Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика, том VII, 1943

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КРУЧЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

П. М. РИЗ

(Новосибирск)

В настоящем исследовании решается общая задача кручения для призматического стержня произвольного сечения с учетом квадратов производных от перемещений. При этом обнаруживается ряд эффектов, отсутствующих в классической теории Сен-Венана. К этим эффектам относятся осевое сжатие стержня, дополнительная плоская деформация, искажающая сечение, дополнительный изгиб, зависящий от выбора оси закручивания и исчезающий при определенном выборе этой оси. Некоторые из указанных эффектов уже отмечались в решениях задачи кручения для некоторых частных видов поперечных сечений [1], [2]. Методы, которыми учитываются квадраты производных от перемещений, использованные в этой работе, изложены в статье [3].

Будем пользоваться следующими обозначениями:

a, b, c — координаты точек в недеформированном состоянии;

x, y, z — координаты точки после деформации;

u, v, w — перемещения.

Рассмотрим призматический стержень, ось которого параллельна оси z, заделанный в сечении $z=0$ и подверженный в торцевом сечении $c=l$ действию крутящего момента M. Боковую поверхность считаем свободной от напряжений. Начало координат выбираем в заделанном сечении. Задаемся выражениями для смещений

$$u=-\tau bc+\tau^2 u^{(1)}, \qquad v=\tau ac+\tau^2 v^{(1)}, \qquad w=\tau\varphi(a, b)+\tau^2 w^{(1)} \tag{1}$$

Здесь $\varphi(a, b)$ — функция кручения в задаче Сен-Венана, $u^{(1)}, v^{(1)}, w^{(1)}$ — неизвестные функции от координат начального состояния. Параметр τ в линейной задаче выражает крутку, т. е. угол закручивания сечений на единицу длины. Это значение τ сохранится и в нашем случае. Все выкладки будем проводить с точностью до τ^2.

Системе перемещений (1) соответствует при нелинейном законе Гука система напряжений:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}&=\tau^2[K_1(a, b)+c^2(\lambda+\mu)]+\tau^2\sigma_{xx}^{(1)}, & \sigma_{xy}&=\tau^2 K_4(a, b)+\tau^2\sigma_{xy}^{(1)} \\
\sigma_{yy}&=\tau^2[K_2(a, b)+c^2(\lambda+\mu)]+\tau^2\sigma_{yy}^{(1)}, & \sigma_{xz}&=\mu\tau(\varphi_a'-b)-\tau^2\mu c\varphi_b'+\tau^2\sigma_{xz}^{(1)} \\
\sigma_{zz}&=\tau^2[K_3(a, b)+\lambda c^2]+\tau^2\sigma_{zz}^{(1)}, & \sigma_{yz}&=\mu\tau(\varphi_b'+a)+\tau^2\mu c\varphi_a'+\tau^2\sigma_{yz}^{(1)}
\end{aligned} \tag{2}$$

В формулах (2)

$$K_1(a,b)=\left(\frac{\lambda}{4}+\frac{\mu}{4}\right)\varphi_a'^2+\frac{\lambda}{4}\varphi_b'^2-\frac{\lambda}{2}a\varphi_b'+\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\mu}{2}\right)b\varphi_a'+$$
$$+\frac{\lambda}{4}a^2+\left(\frac{\lambda}{4}+\frac{5}{4}\mu\right)b^2$$

$$K_2(a,b)=\frac{\lambda}{4}\varphi_a'^2+\left(\frac{\lambda}{4}+\frac{\mu}{4}\right)\varphi_b'^2-\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\mu}{2}\right)a\varphi_b'+$$
$$+\frac{\lambda}{2}b\varphi_a'+\left(\frac{\lambda}{4}+\frac{5}{4}\mu\right)a^2+\frac{\lambda}{4}b^2 \qquad (3)$$

$$K_3(a,b)=\left(\frac{\lambda}{4}+\frac{5}{4}\mu\right)\varphi_a'^2+\left(\frac{\lambda}{4}+\frac{5}{4}\mu\right)\varphi_b'^2-\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\mu}{2}\right)a\varphi_b'+$$
$$+\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\mu}{2}\right)b\varphi_a'+\left(\frac{\lambda}{4}+\frac{\mu}{4}\right)a^2+\left(\frac{\lambda}{4}+\frac{\mu}{4}\right)b^2$$

$$K_4(a,b)=\frac{\mu}{4}\varphi_a'\varphi_b'+\frac{\mu}{4}(a\varphi_a'-b\varphi_b')-\frac{5}{4}\mu ab$$

Величины $\sigma_{xx}^{(1)}$, $\sigma_{xy}^{(1)}$ и прочие искомые функции от a, b, c связаны с величинами $u^{(1)}$, $v^{(1)}$, $w^{(1)}$ обычными соотношениями, выражающими линейный закон Гука.

Дополнительные напряжения $\sigma_{yy}^{(1)}$, $\sigma_{xy}^{(1)}$, ... определяются уравнениями равновесия

$$\frac{\partial\sigma_{xx}^{(1)}}{\partial a}+\frac{\partial\sigma_{xy}^{(1)}}{\partial b}+\frac{\partial\sigma_{xz}^{(1)}}{\partial c}+\frac{\partial U}{\partial a}=0$$
$$\frac{\partial\sigma_{xy}^{(1)}}{\partial a}+\frac{\partial\sigma_{yy}^{(1)}}{\partial b}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(1)}}{\partial c}+\frac{\partial U}{\partial b}=0 \qquad (4)$$
$$\frac{\partial\sigma_{xz}^{(1)}}{\partial a}+\frac{\partial\sigma_{yz}^{(1)}}{\partial b}+\frac{\partial\sigma_{zz}^{(1)}}{\partial c}+2(\lambda+\mu)c=0$$

Здесь введены обозначения

$$\frac{\partial U}{\partial a}=\frac{\partial K_1}{\partial a}+\frac{\partial K_4}{\partial b}-\mu\varphi_b'+\mu(b\varphi_{aa}''-a\varphi_{ab}''-a)$$
$$\frac{\partial U}{\partial b}=\frac{\partial K_4}{\partial a}+\frac{\partial K_2}{\partial b}+\mu\varphi_a'+\mu(b\varphi_{ab}''-a\varphi_{bb}''+b) \qquad (5)$$

Легко убедиться в законности этих обозначений, проверив, что

$$\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial U}{\partial a}\right)=\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial U}{\partial b}\right)$$

Если уравнение недеформированного профиля (а следовательно, в силу призматичности и уравнение боковой поверхности)

$$f(a,b)=0 \qquad (6)$$

то уравнение деформированной поверхности получим в виде

$$f(x-u,\ y-v)=0$$

Условия отсутствия напряжений на поверхности выразятся следующим образом:

$$\sigma_{xx}^{(1)}f_a'+\sigma_{xy}^{(1)}f_b'+[K_1+\mu b(\varphi_a'-b)]f_a'+[K_4-\mu a(\varphi_a'-b)]f_b'+c^2(\lambda+\mu)f_a'=0$$
$$\sigma_{xy}^{(1)}f_a'+\sigma_{yy}^{(1)}f_b'+[K_4+\mu b(\varphi_b'+a)]f_a'+[K_2-\mu a(f_b'+a)]f_b'+c^2(\lambda+\mu)f_b'=0$$
$$\sigma_{xz}^{(1)}f_a'+\sigma_{yz}^{(1)}f_b'+\mu c(af_a'+bf_b')=0 \qquad (7)$$

Из уравнений (4) и (7) следует, что задача определения добавочных напряжений есть формально линейная задача об упругом равновесии под действием объемных и поверхностных сил. Напряжения при наличии объемных сил должны удовлетворять также условиям совместности

$$\begin{aligned}
&\nabla^2\sigma_{xx}^{(1)} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Xi^{(1)}}{\partial a^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\nabla^2 U - 2\frac{\partial^2 U}{\partial a^2} - \frac{2\nu}{1-\nu}(\lambda+\mu)\\
&\nabla^2\sigma_{yy}^{(1)} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Xi^{(1)}}{\partial b^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\nabla^2 U - 2\frac{\partial^2 U}{\partial b^2} - \frac{2\nu}{1-\nu}(\lambda+\mu)\\
&\nabla^2\sigma_{zz}^{(1)} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Xi^{(1)}}{\partial c^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\nabla^2 U - \frac{2\nu}{1-\nu}(\lambda+\mu) - 4(\lambda+\mu)\\
&\nabla^2\sigma_{xy}^{(1)} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Xi^{(1)}}{\partial a\,\partial b} = -2\frac{\partial^2 U}{\partial a\,\partial b}\\
&\nabla\sigma_{xz}^{(1)} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Xi^{(1)}}{\partial a\,\partial c} = 0\\
&\nabla^2\sigma_{yz}^{(1)} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Xi^{(1)}}{\partial b\,\partial c} = 0
\end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\Xi^{(1)} = \sigma_{xx}^{(1)} + \sigma_{yy}^{(1)} + \sigma_{zz}^{(1)}$$

Частным решением этой задачи является система напряжений:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{xx}^{(1)} = -(\lambda+\mu)c^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial b^2} - U + \frac{\mu}{2}(a^2+b^2), && \sigma_{xy}^{(1)} = -\frac{\partial^2 F}{\partial a\,\partial b}\\
&\sigma_{yy}^{(1)} = -(\lambda+\mu)c^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} - U + \frac{\mu}{2}(a^2+b^2), && \sigma_{xz}^{(1)} = -\mu ac\\
&\sigma_{zz}^{(1)} = \nu[\nabla^2 F - 2U + \mu(a^2+b^2)] - 2\nu(\lambda+\mu)c^2, && \sigma_{yz}^{(1)} = -\mu bc
\end{aligned} \tag{9}$$

где

$$F = F(a, b)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что уравнения равновесия и третье условие на боковой поверхности выполняются независимо от выбора вида функции $F(a, b)$. Условия совместности будут удовлетворяться, если потребовать, чтобы

$$\nabla^4 F = \frac{1-2\nu}{1-\nu}\nabla^2 U - \frac{2\nu}{1-\nu}(\lambda+\mu) \tag{10}$$

Первые два условия на боковой поверхности сведутся к следующим контурным условиям для функции F:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial a} = -\int_0^s \left[U - \frac{\mu}{2}(a^2+b^2) + \mu a(\varphi_b' + a) - K_2\right] da + [K_4 + \mu b(\varphi_b' + a)]\,db\\
&\frac{\partial F}{\partial b} = \int_0^s [K_4 - \mu a(\varphi_a' - b)]\,da + \left[U - \frac{\mu}{2}(a^2+b^2) - K_1 - \mu b(\varphi_a' - b)\right] db
\end{aligned} \tag{11}$$

Интегралы берутся до произвольной точки ограничивающего контура. Для дополнительных перемещений получим

$$u^{(1)} = -\frac{1}{2}ac^2 + \bar{u}(a, b), \quad v^{(1)} = -\frac{1}{2}bc^2 + \bar{v}(a, b), \quad w^{(1)} = 0 \tag{12}$$

Легко видеть, что перемещения u и v состоят из перемещений $\bar{u}$ и $\bar{v}$, образующих плоскую деформацию, и перемещений, представляющих собой с точностью до τ^3 поворот на угол τc вокруг начала координат. В самом деле ясно, что при таком повороте смещения определяются формулами

$$u^* = -b \sin \tau c + a(1 - \cos \tau c), \qquad v^* = a \sin \tau c + b(1 - \cos \tau c)$$

совпадающими с требуемой степенью точности с найденными перемещениями.

Перейдем теперь к рассмотрению напряжений на торцевой поверхности $(c = l)$; для этой цели выпишем полную систему напряжений:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \tau^2 \left\{ K_1(a, b) + \frac{\partial^2 F}{\partial b^2} - U + \frac{\mu}{2}(a^2 + b^2) \right\}, & \sigma_{xy} &= \tau^2 \left\{ K_4(a, b) - \frac{\partial^2 F}{\partial a\, \partial b} \right\} \\
\sigma_{yy} &= \tau^2 \left\{ K_2(a, b) + \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} - U + \frac{\mu}{2}(a^2 + b^2) \right\}, & \sigma_{xz} &= \mu\tau(\varphi_a' - b) - \tau^2 \mu c(\varphi_b' + a) \\
\sigma_{zz} &= \tau^2 \{ K_3(a, b) + \nu[\nabla^2 F - 2U + \mu(a^2 + b^2)] \}, & \sigma_{yz} &= \mu\tau(\varphi_b' + a) + \tau^2 \mu c(\varphi_a' - b)
\end{aligned} \tag{13}$$

Рассмотрим торцевую поверхность $c = l$ или $z - w = l$. Направляющие косинусы нормали к этой поверхности

$$\begin{aligned}
\cos nx &= -\frac{\partial w}{\partial x}\left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(1 - \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} = -\tau\varphi_a' + O(\tau^2) \\
\cos ny &= -\frac{\partial w}{\partial y}\left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(1 - \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} = -\tau\varphi_b' + O(\tau^2) \\
\cos nz &= \left(1 - \frac{\partial w}{\partial z}\right)\left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(1 - \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} = 1 + O(\tau^2)
\end{aligned} \tag{14}$$

позволяют вычислить компоненты напряжений в этой поверхности

$$\begin{aligned}
x &= \sigma_{xz} + O(\tau^3), \\
y &= \sigma_{yz} + O(\tau^3) \\
z &= \sigma_{zz} - \mu\tau^2 [\varphi_a'(\varphi_a' - b) + \varphi_b'(\varphi_b' + a)] + O(\tau^3)
\end{aligned}$$

Площадь элемента поверхности определяется формулой

$$dF = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$

С принятой нами точностью радикал можно заменить единицей и положить $dF = dx\, dy$.

Составим выражение результирующих сил и моментов в сечении $c = l$:

$$\begin{aligned}
P &= \iint X\, dx\, dy, & L &= \iint (zX - xZ)\, dx\, dy \\
Q &= \iint Y\, dx\, dy, & M &= \iint (xY - yX)\, dx\, dy \\
R &= \iint Z\, dx\, dy; & N &= \iint (yZ - zY)\, dx\, dy
\end{aligned}$$

Интегрирование распространяется по торцевому сечению деформированного стержня. Перейдем к координатам начального состояния и, следовательно, интегрирование проведем по торцевому сечению недеформированного стержня, причем

$$\frac{D(x, y)}{D(a, b)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial a} & \dfrac{\partial x}{\partial b} \\ \dfrac{\partial y}{\partial a} & \dfrac{\partial y}{\partial b} \end{vmatrix} = 1 + O(\tau^2)$$

(заметим, что $x = a + u$, $y = b + v$, $z = c + w$).

В результате несложных выкладок найдем

$$P=0, \qquad Q=0 \tag{15}$$

$$R=\iint\{\sigma_{zz}-\mu\tau^2[\varphi_a'(\varphi_a'-b)+\varphi_b'(\varphi_b'+a)]\}\,da\,db \tag{16}$$

$$M=\mu\tau\iint(a^2+b^2+a\varphi_b'-b\varphi_a')\,da\,db+2\mu\tau^2 l\iint(a\varphi_a'+b\varphi_b')\,da\,db=$$

$$=\mu\tau\iint(a^2+b^2+a\varphi_b'-b\varphi_a')\,da\,db \tag{17}$$

так как

$$\iint a\varphi_a'\,da\,db=\iint\left\{a\varphi_a'+\frac{a^2}{2}[\varphi_{aa}''+\varphi_{bb}'']\right\}da\,db=0$$

в силу граничных условий для функции кручения.

Таким образом, мы получим обычное соотношение (17), связывающее крутку τ и крутящий момент. Называя, как принято, геометрической жесткостью при кручении интеграл

$$T=\iint(a^2+b^2+a\varphi_b'-b\varphi_a')\,da\,db$$

получим

$$M=\tau\mu T \tag{18}$$

причем для геометрической жесткости сохраняется то же значение, что и в линейной теории.

Далее

$$\begin{aligned} L&=-\iint a\{\sigma_{zz}-\mu\tau^2[\varphi_a'(\varphi_a'-b)+\varphi_b'(\varphi_b'+a)]\}\,da\,db\\ N&=\iint b\{\sigma_{zz}-\mu\tau^2[\varphi_a'(\varphi_a'-b)+\varphi_b'(\varphi_b'+a)]\}\,da\,db \end{aligned} \tag{19}$$

Последние равенства принимают особо простой вид в случае $\nu=0$.

$$\begin{aligned} L&=-\tau^2\frac{\mu}{4}\iint a(\varphi_a'^2+\varphi_b'^2+a^2+b^2-2a\varphi_b'+2b\varphi_a')\,da\,db=\\ &=-\tau^2\frac{\mu}{4}\iint a\sigma_0^2\,da\,db\\ N&=\tau^2\frac{\mu}{4}\iint b(\varphi_a'^2+\varphi_b'^2+a^2+b^2-2a\varphi_b'+2b\varphi_a')\,da\,db=\\ &=\tau^2\frac{\mu}{4}\iint b\sigma_0^2\,da\,db \end{aligned} \tag{20}$$

где σ_0 — полное напряжение в классической задаче кручения.

Выражение для R в этом случае принимает вид

$$R=\tau^2\frac{\mu}{4}\iint\sigma_0^2\,da\,db. \tag{21}$$

Из равенства (21) очевидно, что $R>0$; чтобы устранить соответствующую компоненту и обеспечить выполнение торцевых условий, к полученному решению следует добавить решение, соответствующее действию сжимающей силы $-R$;

Мы видим, что при кручении стержня наблюдается осевое сжатие силой $-R$ и соответственное расширение в направлениях, перпендикулярных оси стержня. Легко видеть, что в случае, когда оси координат являются осями симметрии, то $L=N=0$ и полученное нами решение является полным решением задачи об упругом равновесии под действием крутящего момента, приложенного в торцевом сечении.

Деформация в этом случае сводится к закручиванию сечений, осевому сжатию, соответствующему радиальному расширению, и некоторой дополнительной плоской деформации, зависящей от формы сечения. Если $L \neq 0$ и $N \neq 0$, то к решению должна быть добавлена система напряжений и перемещений, соответствующих изгибу парами, момент которых $-L$ и $-N$.

Дополнительные перемещения вызывают двоякую кривизну оси стержня с компонентами $\left(-\frac{L}{EJ_y}; -\frac{L}{EJ_x}\right)$.

Естественно поставить вопрос о выборе оси кручения (мы считали ее в силу формул (1) совпадающей с осью z), при которой будет отсутствовать изгиб стержня. Очевидно, что эта ось будет определяться равенствами $L=0$ и $N=0$.

Вычисления по формулам (20) для стержня с предельно тонким профилем дают совпадение с осью жесткости, определяемой по формуле Гриффитса.

Поступила в редакцию
15 II 1943

Центральный аэрогидродинамический институт
им. Жуковского

GENERAL SOLUTION OF THE TORSION PROBLFM IN THE NONLINEAR THEORY OF ELASTICITY

P. M. RIZ

(Summary)

The solution of the problem expressed in the title of this paper is given for a prismatic bar with an arbitrary cross-section. The squares of derivatives of displacements are taken in consideration. By virtue of this a few of the phenomena disregarded in the classical theory of Saint Venant are brought to light, viz:

1. The axial compression of bar.
2. The additional plane deformation distorting the cross-section.
3. The additional bending of the bar which depends upon the choice of the axis of torsion and vanishes for the specific position of this axis.

Some of the phenomena for particular cases of cross-section had been revealed in the author's previous paper [1] and by D. Panov in his paper [2].

The method of investigation is closely related to that reported by Zvolinsky and the author in a paper [3] appeared in this journal during 1938.

ЛИТЕРАТУРА

1. Риз П. М. О некоторых явлениях при кручении круглого цилиндра. Труды ЦАГИ. 1939. Вып. 408.
2. Панов. Д. Ю. Вторичные эффекты при кручении эллиптического цилиндра. Труды ЦАГИ. 1939. Вып. 459.
3. Зволинский Н. В. и Риз П. М. О некоторых задачах нелинейной теории упругости. Прикладная математика и механика. 1939. Т. II. Вып. 4.