=0$ и $\partial c_0'/\partial\beta=0$ находим

$$\nu_{\text{кр}} \approx 1{,}23\left(\frac{q}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}}\left\{1+(0.61-0.72q)\frac{\varepsilon^{\frac{2}{3}}}{q^{\frac{2}{3}}}+(0.08-0.37q-0.2q^2)\frac{\varepsilon^{\frac{4}{3}}}{q^{\frac{4}{3}}}\right\} \tag{8.5}$$

$$\beta_{\text{кр}} \approx 1.236\left\{1+(0.191q-0.142)\frac{\varepsilon^{\frac{2}{3}}}{q^{\frac{2}{3}}}+(0.143-0.13q)\frac{\varepsilon^{\frac{4}{3}}}{q^{\frac{4}{3}}}\right\}$$

Следовательно,

$$c_0' \approx 2.61\left(\frac{q}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}}\left\{1+(0.32+0.33q)\frac{\varepsilon^{\frac{2}{3}}}{q^{\frac{2}{3}}}-(0.037-0.56q+0.35q^2)\frac{\varepsilon^{\frac{4}{3}}}{q^{\frac{4}{3}}}\right\} \tag{8.7}$$

При $\varepsilon \leqslant 0.2$; $0.3 \leqslant q \leqslant 0.5$ можно принять

$$c_0' \approx 4.0 \tag{8,8}$$

Для критического напряжения сдвига

$$\tau_{\text{кр}}=\frac{S_0}{2h}=\frac{c_0'}{4h}\left(\frac{D_1K_2}{K_1r_0^2}\right)^{\frac{5}{8}}[2\zeta K_1(1-\sigma_1\sigma_2)]^{\frac{3}{8}}\sqrt{\lambda}\,(\operatorname{ctg}\gamma)^{\frac{3}{4}} \tag{8.9}$$

$$n_1^2=\frac{1.52\lambda^2q^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon^{\frac{4}{3}}}\sqrt{\frac{K_1}{K_2}}\left\{1+(0.468-1.52q)\frac{\varepsilon^{\frac{2}{3}}}{q^{\frac{2}{3}}}+(0.14-1.497q+1.1q^2)\frac{\varepsilon^{\frac{4}{3}}}{q^{\frac{4}{3}}}\right\} \tag{8.10}$$

В случае изотропной оболочки при $\sigma=0.3$ имеем

$$n_1^2=\frac{1.105\lambda^2}{\varepsilon^{\frac{4}{3}}}\left(1-0.228\varepsilon^{\frac{2}{3}}-0.97\varepsilon^{\frac{4}{3}}\right) \tag{8.11}$$

Отсюда с учетом (8.8) находим

$$\tau_{\text{кр}}=\frac{1}{h}\left(\frac{D_1K_2}{K_1r_0^2}\right)^{\frac{5}{8}}[2\zeta K_1(1-\sigma_1\sigma_2)\operatorname{ctg}^2\gamma]^{\frac{3}{8}}\lambda^{\frac{1}{2}}$$

где ζ определяется по (6.5).

Сравним полученные формулы при $\gamma=0$ с имеющимися формулами для цилиндрической оболочки. Schwerin на основе интегрирования дифференциальных уравнений нейтрального равновесия для определения критического напряжения с учетом одного лишь краевого условия $w=0$ предложил графический метод, нами же была выведена[1] приближенная формула. Результаты счета разными способами приведены в табл. 1 для случая, когда

$$\frac{h}{a}=\frac{1}{600},\quad \sigma=0.3,\quad E=0.7\times10^6\ \textit{кг/см}^2.$$

Таблица 1

a/l	Результаты, найденные разными способами							
	графически		по формулам работы[1]		по формулам (8.9), (8.10)		экспериментально	
	n	τ *кг/см*^{2}	n	τ	n	τ	n	τ
0.25	8	218	7–8	213	9	226	—	—
0.6	12	339	11	332	12	352	12	333
1.0	14	443	14	447	14	471	—	—

Сравним (табл. 2) также значения τ, полученные при $\gamma=0$ по нашей формуле (8.9), по Зволинскому[7] и по Доннеллю[5] при $E=0.7\times10^6$ *кг/см*^{2}.

Таблица 2

h/a	a/l	Критическое напряжение, *кг/см*			ε
		по формуле (8.9)	по Зволинскому	по Доннеллю	
1.57 : 100	0.635	332	305	326	0.0643
1 : 1332	2.0	233	216	234	0.134
1 : 6660	10.0	69.6	73.5	87	0.30

Таким образом, во всех случаях, за исключением случая, когда $\varepsilon=0.30$, к которому формула (8.9) не применима, получается вполне удовлетворительное совпадение.

Обозначим через

$$\delta = \tau_{\text{кр}} : 1.8 E_2^{\frac{5}{8}} E_1^{\frac{3}{8}} \left(\frac{h}{a}\right)^{\frac{5}{4}} \frac{(\cos\gamma)^{\frac{3}{4}}}{(1-\sigma_1\sigma_2)^{\frac{5}{8}}} \left(\frac{a}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{8.13}$$

Значения δ для различных l/a и $\sin\gamma$, вычисленные по (8.9), приводятся в табл. 3, причем приближенная зависимость δ от γ будет

$$\delta \approx 1 + 0.58 \frac{l\sin\gamma}{a} - 0.04 \frac{l^2 \sin^2\gamma}{a^9} \tag{8.14}$$

Таблица 3

l/a \ $\sin\gamma$	0	0.25	0.50
1	1.00	1.148	1.292
6	1.00	1.775	2.40

Следовательно, при

$$1 \leqslant l/a \leqslant 6, \qquad 0 \leqslant \sin\gamma \leqslant 0.5 \tag{8.15}$$

для определения критического напряжения сдвига в меньшем концевом сечении получаем приближенную формулу

$$\tau_{\text{кр}} = 1.8 E^{\frac{5}{8}} E_1^{\frac{3}{8}} \left(\frac{h}{a}\right)^{\frac{5}{4}} \frac{(\cos\gamma)^{\frac{3}{4}}}{1-0.625\sigma_1\sigma_2} \left(\frac{a}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + 0.58 \frac{l\sin\gamma}{a} - 0.04 \frac{l^2\sin^2\gamma}{a^2}\right) \tag{8.16}$$

Для учета ошибок теоретического решения и недочетов при изготовлении оболочек вводим поправочный коэффициент 0.8 и получаем расчетную формулу

$$\tau = 0.8\tau_{\text{кр}} \tag{8.17}$$

где a — радиус меньшего основания, l — длина образующей оболочки.

Критическое значение крутящего момента

$$M_{\text{кр}} \approx 22.6 \frac{E_2^{\frac{5}{8}} E_1^{\frac{3}{8}} h^{\frac{9}{4}} R^{\frac{5}{4}} \left(1 - 0.42 \frac{l\sin\gamma}{R} - 0.08 \frac{l^2\sin^2\gamma}{R^2}\right)(\cos\gamma)^{\frac{3}{4}}}{\left(1-0.625\sigma_1\sigma_2\right)\sqrt{l}\left(1 - \frac{l\sin\gamma}{2R}\right)^{\frac{3}{4}}} \tag{8.18}$$

Здесь $R = a + \frac{1}{2} l \sin\gamma$ — радиус среднего сечения оболочки.

Поступила в редакцию 1. IX 1942

THE APPROXIMATE SOLUTION OF CERTAIN PROBLEMS OF STABILITY OF A THIN-WALLED CONIC SHELL WITH A CIRCULAR CROSS-SECTION

C. M. MOUSHTARY

(Summary)

The problem expressed in the title is treated partially by approximate integrating the differential equations of elastic equilibrium, but mainly by employing the method of Ritz.

Due the intricacy of the problem and for the sake of the simplicity of resulting formulae the author regards only the boundary conditions $u = v = w = 0$ for $r = r_0$ and $r = r_0 + l$, where l is the length of the shell, and $a = r_0 \sin\gamma$ is the radius of the smaller cross-section (2γ is the angle at the vertex of cone).

The boundary condition of clamping $w_r = 0$ is disregarded.

The comparison of the obtained results with those of Donnell[5], Zvolinsky[7], Schwerin[6], Steuerman[2] and author[1] for the case $\gamma = 0$ and with the results of Dean for the case $\gamma = \pi/2$ shows the suitability of the employed procedure used successfully by different authors for problems of stability of plane and cylindrical plates.

In the chapter 7 of this paper the problem of stability of conic shells buckling under a uniformly distributed load over the butt-ends, is solved. The critical forces of compression are given by formula (7.10), where $2h$ is the constant thickness of the shell, E_2 is the Young's modulus in the directions perpendicular to the generatrices of cone, D_1 is the bending rigidity of the cross-section of shell, a is the radius of the smaller cross-section of cone, μ_3 is the modulus of shear along the middle surface.

In the chapter 3 is given the approximate formula (3.16) for the critical shearing stress in the case of a circular plate.

In the chapter 8 is solved the problem of the stability of a short conic shell under the action of shearing forces uniformly distributed over the butt-ends.

For the critical value of torque-twist formula (8.18) is obtained, where R is the radius of the middle cross-section. Formula (8.19) is derived from (8.18) by introducing the coefficient 0.8 which compensates for errors due to approximations in solution and constructive inaccuracies in fabrication of the shell.

Both these formulae hold true for the $1 \leqslant l/a \leqslant 6$ and $0 \leqslant \sin\gamma \leqslant 0.5$.

The number of waves arising along the circumference of shell due to the lack of stability is given by formula (8.10).

In the chapter 6 formula (6.7) is derived for the critical shearing stress in a long tube as for the case of small conicity.

ЛИТЕРАТУРА

1. Муштари Х. М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек с приложениями к задаче устойчивости упругого равновесия, Известия Казанского физико-математич. об-ва. Т. XI. 3-я серия. [Стр. 71—150].
2. Штаерман. Устойчивость оболочек. Сб. трудов КАИ. № 1. Киев.
3. Dean. The Elastic Stability of an Annular Plate. Proc. of the Royal Soc. London. 106 A. [P. 268].
4. Муштари Х. М. Об устойчивости тонкой цилиндрической оболочки при кручении концевыми парами. Труды КАИ. Казань. 1934. № 2.
5. Donnell. Stability of thin-walled Tubes under Torsion. Nat. Advisory Committee for Aeronautics. Rep. 479.
6. Schwerin. Die Torsionsstabilität des dünnnwandigen Rohres. ZAMM. 1925. Bd. 5.
7. Зволинский Н. В. Приближенное решение некоторых задач устойчивости цилиндрической оболочки. Труды ЦАГИ. Вып. 246.