Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том VII, 1943

АВТОКОЛЕБАНИЯ РЕГУЛИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Б. В. БУЛГАКОВ

(Москва)

§ 1. Дифференциальные уравнения системы. В связи с широким развитием автоматического регулирования и управления всевозможных машин и аггрегатов за последнее время появился ряд исследований, подготовляющих построение теории, которая, повидимому, должна явиться обобщением классической теории центробежных регуляторов угловой скорости. В этом отношении характерно почти одновременное появление серии статей в The Engineer [1] и работы W. Oppelt [2], которые мы называем потому, что в них рассмотрены регулируемые системы того типа, к которым относится и настоящее сообщение. По терминологии статей в The Engineer это системы первого рода, обладающие количеством движения, мы бы сказали, обладающие инерцией; по W. Oppelt они могут быть описаны уравнением

$$\ddot{\varphi}+M\dot{\varphi}=-N\eta \tag{1}$$

в котором φ есть отклонение от состояния, предписанного системе в качестве нормального, η — координата органа управления, M и N — постоянные коэффициенты. Член $\ddot{\varphi}$ выражает инерцию, $M\dot{\varphi}$ — естественное демпфирование, $N\eta$ — воздействие регулятора.

В обеих упомянутых работах применен исключительно аппарат линейных дифференциальных уравнений, что дает возможность получить много важных результатов и расчетных формул. Однако при этом оказывается необъясненным ряд явлений, связанных с нелинейностью; последняя особенно существенна во втором уравнении, которым мы должны описать функционирование сервомотора, приводящего в действие орган управления. Эта нелинейность была учтена в работе В. А. Котельникова. Н. В. Бутенин построил точное решение для одной из нелинейных задач этого типа. Укажем еще на исследование N. Minorsky [3]. В настоящей статье к рассматриваемому вопросу применяется метод периодических решений А. Пуанкаре в той его специальной форме, которую мы предложили [4] для псевдолинейных систем; мы займемся выяснением условий возникновения автоколебаний, ухудшающих работу регулятора, и путей к их устранению.

Уравнение сервомотора представим в виде

$$\dot{\eta}=F\left(\varphi+\beta\dot{\varphi}-\frac{1}{a}\eta\right) \tag{2}$$

Здесь через β обозначен коэффициент искусственного демпфирования, создаваемого путем подачи на реле управления сервомотора импульса, пропорционального скорости изменения φ; через a обозначено передаточное число обратной связи, так что член η / a выражает движение органа управления, приведенное к масштабу реле.

Величина

$$\psi = \varphi + \beta\dot{\varphi} - \frac{1}{a}\eta \tag{3}$$

определяет полное открытие реле. Наконец, функция $F(\psi)$ представляет характеристику сервомотора. Ее значениями определяется скорость перестановки органа управления.

Принимая ψ за новую неизвестную вместо η и применяя оператор дифференцирования $D = d / dt$, получим

$$(D^2 + MD)\varphi + Na(\varphi + \beta D\varphi - \psi) = 0, \qquad -a(D\varphi + \beta D^2\varphi - D\psi) + F(\psi) = 0$$

Вводя малый параметр μ, будем рассматривать измененную систему

$$\begin{gathered} [D^2 + (M + Na\beta) D + Na]\varphi - Na\psi = 0 \\ -a(\beta D^2 + D)\varphi + (aD + h)\psi = \frac{\mu}{\mu_1}[h\psi - F(\psi)] \end{gathered} \tag{4}$$

которая совпадает с предыдущей, если дать μ значение μ_1; величина $h\psi$ есть линейное приближение для функции $F(\psi)$, так что коэффициент h представляет среднюю крутизну характеристики.

§ 2. Упрощенные линейные уравнения. При $F(\psi) \equiv h\psi$ имеем линейную систему с операционным определителем

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} D^2 + (M + Na\beta) D + Na & -Na \\ -a\beta D^2 - aD & aD + h \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv aD^3 + (Ma + h) D^2 + h(M + Na\beta) D + Nah \tag{5}$$

Из условий Рауса-Гурвитца для этих упрощенных уравнений существенно только

$$(Ma + h)(M + Na\beta) - aNa > 0 \tag{6}$$

Остальные условия всегда выполняются, поскольку коэффициенты M, N, a, β, h положительны.

Если

$$1 - M\beta > 0 \tag{7}$$

то из предыдущего неравенства, квадратичного относительно a, вытекает $a < a^*$, где a^* есть положительный корень уравнения

$$(Ma^* + h)(M + Na^*\beta) - Na^{*2} = 0 \tag{8}$$

или

$$N(1 - M\beta) a^{*2} - (M^2 + N\beta h) a^* - Mh = 0 \tag{9}$$

т. е.

$$a^* = \frac{1}{2N(1 - M\beta)}(M^2 + N\beta h + R) \tag{10}$$

где

$$R = +\sqrt{(M^2 - N\beta h)^2 + 4MNh} \tag{11}$$

Таким образом условие, обеспечивающее затухание собственных колебаний системы, эквивалентно заданию некоторой верхней границы для передаточного числа a.

Заметим, что, в частности,

$$a^* = \frac{1}{2N}\left(M^2 + \sqrt{M^4 + 4MNh}\right) \qquad \text{при} \quad \beta = 0 \tag{12}$$

$$a^* = \beta h \qquad \text{при} \quad M = 0 \tag{13}$$

и что в общем случае

$$\begin{aligned}(1 - M\beta)\frac{\partial a^*}{\partial M} &= \beta a^* + \frac{1}{NR}\left[M^3 + Nh(1 - M\beta) + MR\right]\\ (1 - M\beta)\frac{\partial a^*}{\partial \beta} &= Ma^* + \frac{h}{2R}\left[-(M^2 - M\beta h) + R\right]\end{aligned} \tag{14}$$

откуда видно, что обе производные $\partial a^* / \partial M$ и $\partial a^* / \partial \beta$ положительны, если выполняется условие (7). Иными словами, число a^* увеличивается, когда точка с координатами M, β передвигается направо и вверх в той части плоскости, которая заключена между положительными частями осей M, β и гиперболой $1 - M\beta = 0$; на самой гиперболе число a^* обращается в бесконечность. Наконец, по ту сторону гиперболы, т. е. при $1 - M\beta < 0$, оба корня уравнения (9) отрицательны и условия Рауса-Гурвитца выполняются при всех конечных положительных a. Линейные уравнения в этом случае не имеют периодических решений, соответствующих незатухающим колебаниям, и, как мы увидим дальше, система не может получить тех самовозбужденных колебаний, изучение которых составляет нашу задачу. Поэтому мы будем предполагать, что коэффициенты естественного и искусственного демпфирования M и β таковы, что либо один из них по малости может быть принят за нуль, либо они во всяком случае удовлетворяют неравенству (7).

§ 3. Порождающие периодические решения упрощенной системы. Если a достигает верхней границы a^*, то с помощью соотношения (8) характеристическое уравнение $\Delta = 0$ может быть написано в виде

$$a^*D^3 + (Ma^* + h)D^2 + h(M + Na^*\beta)D + \frac{h(Ma^* + h)(M + Na^*\beta)}{a^*} = $$
$$= a^*\left(D + \frac{Ma^* + h}{a^*}\right)\left[D^2 + \frac{h(M + Na^*\beta)}{a^*}\right] = 0$$

Один его корень действителен и отрицателен, два другие суть $\pm i\omega$, причем с помощью (9)

$$\omega^2 = \frac{h(M + Na^*\beta)}{a^*} = N(1 - M\beta)a^* - M^2 \tag{15}$$

Этой паре чисто мнимых сопряженных корней соответствует периодическое решение φ^*, ψ^* упрощенных уравнений, удовлетворяющее условиям

$$[D^2 + N(1 - M\beta)a^* - M^2]\varphi^* = [D^2 + N(1 - M\beta)a^* - M^2]\psi^* = 0$$

Пользуясь первым из них, исключим вторую производную из первого уравнения (4), написанного для φ^*, ψ^* при $a = a^*$,

$$[-N(1 - M\beta)a^* + M^2 + (M + Na^*\beta)D + Na^*]\varphi^* - Na^*\psi^* =$$
$$= (M + Na^*\beta)(M + D)\varphi^* - Na^*\psi^* = 0$$

Если взять теперь

$$\varphi^* = A\frac{-\omega\cos\omega t + M\sin\omega t}{(1 - M\beta)(M + Na^*\beta)} \tag{16}$$

2*

где A — произвольная постоянная, то с помощью второго выражения (15) найдем

$$Na^*\psi^* = (M + Na^*\beta)(M + D)\varphi^* =$$
$$= \frac{A}{1 - M\beta}[M(-\omega\cos\omega t + M\sin\omega t) + \omega(\omega\sin\omega t + M\cos\omega t)] =$$
$$= \frac{A}{1 - M\beta}[M^2 + N(1 - M\beta)a^* - M^2]\sin\omega t$$

так что для ψ^* получается простое выражение

$$\psi^* = A\sin\omega t \tag{17}$$

которое показывает, что A есть амплитуда колебаний реле. Вместо ωt мы могли бы в обеих формулах (16), (17) писать $\omega t + \theta$.

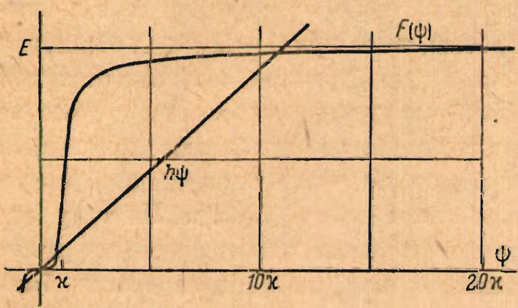
§ 4. Уравнения с малым параметром. Вернемся теперь к псевдолинейным уравнениям (4) и будем рассматривать передаточное число a как функцию от μ, определяемую соотношением

$$a = a^*\left(1 - \frac{\mu}{\mu_1}w\right) \tag{18}$$

Так как из него вытекает

$$\frac{\mu}{\mu_1}w = \frac{a^* - a}{a^*} \tag{19}$$

то постоянная w при данных M, N, β, $F(\psi)$ и $\mu = \mu_1$ представляет относительное изменение числа a.



Фиг. 1.

Уравнения (4) приведены теперь к общей форме, принятой в нашей работе [6] о псевдолинейных системах, при ссылках на которую мы будем пользоваться условным обозначением *ПМП* (применение метода Пуанкаре). Те общие уравнения, о которых сейчас упоминалось, можно найти там под номером (1). Нелинейные поправки, фигурирующие в правых частях с множителем μ, в данной задаче будут

$$\varphi_1 \equiv 0, \qquad \varphi_2 \equiv \frac{h\psi - F(\psi)}{\mu_1} \tag{20}$$

Типичный вид графика функции $F(\psi)$ показан на фиг. 1. Кривая симметрична относительно начала координат, $F(-\psi) = -F(\psi)$. Та ее половина, которая соответствует, например, положительным значениям аргумента ψ, состоит из трех частей: первая представляет зону нечувствительности автомата, на второй, в окрестности аргумента $\psi = \varkappa$, мы имеем быстрое нарастание скорости перестановки органа управления, третья соответствует полному ходу сервомотора с максимальной скоростью E. Линейное приближение изображается на графике секущей.

§ 5. Периодические решения псевдолинейной системы. Нам остается проделать вычисления, необходимые для применения к данной задаче уравнения *ПМП* (28), которыми определяются амплитуды A^* тех периодических решений упрощенной системы, которые могут порождать в своей окрестности такие же решения для псевдолинейных уравнений, а также соответствующие поправки на частоту b. В первом приближении порождающие амплитуды равны амплитудам установившихся периодических колебаний псевдолинейной системы. Выкладки несколько громоздки и могли бы быть упрощены с помощью какого-либо частного предположения, например, допуская, что искусственное демпфирование отсутствует. Так как, однако, окончательные формулы и в общем случае вполне обозримы, то я все же не пойду на это стеснительное ограничение и решусь просить читателя преодолеть вместе со мной эти затруднения, связанные, впрочем, исключительно с формальной стороной дела.

Дифференцируя выражение (5), мы имеем с помощью первого выражения (15) и формулы (18)

$$\left[\frac{\partial \Delta(D,\mu)}{\partial D} D\right]_{\substack{D=i\omega\\ \mu=0}} = i\omega\left[-3a^*\omega^2 + h(M+Na^*\beta)\right] - 2(Ma^*+h)\,\omega^2 =$$

$$= -2h\left[\frac{(Ma^*+h)(M+Na^*\beta)}{a^*} + i\omega(M+Na^*\beta)\right]$$

$$\left[\frac{\partial \Delta(D,\mu)}{\partial \mu}\right]_{\substack{D=i\omega\\ \mu=0}} = \left[\frac{\partial \Delta}{\partial a}\frac{da}{d\mu}\right]_{\substack{D=i\omega\\ \mu=0}} = (-i\omega\omega^2 - M\omega^2 + N\beta h\, i\omega + Nh)\left(-\frac{a^* w}{\mu_1}\right) =$$

$$= \left[M\omega^2 a^* - Na^*h + i\omega(\omega^2 a^* - Na^*\beta h)\right]\frac{w}{\mu_1}$$

или согласно (8)

$$\left[\frac{\partial \Delta(D,\mu)}{\partial D} D\right]_{\substack{D=i\omega\\ \mu=0}} = -2h\left[Na^* + i\omega(M+Na^*\beta)\right] \qquad (21)$$

и, опять применяя первое выражение (15),

$$\left[\frac{\partial \Delta(D,\mu)}{\partial \mu}\right]_{\substack{D=i\omega\\ \mu=0}} = \frac{w}{\mu_1}\left[Mh(M+Na^*\beta) - Na^*h + i\omega\, Mh\right]$$

$$\left[\frac{\partial \Delta(D,\mu)}{\partial \mu}\right]_{\substack{D=i\omega\\ \mu=0}} = \frac{wh}{\mu_1}\left[M^2 - Na^*(1-M\beta) + iM\omega\right] \qquad (22)$$

Из алгебраических дополнений элементов определителя $\Delta(i\omega, 0)$ понадобится только

$$F_{22}(i\omega, 0) = -\omega^2 + i\omega(M+Na^*\beta) + Na^*$$

или согласно второму выражению (15)

$$F_{22}(i\omega, 0) = (M+Na^*\beta)(M+i\omega) \qquad (23)$$

Полагая затем в *ПМП* (8)

$$m = 2 \qquad (24)$$

мы имеем согласно *ПМП* (10)

$$C_2 = L_2 + iM_2 = s$$

Выражение *ПМП* (11), написанное для $k=2$, приводится в совпадение с формулой (17) настоящей статьи, если положить

$$\varepsilon = -\tfrac{1}{2}\pi \qquad (25)$$

и $L_2 = 1$, $M_2 = 0$, откуда

$$s = 1 \qquad (26)$$

С помощью полученных выражений (21), (22), (23), (24), (25), (26) основное уравнение *ПМП* (28) получает для данной задачи вид

$$Ah\left\{-2\left[Na^*+i\omega(M+Na^*\beta)\right]b+\frac{w}{\mu_1}\left[M^2-Na^*(1-M\beta)+iM\omega\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi}(M+Na^*\beta)(M+i\omega)\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi_2(A\sin u)\exp i\left(-u+\frac{\pi}{2}\right)du \qquad (27)$$

где $u=\omega\tau$, а τ есть преобразованное время, вводимое формулой *ПМП* (12), что, впрочем, не имеет значения при данном вычислении.

Полагая

$$\chi(\psi)=\int_0^{\psi}\varphi_2(\psi)\,d\psi$$

и замечая, что

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi_2(A\sin u)\cos u\,du=\frac{1}{A}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi_2(A\sin u)\,d(A\sin u)=\frac{1}{A}\chi(A\sin u)\Big|_{-\pi}^{+\pi}=0$$

мы имеем

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi_2(A\sin u)\exp i\left(-u+\frac{\pi}{2}\right)du=\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi_2(A\sin u)\sin u\,du.$$

Поэтому, отделяя в (27) действительную и мнимую части, получим

$$Ah\left\{-2Na^*b+\frac{w}{\mu_1}\left[M^2-Na^*(1-M\beta)\right]\right\}=\frac{M}{\pi}(M+Na^*\beta)\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi_2(A\sin u)\sin u\,du$$

$$Ah\left\{-2(M+Na^*\beta)b+\frac{w}{\mu_1}M\right\}=\frac{1}{\pi}(M+Na^*\beta)\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi_2(A\sin u)\sin u\,du.$$

Исключая из этих уравнений сначала интеграл, входящий справа, затем b и заменяя φ_2 его выражением (20), найдем

$$2\left[M^2-Na^*(1-M\beta)\right]b=\frac{w}{\mu_1}Na^*(1-M\beta)$$

$$Ah\frac{w}{\mu_1}\left\{\left[M^2-Na^*(1-M\beta)\right](M+Na^*\beta)-MNa^*\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[M^2-Na^*(1-M\beta)\right](M+Na^*\beta)\frac{1}{\mu_1}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[hA\sin u-F(A\sin u)\right]\sin u\,du$$

или

$$b=\frac{w}{2\mu_1}\left\{-1+M^2\left[M^2-Na^*(1-M\beta)\right]^{-1}\right\}$$

$$Ahw\left\{1-MNa^*\left[M^2-Na^*(1-M\beta)\right]^{-1}(M+Na^*\beta)^{-1}\right\}= \qquad (28)$$

$$=hA-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}F(A\sin u)\sin u\,du$$

Заметим далее соотношения

$$\left[M^2-Na^*(1-M\beta)\right]\left[(1-M\beta)a^*-\beta h\right]=-Mh$$

$$(M+Na^*\beta)\left[N\beta(1-M\beta)a^*-(M+N\beta^2h)\right]=-M^2 \qquad (29)$$

которые, после раскрытия скобок и сокращений, не отличаются от (9); мы получим с их помощью, используя повторно (9) для исключения a^{*2},

$$-1+M^2[M^2-Na^*(1-M\beta)]^{-1}=-\frac{h+M(1-M\beta)a^*-M\beta h}{h}$$

$$[M^2-Na^*(1-M\beta)]^{-1}(M+Na^*\beta)^{-1}=$$
$$=\frac{1}{M^3h}[(1-M\beta)a^*-\beta h][N\beta(1-M\beta)a^*-(M+N\beta^2h)]=$$
$$=\frac{1}{M^3h}[(1-M\beta)(-M+M^2\beta-N\beta^2h)a^*+\beta h(2M-M^2\beta+N\beta^2h)]$$

и уравнения (28) примут вид:

$$b=-\frac{\omega}{2\mu_1}\frac{1}{h}(1-M\beta)(Ma^*+h)$$

$$Ah\omega\left\{1-\frac{Na^*}{M^2h}[(1-M\beta)(-M+M^2\beta-N\beta^2h)a^*+\beta h(2M-M^2\beta+N\beta^2h)]\right\}=$$
$$=hA-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}F(A\sin u)\sin u\,du$$

или, подставляя в первое вместо a^* его выражение (10) и преобразуя второе с помощью (9),

$$b=-\frac{\omega}{4\mu_1 Nh}[M(M^2-N\beta h+R)+2Nh] \tag{30}$$
$$\frac{A\omega}{M^2}\{M^2h-[(M^2+N\beta h)a^*+Mh](-M+M^2\beta-N\beta^2h)-$$
$$-N\beta h(2M-M^2\beta+N\beta^2h)a^*\}=hA-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}F(A\sin u)\sin u\,du$$

Или же, продолжая преобразование последнего уравнения

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}F(A\sin u)\sin u\,du=hA-\frac{A\omega}{M^2}\{[(M^2+N\beta h)(M-M^2\beta+N\beta^2h)-$$
$$-N\beta h(2M-M^2\beta+N\beta^2h)]a^*+Mh(M+M-M^2\beta+N\beta^2h)\}= \tag{31}$$
$$=hA-\frac{A\omega}{M}\{[M(M-M^2\beta+N\beta^2h)-N\beta h]a^*+h(2M-M^2\beta+N\beta^2h)\}=\frac{4}{\pi}cA$$

где

$$\frac{4c}{\pi}=h-\frac{\omega}{M}\{2Mh+(M^2-N\beta h)[(1-M\beta)a^*-\beta h]\} \tag{32}$$

Если заменить a^* выражением (10), а ω выражением (19) при $\mu=\mu_1$, то получится

$$\frac{4c}{\pi}=h-\frac{a^*-a}{Ma^*}\left[2Mh+\frac{M^2-N\beta h}{2N}(M^2+N\beta h+R-2N\beta h)\right]$$

и (31) принимает окончательную форму

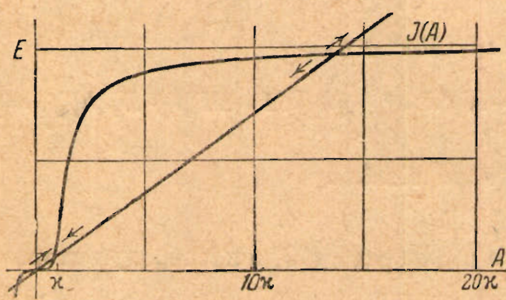
$$J(A)=cA \tag{33}$$

где

$$J(A)=\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{+\pi}F(A\sin u)\sin u\,du$$
$$c=\frac{\pi}{4}\left\{h-\frac{a^*-a}{2MNa^*}[4MNh+(M^2-N\beta h)^2+(M^2-N\beta h)R]\right. \tag{34}$$

Формула (30) дает выражение для поправки на частоту, не зависящее от A. Уравнение (33) может быть разрешено относительно A и дает порождающие амплитуды A^*. Их удобно находить графически (фиг. 2) как абсциссы точек пересечения кривой, изображающей функцию $J(A)$, с лучом cA, проведенным через начало координат.

Мы отмечали ранее (*ПМП*, § 8), что при характеристике $F(\psi)$ показанного на фиг. 1 вида график функции $J(A)$ должен быть того же самого типа, как это и изображено на фиг. 2. Поэтому, в зависимости от величины c, мы получим при $A > 0$ либо две точки пересечения кривой $J(A)$ и луча cA, либо ни одной. Если имеются две точки пересечения с абсциссами A_1, A_2, то с убыванием углового коэффициента c меньший корень A_1 убывает, а больший корень A_2 возрастает. Механический смысл этого результата можно будет выяснить после того, как мы решим вопрос об устойчивости найденных установившихся колебаний, а пока заметим, что, как легко убедиться, выражение в квадратных скобках во второй формуле (34) положительно.



Фиг. 2.

В самом деле, предполагая сначала, что $M^2 - N\beta h < 0$ и добавляя равные величины в обе части тривиального неравенства

$$4M^2N^2h^2 > 0$$

имеем

$$4M^2N^2h^2 + 4MNh\,(N\beta h - M^2)^2 + (N\beta h - M^2)^4 >$$
$$> (N\beta h - M^2)^2\,[(N\beta h - M^2)^2 + 4MNh]$$

или, извлекая корни квадратные,

$$2MNh + (N\beta h - M^2)^2 > (N\beta h - M^2)\,R$$

Отсюда получается неравенство

$$2MNh + (M^2 - N\beta h)^2 + (M^2 - N\beta h)\,R > 0 \tag{35}$$

причем сразу видно, что оно остается верным и при $M^2 - N\beta h \geqslant 0$. Тем более

$$4MNh + (M^2 - N\beta h)^2 + (M^2 - N\beta h)\,R > 0 \tag{36}$$

что и требовалось доказать.

Отсюда следует, что угловой коэффициент c, определяемый формулой (34), убывает с убыванием передаточного числа a. Он обращается в нуль при $a = a_0$, где

$$a_0 = a^* r \tag{37}$$

$$r = \frac{2MNh + (M^2 - N\beta h)^2 + (M^2 - N\beta h)\,R}{4MNh + (M^2 - N\beta h)^2 + (M^2 - N\beta h)\,R} \tag{38}$$

и тогда, кроме начала координат, на фиг. 2 не получится никаких точек пересечения кривой и прямой: корень A_1 обратится в нуль, корень A_2 — в бесконечность. Вследствие неравенств (35), (36) мы имеем

$$0 < r < 1$$

Величина a_0, зависящая от M и β, является нижней границей тех значений передаточного числа, при которых возможны установившиеся незатухающие колебания. Верхняя граница этой области соответствует тем значениям c и A, при которых луч cA касается кривой $J(A)$ и которые удовлетворяют поэтому совокупным уравнениям

$$J(A)=cA, \qquad J'(A)=c \tag{39}$$

но эта граница менее интересна.

Для случая, когда искусственного демпфирования нет, мы имеем следующие формулы, вытекающие из (34), (38):

$$\begin{gathered} c=\frac{\pi}{4}\left[h-\frac{a^*-a}{2Na^*}\left(M^3+4Nh+M\sqrt{M^4+4MNh}\right)\right] \quad \text{при} \quad \beta=0 \\ r=\frac{2Nh+M^3+M\sqrt{M^4+4MNh}}{4Nh+M^3+M\sqrt{M^4+4MNh}} \quad \text{при} \quad \beta=0 \end{gathered} \tag{40}$$

При этом a^* определяется формулой (12) и возрастает вместе с M; $(a^*-a)/a^*$ и круглая скобка в первом выражении (40) будут тогда также возрастать, а c убывать.

Если естественное демпфирование так мало, что можно принять $M=0$, а $\beta\neq 0$, то, раскрывая неопределенности по Лопиталю, имеем

$$c=\frac{\pi}{4}\,h\frac{a}{a^*}=\frac{\pi}{4}\,\frac{a}{\beta} \quad \text{при} \quad M=0, \qquad r=0 \quad \text{при} \quad M=0 \tag{41}$$

Заметим, что эти выражения совсем не зависят от коэффициента линейного приближения h и что здесь опять c убывает с ростом β.

Таким образом в обоих этих частных случаях увеличение демпфировки дает тот же эффект, что и уменьшение передаточного числа a, т. е. уменьшение амплитуды A_1 и увеличение амплитуды A_2.

При $1-M\beta=0$ мы имеем $R=\beta(M^3+Nh)$ и

$$r=\frac{M^3}{M^3+Nh} \tag{42}$$

так что a_0 обращается в бесконечность вместе с a^* и псевдолинейные уравнения уже не допускают ненулевых периодических решений ни при каких конечных значениях a. Следовательно, область тех пар значений M и β, для которых вообще возможны установившиеся колебания, сводится к той, указанной ранее части плоскости, которая заключена между положительными осями M и β и гиперболой $M\beta=1$.

§ 6. Устойчивость периодических колебаний. Для того чтобы решить вопрос об устойчивости найденных установившихся колебаний, определяемых периодическими функциями φ, ψ, рассмотрим соседнее слегка возмущенное колебание $\varphi+\delta\varphi$, $\psi+\delta\psi$. Подставим измененные координаты вместо φ, ψ в уравнения (4) и разложим $F(\psi+\delta\psi)$ в ряд Тейлора. Все члены, не зависящие от $\delta\varphi$, $\delta\psi$, сократятся в силу первоначальных уравнений, которые должны тождественно удовлетворяться функциями φ, ψ. Пренебрегая членами второго и высших порядков относительно $\delta\varphi$, $\delta\psi$, получим линейные уравнения в вариациях

$$\begin{gathered} [D^2+(M+Na\beta)\,D+Na]\,\delta\varphi-Na\delta\psi=0 \\ -a\,(\beta D^2+D)\,\delta\varphi+(aD+h+h_1)\,\delta\psi=0 \end{gathered} \tag{43}$$

где коэффициент

$$h_1 = \frac{\mu}{\mu_1}[F'(\psi) - h] \tag{44}$$

является периодической функцией времени. Мы, однако, приближенно заменим ее средним значением, при вычислении которого вместо $F'(\psi)$ подставим приближенное выражение $F'(A\sin\omega\tau)$.

Имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F'(A\sin u)\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F'(A\sin u)(\cos^2 u + \sin^2 u)\,du =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{A}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos u\, F'(A\sin u)\, d(A\sin u) + \frac{d}{dA}\int_{-\pi}^{+\pi} F(A\sin u)\sin u\,du\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{A}\cos u\, F(A\sin u)\Big|_{-\pi}^{+\pi} + \left(\frac{d}{dA} + \frac{1}{A}\right)\int_{-\pi}^{+\pi} F(A\sin u)\sin u\,du\right] = \frac{2}{\pi A}\frac{d}{dA}[AJ(A)]$$

и, следовательно,

$$h \approx \frac{\mu}{\mu_1}\left\{\frac{2}{\pi A}\frac{d}{dA}[AJ(A)] - h\right\} = \frac{\mu}{\mu_1}\frac{1}{2A}\frac{d}{dA}A\left[\frac{4}{\pi}J(A) - hA\right] \tag{45}$$

Так как коэффициенты M, N, a, β положительны, то лишь два из неравенств Рауса-Гурвитца для линейных уравнений (43), все коэффициенты которых теперь постоянны, являются существенными. Эти условия могут быть представлены в форме

$$h + h_1 > 0, \qquad (Ma + h + h_1)(M + Na\beta) > N\alpha^2 \tag{46}$$

Подставляя вместо h_1 только что найденное выражение, получим первое неравенство в виде

$$2Ah + \frac{\mu}{\mu_1}\frac{d}{dA}A\left[\frac{4}{\pi}J(A) - hA\right] = 2Ah\left(1 - \frac{\mu}{\mu_1}\right) + \frac{\mu}{\mu_1}\frac{4}{\pi}\frac{d}{dA}AJ(A) > 0$$

Так как $J(A)$ есть монотонная возрастающая функция, то для положительных значений A, h и при $0 \leqslant \mu \leqslant \mu_1$ это условие всегда выполняется.

Второе неравенство (46) может быть с помощью (45) представлено в виде

$$2A[-Na^2 + (Ma + h)(M + Na\beta)] + (M + Na\beta)\frac{\mu}{\mu_1}\frac{d}{dA}A\left[\frac{4}{\pi}J(A) - hA\right] =$$

$$= \frac{d}{dA}A\left\{[-N(1 - M\beta)a^2 + (M^2 + N\beta h)a + Mh]A + \right.$$

$$\left. + (M + Na\beta)\frac{\mu}{\mu_1}\left[\frac{4}{\pi}J(A) - hA\right]\right\} > 0$$

Пользуясь формулами (9), (18) при малых значениях μ, найдем

$$N(1 - M\beta)a^2 - (M^2 + N\beta h)a - Mh \approx N(1 - M\beta)a^{*2} - (M^2 + N\beta h)a^* -$$

$$- Mh + \mu\left\{\frac{d}{d\mu}[N(1 - M\beta)a^2 - (M^2 + N\beta h)a - Mh]\right\}_{\mu=0} =$$

$$= 0 + \mu\left\{\frac{d}{da}[N(1 - M\beta)a^2 - (M^2 + N\beta h)a - Mh]\right\}_{a=a^*}\frac{da}{d\mu} =$$

$$= \mu[2N(1 - M\beta)a^* - (M^2 + N\beta h)]\left(-a^*\frac{w}{\mu_1}\right) =$$

$$= w\frac{\mu}{\mu_1}[-2N(1 - M\beta)a^{*2} + (M^2 + N\beta h)a^*] = -w\frac{\mu}{\mu_1}[(M^2 + N\beta h)a^* + 2Mh]$$

Поэтому предыдущее неравенство может быть представлено в виде

$$\frac{d}{dA} A \left\{ w \frac{\mu}{\mu_1} [(M^2+N\beta h) a^* + 2Mh] (M+Na^*\beta)^{-1} A + \frac{\mu}{\mu_1} \left[\frac{4}{\pi} J(A) - hA \right] \right\} > 0$$

Применяя вторую формулу (29) и уравнение (9) для исключения $(M+Na^*\beta)^{-1}$ и a^{*2}, имеем

$$[(M^2+N\beta h) a^* + 2Mh] (M+Na^*\beta)^{-1} =$$

$$= -\frac{1}{M^2} [(M^2+N\beta h) a^* + 2Mh] [N\beta (1-M\beta) a^* - (M+N\beta^2 h)] =$$

$$= \frac{1}{M^2} \{ -N\beta (1-M\beta)(M^2+N\beta h) a^{*2} + (M^3 + N^2\beta^3 h^2 - MN\beta h + 3M^2 N\beta^2 h) a^* +$$

$$+ 2Mh (M+N\beta^2 h) \} = \frac{1}{M} [(1-M\beta)(M^2 - N\beta h) a^* + h(2M - M^2\beta + N\beta^2 h)]$$

Пользуясь еще формулой (32) для c, получим неравенство в форме

$$\frac{d}{dA} A [J(A) - cA] > 0$$

или окончательно, принимая во внимание уравнение (33), которому должно удовлетворять A,

$$\frac{dJ(A)}{dA} > c \tag{47}$$

Если представить себе те две области, которые на фиг. 2 примыкают к кривой $J(A)$ снизу и сверху, и вести луч cA слева направо, то последнее неравенство удовлетворяется для тех точек пересечения кривой и луча, где последний переходит из верхней области в нижнюю. В этом случае периодическое решение псевдолинейной системы, близкое к соответствующему порождающему решению, устойчиво, в противном случае — неустойчиво. Поэтому из двух точек пересечения на фиг. 2 левая ($A = A_1$) соответствует устойчивым автоколебаниям регулируемой системы, а правая ($A = A_2$) — неустойчивым установившимся колебаниям.

Автоколебания устанавливаются сами собой после малейшего возмущения регулируемой системы, которое практически всегда может иметь место; они поддерживаются самим регулятором. Неустойчивые колебания не могут удерживаться, но знание амплитуды A_2 все же важно, так как колебания такого рода показывают, что автомат больше не в состоянии справиться со своей задачей и привести систему к нормальному состоянию.

Если передаточное число a убывает, то, как мы уже видели в § 5, корень A_1 убывает, а корень A_2 возрастает. Получающееся при этом изменение колебательного режима должно считаться благоприятным, так как автоколебания ослабляются, а неустойчивая амплитуда A_2 отодвигается. Значение $a = a_0$, при котором c обращается в нуль, есть порог автоколебаний. Так как он остается конечным лишь в области, ограниченной положительными осями M, β и гиперболой $M\beta = 1$, то вне этой области мы уже застрахованы от автоколебаний.

§ 7. Заключительные замечания. Изложенная выше теория может быть во многих отношениях развита и дополнена.

Если желаем учесть запаздывание регулятора, связанное с функционированием реле, то вместо (2) следует написать уравнения

$$\dot{\eta} = F(\zeta), \qquad \nu\dot{\zeta} + p\zeta = \Phi\left(\varphi + \beta\dot{\varphi} - \frac{1}{a}\eta\right) \tag{48}$$

где ζ есть открытие реле, Φ—его характеристическая функция, ν и p—постоянные коэффициенты. Первое уравнение, как и раньше, характеризует движение сервомотора. Второе описывает функционирование реле и заменяет конечное соотношение $\zeta=\varphi+\beta\dot{\varphi}-\eta/a$, приняв которое мы вернулись бы к уравнению (2). Член $p\zeta$ характеризует саморегулирование, а функция Φ—воздействие чувствительных элементов и обратной связи.

Поступила в редакцию 1/IX 1942

Институт механики
Академии Наук СССР

MAINTAINED OSCILLATIONS OF AUTOMATICALLY CONTROLLED SYSTEMS

By **B. V. BULGAKOV**

(Summary)

The paper deals with steady periodic oscillations of an automatically controlled system. The theory of such oscillations is essentially connected with the non-linearity of the equations of motion and with their periodic solutions. These are found by means of Poincaré's method which is used in its special form proposed by the author for the pseudo-linear systems in a previous communication. Natural as well as artificial damping is taken into account and conditions relative to the values of the parameters of the system for which the maintained oscillations become possible are established. A report on this work was published recently in the Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'USSR.

ЛИТЕРАТУРА

1. Неподписанная серия статей, The Principles and Practice of Automatic Control, The Engineer. 1937. Vol. CLXIII. Nos. 4228—4241. [P. 94—95, 122—124, 150—151, 176—177, 201—205, 236—237, 268—269, 294—295, 322—323, 352—353, 380—382, 408—409, 438—439, 467—469].
2. Oppelt W. Vergleichende Betrachtung verschiedener Regelaufgaben hinsichtlich der geeigneten Regelgesetzmässigkeit, Luftfahrt-Forschung. 1939. Bd. 16. Lfg. 8. [S. 447 bis 472].
3. Minorsky N. Control Problems. Journal of the Franklin Institute. 1941. Vol. 232, Nos. 5, 6. [P. 451—487, 519—551].
4. Булгаков Б. В. О применении метода А. Пуанкаре к свободным псевдолинейным колебательным системам. Прикладная математика и механика. 1942. Т. VI. Вып. 4. [Стр. 263—280].