Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том VII, 1943

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ СНАРЯДА

Н. Г. ЧЕТАЕВ

(Казань)

Задача об устойчивости вращательного движения снаряда имеет существенно важное значение. От нее зависят определение наивыгоднейшей крутизны нарезки орудия, обеспечение наибольшей меткости стрельбы и расширение тактических возможностей артиллерийского орудия.

Этой задачей занимались многие исследователи. Майевский первый, применяя приближенный анализ, вывел известное, в некотором смысле необходимое, условие устойчивости вращательного движения снаряда для настильных траекторий. Последующие исследователи иными, также приближенными методами подтверждали окончательные условия устойчивости Майевского[1] и развивали их дальше для криволинейных траекторий, с чем возможно хорошо ознакомиться по интересной во многих отношениях работе А. Н. Крылова[2].

Вопрос о достаточных условиях устойчивости вращательного движения снаряда оставался открытым. Это обстоятельство объясняется трудностью решать приближенными методами задачу о достаточных условиях устойчивости движения в конечном и за ограниченное время. Мне удалось решить задачу о достаточных условиях устойчивости вращательного движения снаряда для ряда случаев методом, по своей сущности близким к методу, каким Лежен-Дирихле доказывал знаменитую теорему Лагранжа об устойчивости равновесия при максимуме силовой функции.

1. Прямолинейный полет снаряда при постоянных скорости движения его центра тяжести и угловой скорости вращения

Вначале рассмотрим случай, когда центр тяжести снаряда движется прямолинейно и равномерно. Случай этот является известным приближением для небольших участков настильных траекторий и дает возможность уяснить элементы вращательных движений снаряда.

Майевский, одним из первых изучавший эту задачу, привел ее к известному случаю Лагранжа-Пуассона движения симметричного тяжелого тела с одной закрепленной точкой предположением, что для малых отклонений оси снаряда от касательной центр давления воздуха на снаряд располагается на оси снаряда впереди его центра тяжести в некоторой постоянной точке. Действительно, центральный эллипсоид инерции снаряда является эллипсоидом вращения вокруг оси снаряда, а постоянные силы давления воздуха будут играть как бы роль веса.

Через центр тяжести снаряда проведем прямоугольные оси x_1, y_1, z_1 так, чтобы ось z_1 имела направление горизонтальной скорости полета, а ось y_1 была направлена вверх по вертикали. За подвижную систему координат x, y, z возьмем некоторые главные оси центрального эллипсоида инерции. Положение подвижной системы координат относительно системы x_1, y_1, z_1 определим углами Эйлера θ, ψ, φ, которые определяют переход от осей x_1, y_1, z_1 к осям x, y, z тремя поворотами: поворотом на угол прецессии ψ вокруг оси z_1, при котором оси x_1, y_1, z_1 переходят в оси J, $*$, z_1; поворотом на угол нутации θ вокруг оси узлов J, при котором оси J, $*$, z_1 переходят в оси J, $\dagger$, z; поворотом на угол φ вокруг оси z, при котором оси J, $\dagger$, z переходят в оси x, y, z.

Из такого кинематического определения углов Эйлера непосредственно следует, что мгновенная угловая скорость вращения снаряда состоит из трех скоростей: из скорости ψ', лежащей на оси z_1, из скорости θ', лежащей на оси узлов J, и из скорости φ', лежащей на оси z. Поэтому проекции p, q, r мгновенной угловой скорости вращения снаряда на оси x, y, z будут

$$p=\psi'\sin\theta\sin\varphi+\theta'\cos\varphi, \quad q=\psi'\sin\theta\cos\varphi-\theta'\sin\varphi, \quad r=\psi'\cos\theta+\varphi'$$

Пусть постоянный центр давления воздуха лежит на оси снаряда z в точке G, отстоящей на расстоянии ζ от центра тяжести снаряда O. Пусть сила давления воздуха есть Z. Момент инерции снаряда относительно его оси обозначим через C, а равные моменты инерции относительно осей x и y обозначим через A $(A>C)$.

В движении относительно осей x_1, y_1, z_1, движущихся равномерно и прямолинейно, действительные перемещения снаряда находятся среди его возможных перемещений, а силы давления воздуха в нашем предположении допускают силовую функцию

$$U=-Z\zeta\cos\theta$$

Поэтому в относительном движении существует закон живых сил

$$A(p^2+q^2)+Cr^2=-2Z\zeta\cos\theta+h$$

Затем в относительном движении имеет место теорема о моменте количества движения относительно оси z_1, так как среди возможных движений снаряда имеется вращение вокруг оси z_1: скорость изменения момента количества движения относительно оси z_1 равна моменту силы давления воздуха относительно оси z_1. Но сила давления воздуха, направленная против скорости полета снаряда, не имеет момента относительно оси z_1. Поэтому проекция момента количества движения снаряда на ось z_1 во все время движения должна сохранять постоянное значение

$$Ap\sin\theta\sin\varphi+Aq\sin\theta\cos\varphi+Cr\cos\theta=K$$

Третий интеграл получается из уравнения Эйлера относительно оси z, приводящегося в нашем случае к

$$\frac{dr}{dt}=0, \qquad \text{откуда} \qquad r=r_0$$

потому что моменты инерции снаряда относительно осей x, y равны между собой, а момент силы давления, проходящей через z, относительно оси z равен нулю.

Эти три первые интеграла можно записать проще:

$$p^2+q^2=\alpha-a\cos\theta, \qquad \sin\theta\,(p\sin\varphi+q\cos\varphi)=\beta-br_0\cos\theta, \qquad r=r_0$$

где постоянные α, β, a, b имеют значения:

$$\alpha=\frac{h-Cr_0^2}{A}, \qquad \beta=\frac{K}{A}, \qquad a=\frac{2Z\zeta}{A}>0, \qquad b=\frac{C}{A}>0$$

Предполагаем, что снаряд при вылете из орудия получил вращение вокруг своей оси, т. е. r_0 отлично от нуля.

Подставляя значения p, q, r в найденные интегралы, получаем уравнения для углов Эйлера

$$\sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\alpha-a\cos\theta, \qquad \sin^2\theta\frac{d\psi}{dt}=\beta-br_0\cos\theta$$

$$\frac{d\psi}{dt}\cos\theta+\frac{d\varphi}{dt}=r_0$$

Исключение производной $d\psi/dt$ из двух первых уравнений дает

$$(\beta-br_0\cos\theta)^2+\sin^2\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\sin^2\theta\,(\alpha-a\cos\theta)$$

откуда при подстановке $\cos\theta=u$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2=(\alpha-au)(1-u^2)-(\beta-br_0u)^2=f(u) \tag{1}$$

При этом два других уравнения будут

$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{\beta-br_0u}{1-u^2} \tag{2}$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=r_0-u\frac{\beta-br_0u}{1-u^2} \tag{3}$$

Полином $f(u)$ в уравнении (1) отрицателен для значений $-\infty$, -1, $+1$ для u и положителен для начального значения $u=u_0$ (так как при этом du/dt должно быть действительной величиной) и для $u=+\infty$; следовательно, три его корня u_1, u_2, u' действительны и лежат соответственно в интервалах $(-1, u_0)$, $(u_0, +1)$, $(+1, +\infty)$.

Поэтому

$$f(u)=a(u-u_1)(u-u_2)(u'-u)$$

Так как косинус имеет значения всегда между -1 и $+1$, то для нашей задачи имеет значение интервал (u_1, u_2), внутри которого только и может изменяться переменная u. Другими словами, угол θ будет колебаться между значениями $\theta_1=\arccos u_1$ и $\theta_2=\arccos u_2$, причем $\theta_1>\theta_2$.

Если вокруг центра тяжести снаряда O описать сферу единичного радиуса, то ось снаряда z будет колебаться между двумя окружностями $\theta=\theta_1$ и $\theta=\theta_2$; причем она, наверное, будет доходить до этих граничных окружностей, так как u, будучи определенной эллиптическим интегралом согласно (1), принимает значения u_1 и u_2.

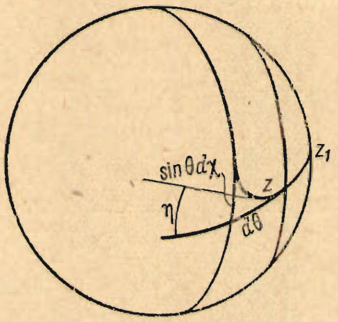
Чтобы выяснить фигуры, какие может вычерчивать на сфере след от пересечения оси снаряда z, рассмотрим угол η между меридианом z_1z и касательной к следу оси z.

Непосредственно из чертежа (фиг. 1), рассматривая бесконечно малый треугольник, образованный элементарной дугой следа z, отрезком меридиана $d\theta$ и отрезком параллели $\sin\theta d\chi$, имеем

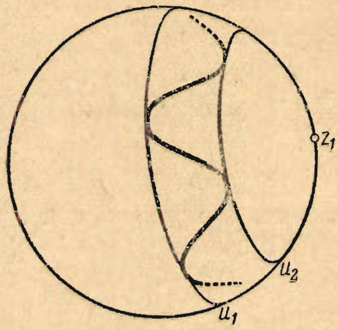
$$\operatorname{tg}\eta=\frac{\sin\theta\, d\chi}{d\theta}$$

где $\chi=\psi-\frac{1}{2}\pi$ представляет угол между осью x_1 и линией пересечения плоскостей Ozz_1 и Ox_1y_1. Исключая время dt из уравнения (1) и (2), имеем дифференциальное уравнение геометрического места следа оси z

$$d\chi=\frac{(\beta-br_0)\,du}{(1-u^2)\sqrt{f(u)}}$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Согласно этому уравнению

$$\operatorname{tg}\eta=-\frac{\beta-br_0u}{\pm\sqrt{f(u)}}$$

Угол η равен каждый раз прямому, когда u принимает одно из значений u_1 или u_2, при которых уничтожается $f(u)$. След оси z поэтому касается окружностей $u=u_1$ и $u=u_2$ всякий раз, когда при этом отличен от нуля числитель $\beta-br_0u$.

Числитель $\beta-br_0u$ обращается в нуль лишь при одном значении $u=\beta/br_0$. Числитель может обращаться в нуль либо при значении u_1, либо при значении u_2. Докажем, что это не может быть при $u=u_1$.

Действительно, при $u=\beta/br_0$ полином

$$f(u)=(\alpha-au)(1-u^2)$$

будет уничтожаться, если $\alpha-\alpha\beta/br_0=0$ при $|\beta/br_0|<1$.

Для такого значения u

$$\delta f(u)=-a(1-u^2)\delta u$$

Этому соотношению не удовлетворяет корень $u=u_1$.

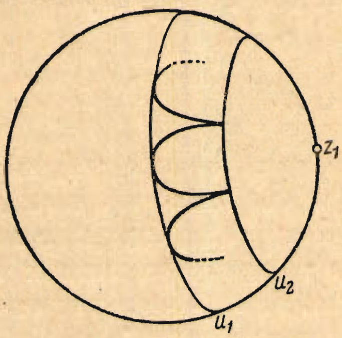
Значение $\operatorname{tg}\eta$ при $\beta-br_0u_2=0$ (раскрывается по правилу Лопиталя) есть нуль; след оси z делает при этом прямой угол с параллелью $u=u_2$.

Собирая все вместе, видим, что если значение β/br_0 лежит вне интервала (u_1, u_2), то след оси z на единичной сфере будет иметь вид, представленный на фиг. 2.

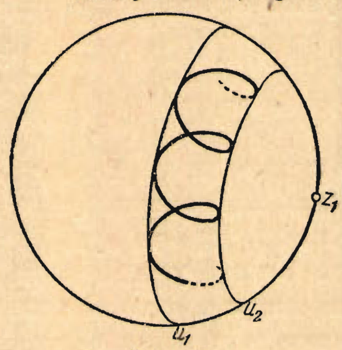
Если $\beta/br_0=u_2$, то след оси z будет чертить на единичной сфере кривую, изображенную на фиг. 3.

И, наконец, если значение β / br_0 лежит внутри интервала (u_1, u_2), то след оси z на единичной сфере будет чертить кривую вида, изображенного на фиг. 4. Петли следа будут касаться параллели u_2 и не могут касаться параллели u_1: три вида кривых связаны непрерывным изменением β / br_0; при непрерывном изменении β / br_0 кривую первого вида нельзя непрерывно деформировать в кривую третьего вида с петлями, обращенными к параллели u_1, так как при этом мы должны были бы переходить через невозможную кривую второго вида с точками возврата на параллели u_1.

Из этого анализа следует, что угол нутации θ будет иметь малые отклонения, если корни u_1 и u_2 будут близки к $+1$. Найдем условия, при которых



Фиг. 3.



Фиг. 4.

все корни полинома $f(u)$ будут больше $1-\delta$, где δ — произвольная малая величина.

С этой целью рассмотрим полином

$$F(x) = -f(1-\delta-x) = ax^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$$

где

$$a_1 = b^2r_0^2 + \alpha - 3a(1-\delta)$$

$$a_2 = 2br_0(\beta - br_0(1-\delta)) - a(2\delta-\delta^2) - 2(1-\delta)(\alpha - a(1-\delta))$$

$$a_3 = (\beta - br_0(1-\delta))^2 - (\alpha - a(1-\delta))(1-(1-\delta)^2)$$

Все корни полинома $f(u)$ будут больше $1-\delta$, когда все корни полинома $F(x)$ будут отрицательными. Условия отрицательности всех корней полинома $F(x)$ получаются согласно известной теореме Гурвица в виде неравенств

$$a_1 = b^2r_0^2 + \alpha - 3a + 3a\delta > 0$$

$$\begin{aligned} a_1a_2 - aa_3 = {} & (b^2r_0^2 + \alpha - 3a)(2br_0(\beta - br_0) - 2(\alpha - a)) - a(\beta - br_0)^2 + \\ & + \delta[2(b^2r_0^2 + \alpha - 3a)^2 + 2a(2br_0(\beta - br_0) - 2(\alpha - a))] + \\ & + \delta^2 8a(b^2r_0^2 + \alpha - 3a) + 8a^3\delta^3 > 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

$$\begin{aligned} a_3 = {} & (p - br_0)^2 + \delta(2br_0(\beta - br_0) - 2(\alpha - a)) + \\ & + \delta^2(b^2r_0^2 + \alpha - 3a) + a\delta^3 > 0 \end{aligned}$$

Это—достаточные условия для устойчивости угла нутации.

Для идеального орудия, у дульного среза которого снаряд имеет $\theta_0 = 0$ и $\theta_0' = 0$, неравенства эти удовлетворяются одновременно и независимо от δ при существовании неравенства Майевского $b^2r_0^2 - 2a > 0$.

В этом смысле условие Майевского является условием устойчивости снаряда на прямолинейной траектории в бесконечно малом.

Для реального случая, когда начальные значения переменных имеют некоторые, отличные от нуля, величины, неравенства (4) определяют величину соответствующего отклонения δ.

Для практически наиболее интересного случая $\theta_0=0$, $\theta_0'>0$ ($\theta_0'^2=\alpha-a$ и $0=\beta-br_0$) неравенства для определения δ будут

$$b^2r_0^2-2a+\theta_0'^2+3a\delta>0$$

$$-2(b^2r_0^2-2a+\theta_0'^2)\theta_0'^2+\delta[2(b^2r_0^2-2a+\theta_0'^2)-4a\theta_0'^2]+$$
$$+\delta^2 8a(b^2r_0^2-2a+\theta_0'^2)+8a^3\delta^3>0$$

$$-2\theta_0'^2+\delta(b^2r_0^2-2a+\theta_0'^2)+a\delta^2>0$$

Грубый анализ этих неравенств непосредственно дает, что первое из неравенств удовлетворяется независимо от δ, если $s=b^2r_0^2-2a>0$; а если запас устойчивости s удовлетворяет при этом еще неравенству

$$(s+\theta_0'^2)^2-4a\theta_0'^2\geqslant 0$$

то

$$\delta<\frac{2\theta_0'^2}{s+\theta_0'^2}$$

Последнее отношение целесообразно выбирать меньше предельного допуска для отклонения угла нутации; при этом при заданном допуске и начальной скорости нутации θ_0' последнее соотношение определит величину нужного запаса устойчивости s; и, наоборот, при определенных запасах устойчивости s и заданных наибольших отклонениях δ последнее отношение определяет допустимую величину начальных возмущений θ_0'.

2. Прямолинейный полет снаряда при переменной угловой скорости вращения и постоянной скорости движения его центра тяжести

Рассмотрим случай, имеющий значение для стрельбы прямой наводкой и для опытной полигонной стрельбы некоторыми реактивными снарядами, когда центр тяжести снаряда движется по прямой с известной постоянной скоростью, а вращательное движение снаряда происходит под действием опрокидывающей пары и пары, тушащей вращение.

Сохраняя прежние обозначения и предполагая момент тушащей пары $N=-C\gamma r$ (где γ представляет положительную величину, зависящую, быть может, от известной постоянной скорости движения центра тяжести), направленным по оси снаряда z, имеем дифференциальные уравнения Эйлера для вращательного движения

$$A\frac{dp}{dt}=(A-C)\,qr+Z\zeta\sin\theta\cos\varphi$$
$$A\frac{dq}{dt}=(C-A)\,rp-Z\zeta\sin\theta\sin\varphi$$
$$\frac{dr}{dt}=-\gamma r.$$

Умножая первое уравнение на p, а второе на q и складывая, имеем после интеграции

$$A(p^2+q^2)=-2Z\zeta\cos\theta+h$$

Скорость конца вектора момента количества движения равна моменту действующих сил; в проекции на ось z_1 это дает

$$\frac{d}{dt}(Ap\sin\theta\sin\varphi+Aq\sin\theta\cos\varphi+Cr\cos\theta)=-C\gamma r\cos\theta$$

или

$$Ap\sin\theta\sin\varphi+Aq\sin\theta\cos\varphi+Cr\cos\theta=\beta A-C\gamma\int_0^t r\cos\theta\,dt$$

Последнее уравнение Эйлера после интеграции дает

$$r = r_0 e^{-\gamma t}$$

Если ввести обозначения

$$\alpha = \frac{h}{A}, \qquad a = \frac{2Z\zeta}{A}, \qquad b = \frac{C}{A}$$

то последние три соотношения запишутся проще:

$$p^2 + q^2 = \alpha - a\cos\theta$$

$$\sin\theta\,(p\sin\varphi + q\cos\varphi) = \beta - br\cos\theta - b\gamma\int_0^t r\cos dt$$

$$r = r_0 e^{-\gamma t}$$

Подставляя сюда значения p, q, r в функции углов Эйлера, получим уравнения

$$\sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \alpha - a\cos\theta$$

$$\sin^2\theta\,\frac{d\psi}{dt} = \beta - br\cos\theta - b\gamma\int_0^t r\cos\theta\,dt$$

$$\frac{d\psi}{dt}\cos\theta + \frac{d\varphi}{dt} = r_0 e^{-\gamma t}$$

Исключение производной $d\psi/dt$ из двух первых уравнений дает

$$\left(\beta - br\cos\theta - b\gamma\int_0^t r\cos\theta\,dt\right)^2 + \sin^2\theta\,\frac{d\theta}{dt} = (\alpha - a\cos\theta)\sin^2\theta$$

После подстановки $u = \cos\theta$ имеем

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = (\alpha - au)(1 - u^2) - \left(\beta - br\cos\theta - b\gamma\int_0^t r\cos\theta\,dt\right)^2 = g(u) \tag{5}$$

Но

$$\beta - bru - b\gamma\int_0^t ru\,dt > \beta - bru - b\gamma\int_0^t r dt = \beta - bru + b(r - r_0)$$

Для орудия, у дульного среза которого снаряд имеет наименьший угол нутации ($\beta = br_0$),

$$\beta - bru - b\gamma\int_0^t ru\,dt > br(1 - u) \geqslant 0$$

И, следовательно, для такого орудия

$$g(u) < k(u)$$

где

$$k(u) = (\alpha - au)(1 - u^2) - b^2r^2(1 - u)^2$$

Согласно уравнению $(du/dt)^2 = g(u)$ действительным вращательным движениям снаряда на интервале $(-1, +1)$ переменной u отвечает интервал, на котором функция $g(u)$ принимает положительные значения. А это значит согласно последнему неравенству, что для любого момента времени t действительные значения переменной u находятся на интервале, где положителен полином $k(u)$.

Полином $k(u)$ отрицателен для $u = -1$, положителен для некоторого $|u| < 1$, отвечающего действительному движению снаряда, и нуль для $u = +1$. Для фиксированного t полином $k(u)$ имеет, очевидно, один корень u_1 внутри интервала $(-1, +1)$. Переменный с течением времени корень u_1 определяет интервал $(u_1, 1)$, на котором только и может для этого момента времени находиться отвечающее действительному движению снаряда значение переменной u.

Если вокруг центра тяжести снаряда O описать сферу единичного радиуса, то корень $u=u_1$ определяет параллель, отделяющую у полюса z_1 (след оси z_1) область, внутри которой только и может находиться след от пересечения сферы с осью снаряда z. С течением времени ограничивающая эту область параллель $u=u_1$ будет изменяться.

Из этого анализа следует, что угол нутации θ будет иметь тем меньшие отклонения от нулевого значения, чем ближе к $+1$ будет лежать корень u_1 за все ограниченное время полета снаряда. Отсюда легко установить условия, при которых все корни полинома $k(u)$ для всего времени выстрела будут больше $1-\delta$, где δ — малая положительная величина.

Действительно, полином

$$G(x) = -k(1-\delta-x) = ax^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$$

где

$$a_1 = b^2r^2 + \alpha - 3a(1-\delta)$$

$$a_2 = a(\delta^2 - 2\delta) - 2(1-\delta)(\alpha - a(1-\delta)) + 2b^2r^2\delta$$

$$a_3 = b^2r^2\delta^2 - (\alpha - a(1-\delta))(2\delta - \delta^2)$$

должен иметь все корни отрицательными, если все корни $k(u)$ больше $1-\delta$. Условия отрицательности всех корней полинома $G(x)$ выражаются согласно известной теореме Гурвица в виде неравенств

$$a_1 = b^2r^2 + \alpha - 3a + 3a\delta > 0$$

$$\begin{aligned} a_1a_2 - aa_3 = & -2(\alpha - a)(b^2r^2 + \alpha - 3a) + \delta[2(b^2r^2 + \alpha - 3a) - 4(\alpha - a)a] + \\ & + \delta^2[9a(b^2r^2 + a - 3a) - \alpha(b^2r^2 - 2a)] + a\delta^3 > 0 \end{aligned} \tag{6}$$

$$a_3 = -2\delta(\alpha - a) + \delta^2(b^2r^2 + \alpha - 3a) + a\delta^3 > 0$$

Для определения δ в практически наиболее интересном случае $\theta_0 = 0$ и $\theta_0' > 0$, для которого, очевидно, $\alpha - a = \theta_0'^2$, имеем отсюда неравенства

$$b^2r^2 - 2a + \theta_0'^2 + 3a\delta > 0$$

$$\begin{aligned} -2\theta_0'^2(b^2r^2 - 2a + \theta_0'^2) + \delta[2(b^2r^2 - 2a + \theta_0'^2)^2 - 4\theta_0'^2a] + \\ + \delta^2[8a(b^2r^2 - 2a) + 9a\theta_0'^2] + a\delta^3 > 0 \end{aligned} \tag{7}$$

$$-2\theta_0'^2 + \delta(b^2r^2 + \alpha - 3a) + a\delta^3 > 0$$

Согласно последнему из неравенств малые отклонения угла нутации возможны лишь при соблюдении неравенства

$$b^2r^2 - 2a + \theta_0'^2 > 0$$

если запас устойчивости $s = b^2r^2 - 2a$ дополнительно удовлетворяет неравенству

$$(s + \theta_0'^2)^2 - 4a\theta_0'^2 > 0$$

то

$$\delta < \frac{2\theta_0'^2}{s}$$

При заданном допуске для отклонения угла нутации и заданной величине начального возмущения θ_0' последнее соотношение определяет необходимую величину запаса устойчивости s. Чем больше s, тем меньше величина последнего отношения при фиксированном значении θ_0'. А при заданных s и δ последнее отношение определяет допустимое начальное возмущение снаряда θ_0'.

Необходимо заметить, что последнее неравенство отнюдь не говорит, что наибольшее отклонение будет достигать указанной границы, так как достаточные условия устойчивости добыты методом мажорант.

3. Прямолинейный полет снаряда при переменных скорости движения центра тяжести и угловой скорости вращения

Рассмотрим случай: центр тяжести снаряда движется с известной переменной скоростью, а вращательное движение снаряда происходит под действием опрокидывающей и тушащей пары, для которых Z и γ зависят от переменной скорости движения центра тяжести снаряда или в конечном итоге от t.

Сохраняя прежние обозначения, имеем основные исходные соотношения в этом случае в виде

$$p^2+q^2=\alpha-a\cos\theta+\int_0^t \frac{da}{dt}\cos\theta\,dt$$

$$\sin\theta\,(p\sin\varphi+q\cos\varphi)=\beta-br\cos\theta-b\int_0^t \gamma r\cos\theta\,dt$$

$$r=r_0\exp\left(-\int_0^t\gamma\,dt\right)$$

где α, β — постоянные интегрирования, а

$$a=\frac{2Z\zeta}{A},\qquad b=\frac{C}{A}$$

Подставляя в два первые соотношения значения p, q, r в функции углов Эйлера, получим уравнения

$$\sin^2\theta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\alpha-\cos\theta+\int_0^t\frac{da}{dt}\cos\theta\,dt$$

$$\sin^2\theta\,\frac{d\psi}{dt}=\beta-br\cos\theta-b\int_0^t\gamma r\cos\theta\,dt$$

Исключение производной $d\psi/dt$ из этих уравнений дает после подстановки $u=\cos\theta$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2=\left(\alpha-au+\int_0^t\frac{da}{dt}u\,dt\right)(1-u^2)-\left(\beta-bru-b\int_0^t\gamma ru\,dt\right)^2=f(u)$$

Для снаряда, который у дульного среза орудия имеет наименьший угол нутации $u_0=1$ и который движется с уменьшающейся скоростью центра тяжести $da/dt<0$, имеем

$$\alpha-au+\int_0^t\frac{da}{dt}\,u\,dt<\alpha-au+u_{\min}\,(a-a_0)$$

$$\beta-bru-b\int_0^t\gamma r\,u\,dt>br\,(1-u)\geqslant 0$$

Следовательно,

$$f(u) < l(u), \quad \text{где} \quad l(u) = (\alpha - au + u_{\min}(a - a_0))(1 - u^2) - b^2r^2(1 - u)^2$$

Согласно уравнению $(du/dt)^2 = f(u)$ действительным вращательным движениям снаряда на интервале $(-1, +1)$ переменной u отвечает отрезок, на котором функция $f(u)$ положительна. А согласно последнему неравенству это означает, что для любого t действительные значения u должны находиться на отрезке интервала $(-1, +1)$, где полином $l(u)$ положителен.

Полином $l(u)$ отрицателен для $u = -1$, положителен для некоторого $|u| < 1$, отвечающего действительному движению снаряда, и нуль для $u = +1$. Для фиксированного t полином имеет, очевидно, один корень u_1 внутри интервала $(-1, +1)$. На переменном снизу с течением времени интервале $(u_1, 1)$ только и может находиться отвечающее действительному движению снаряда значение переменной u.

Следовательно, угол нутации θ будет иметь тем меньшее отклонение от нулевого значения, чем ближе к $+1$ будет лежать корень u_1 за все ограниченное время полета снаряда. Отсюда легко установить условия, при которых все корни полинома $l(u)$ для всего времени выстрела будут больше $1-\delta$, где δ — малая положительная величина. В этом случае $u_{\min} = 1 - \delta$.

Действительно, полином

$$L(x) = -l(1 - \delta - x) = ax^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$$

где

$$a_1 = b^2r^2 + \alpha - a_0 - 2a + \delta(2a + a_0)$$
$$a_2 = -2(\alpha - a_0) + 2\delta(b^2r^2 + \alpha - a_0 - (a + a_0)) + a\delta^2$$
$$a_3 = -2\delta(\alpha - a_0) + \delta^2(b^2r^2 + \alpha - a_0 - 2a_0) + a\delta^3$$

должен иметь все корни отрицательными, если все корни $l(u)$ больше $1-\delta$. Условия отрицательности корней полинома $L(x)$ просто находятся согласно теореме Гурвица в виде неравенств

$$\begin{gathered}
a_1 = b^2r^2 + \alpha - a_0 - 2a + \delta(2a + a_0) > 0 \\
a_1a_2 - aa_3 = -2(\alpha - a)(b^2r^2 + \alpha - a_0 - 2a) + \\
+ \delta[2(b^2r^3 + \alpha - a_0 + 2a)(b^2r^2 + \alpha - 2a_0 - a) - 2(\alpha - a_0)(a + a_0)] + \\
+ \delta^2[2(2a + a_0)(b^2r^2 + \alpha - 2a_0 - a) - 2(a^2 - a_0^2)] + 2a\delta^3 > 0 \\
a_3 = -2\delta(\alpha - a_0) + \delta^2(b^2r^2 + \alpha - a_0 - 2a_0) + a_0\delta^3 > 0
\end{gathered} \tag{8}$$

Для практически интересного случая начальных возмущений $\theta_0 = 0$, $\theta_0' > 0$ (откуда $\alpha - a_0 = \theta_0'^2$) малые отклонения угла нутации согласно последнему из неравенств возможны лишь при условии

$$b^2r^2 - 2a_0 + \theta_0'^2 > 0$$

Первое из неравенств будет удовлетворяться независимо от δ, если

$$b^2r^2 - 2a + \theta_0' > 0$$

Второе из неравенств будет удовлетворено, если

$$(b^2r^2 - 2a + \theta_0'^2)(b^2r^2 - 2a_0 + \theta_0'^2) + 2(a_0 - a)(b^2r^2 - 2a + \theta_0'^2) - 2(a + a_0)\theta_0'^2 \geqslant 0$$

когда $a_0 > a$, так как при этом коэффициенты при δ^2 и δ^3 во втором из неравенств положительны. Этих неравенств достаточно для того, чтобы

$$\delta < \frac{2\theta_0'^2}{b^2r^2 - 2a_0 + \theta_0'^2}$$

Когда $a_0 < a$, для удовлетворения второго из неравенств достаточно, чтобы сумма трех его первых членов с δ^2 включительно была неотрицательной.

4. Криволинейный полет снаряда при переменных скорости движения центра тяжести и угловой скорости вращения

Вообразим случай: центр тяжести снаряда движется с известной переменной скоростью по некоторой плоской криволинейной траектории, а вращательное движение создается опрокидывающей и тушащей парой, характеристичные величины Z и γ которых зависят от переменной скорости центра тяжести или, в конечном счете, известным образом от времени t.

Движения снаряда условимся относить к главным осям центрального эллипсоида инерции, выбирая за ось z ось снаряда. За оси x_1, y_1, z_1 будем выбирать естественные оси подвижного триэдра: z_1 — по касательной к траектории, y_1 — по главной нормали в сторону выпуклости траектории, а x_1 — по бинормали. Через центр снаряда O будем проводить в плоскости, параллельной плоскости стрельбы, ось ζ — горизонтально в направлении на цель и ось η — вертикально вверх. Угол между осями ζ и z_1 обозначим через χ.

В остальном сохраним обозначения прежних параграфов.

Мгновенная угловая скорость снаряда увеличится на скорость χ', направленную по оси x_1. Поэтому проекции p, q, r мгновенной угловой скорости вращения на подвижные оси координат x, y, z будут

$$\begin{aligned}
p &= \psi' \sin\theta \sin\varphi + \theta' \cos\varphi + \chi' (\cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \cos\theta) \\
q &= \psi' \sin\theta \cos\varphi = \theta' \sin\varphi + \chi' (-\sin\varphi \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi \cos\theta) \\
r &= \psi' \cos\theta + \varphi' + \chi' \sin\psi \sin\theta
\end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned}
\cos(x, x_1) &= \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \cos\theta \\
\cos(y, x_1) &= -\sin\varphi \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi \cos\theta \\
\cos(z, x_1) &= \sin\psi \sin\theta
\end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения вращательного движения снаряда в подвижной системе координат могут быть записаны в известной форме Эйлера

$$\begin{aligned}
A \frac{dp}{dt} &= (A - C)\, qr + Z\zeta \sin\theta \cos\varphi \\
A \frac{dq}{dt} &= (C - A)\, rp - Z\zeta \sin\theta \sin\varphi \qquad (9) \\
\frac{dr}{dt} &= -\gamma r
\end{aligned}$$

Умножая первое уравнение на p, а второе на q и складывая, имеем после интеграции

$$A (p^2 + q^2) = h + 2 \int_0^t Z\zeta \sin\theta (p \cos\varphi - q \sin\varphi)\, dt$$

Абсолютная скорость конца вектора момента количества движения равна моменту действующих сил. Проекция абсолютной скорости конца вектора момента количества движения на касательную к траектории z_1 состоит из проекции относительной скорости $d\sigma_{z_1}/dt$ и из проекции переносной скорости $\chi'\sigma_{y_1}$ (если через σ_{x_1}, σ_{y_1}, σ_{z_1} обозначить проекции момента количества движения соответственно на оси x_1, y_1, z_1), так как система осей x_1, y_1, z_1 имеет одно вращение χ' вокруг оси x_1. Проекция результирующего момента действующих пар на ось z_1 есть $-C\gamma r\cos\theta$.

Следовательно,

$$\frac{d\sigma_{z_1}}{dt}+\chi'\sigma_{y_1}=-C\gamma r\cos\theta$$

Величина σ_{z_1} определяется соотношением

$$\sigma_{z_1}=A\sin\theta\,(p\sin\varphi+q\cos\varphi)+Cr\cos\theta$$

так как

$$\cos(xz_1)=\sin\theta\sin\varphi, \qquad \cos(yz_1)=\sin\theta\cos\varphi, \qquad \cos(zz_1)=\cos\theta$$

Проекция σ_{y_1} определяется соотношением

$$\sigma_{y_1}=A\,[\sin\psi\,(p\cos\varphi-q\sin\varphi)+\cos\psi\cos\theta\,(p\sin\varphi-q\cos\varphi)]-Cr\cos\psi\sin\theta$$

так как

$$\cos(x,y_1)=\cos\varphi\sin\psi+\sin\varphi\cos\psi\cos\theta$$

$$\cos(y,y_1)=-\sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi\cos\theta$$

$$\cos(z,y_1)=-\cos\psi\sin\theta$$

Интегрируя последнее уравнение, имеем

$$A\sin\theta\,(p\sin\varphi+q\cos\varphi)=k-Cr\cos\theta-C\int_0^t\gamma r\cos\theta\,dt-\int_0^t\chi'\sigma_{y_1}\,dt$$

Последнее из уравнений Эйлера после интеграции непосредственно дает

$$r=r_0\exp\left(-\int_0^t\gamma\,dt\right)$$

Если ввести обозначения $a=\frac{2Z_0}{A}$, $b=\frac{C}{A}$, то последние три интегральные соотношения возможно записать проще:

$$p^2+q^2=c+\int_0^t a\sin\theta\,(p\cos\varphi-q\sin\varphi)\,dt$$

$$\sin\theta\,(p\sin\varphi+q\cos\varphi)=\beta-br\cos\theta-b\int_0^t\gamma r\cos\theta\,dt-\int_0^t\chi'\eta\,dt$$

$$r=r_0\exp\left(-\int_0^t\gamma\,dt\right)$$

где

$$\eta=\sin\psi\,(p\cos\varphi-q\sin\varphi)+\cos\psi\cos\theta\,(p\sin\varphi+q\cos\varphi)-br\cos\psi\sin\theta$$

Подставляя сюда выражения p, q, r в функции углов Эйлера, получим

$$\left[\frac{d\psi}{dt}\sin\theta-\frac{d\chi}{dt}\sin\psi\cos\theta\right]^2+\left[\frac{d\theta}{dt}+\frac{d\chi}{dt}\cos\psi\right]^2=\alpha-a\cos\theta+$$

$$+\int_0^t\frac{da}{dt}\cos\theta\,dt+\int_0^t a\chi'\sin\theta\cos\psi\,dt$$

$$\sin\theta\left[\frac{d\psi}{dt}\sin\theta-\frac{d\chi}{dt}\sin\psi\cos\theta\right]=\beta-br\cos\theta-b\int_0^t\gamma r\cos\theta\,dt-\int_0^t\chi'\eta\,dt$$

$$\frac{d\psi}{dt}\cos\theta+\frac{d\varphi}{dt}+\frac{d\chi}{dt}\sin\varphi\sin\theta=r_0\exp\left(-\int_0^t\gamma\,dt\right)$$

Здесь α, β, r_0 — постоянные интегрирования, а

$$\eta=\sin\psi(\theta'+\chi'\cos\psi)+\cos\psi\cos\theta\,(\psi'\sin\theta-\chi'\sin\psi\cos\theta)-br\cos\psi\sin\theta$$

Из двух первых уравнений после подстановки $u=\cos\theta$ получаем

$$\sin^2\theta\left[\frac{d\theta}{dt}+\frac{d\chi}{dt}\cos\psi\right]^2=\left(\alpha-au+\int_0^t\frac{da}{dt}u\,dt+\int_0^t a\sin\theta\cos\psi\,\chi'\,dt\right)(1-u^2)-$$

$$-\left(\beta-bru-b\int_0^t r\gamma u\,dt-\int_0^t\chi'\eta\,dt\right)^2=f \tag{10}$$

Согласно этому соотношению действительным вращательным движениям снаряда могут отвечать лишь такие значения переменных углов Эйлера, для которых функция f является положительной. Функция f отрицательна или нуль для значений $+1$, -1 переменной u и положительна для действительного вращения, для которого u лежит на интервале $(-1, +1)$. Следовательно, функция f определяет собой на интервале $(-1, +1)$ переменной u некоторую область возможных изменений. Задача устойчивости состоит в том, чтобы выяснить условия, достаточные для того, чтобы эта область была внутри интервала $(1-\delta, 1)$, где δ—некоторая малая положительная постоянная.

5. Воображаемый случай: центр тяжести снаряда движется с постоянной скоростью по окружности

Вообразим случай, — центр тяжести снаряда движется с постоянной скоростью по вертикальной окружности при отсутствии момента, тушащего вращение.

В этом случае ($\chi'=\text{const}>0$, $a=\text{const}$, $\gamma=0$) дифференциальные уравнения вращательного движения снаряда (9) имеют некоторое установившееся решение

$$\theta=\theta_0, \qquad \psi=\text{const}, \qquad \varphi'=\text{const}$$

Для такого решения

$$p=\chi'\,(\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\cos\theta_0)$$
$$q=\chi'\,(-\sin\varphi\cos\psi-\cos\varphi\sin\psi\cos\theta_0)$$
$$r=\varphi'+\chi'\sin\psi\sin\theta_0$$

Выражение для r непосредственно удовлетворяет последнему из уравнений Эйлера. Два первых уравнения движения дают при этом

$$[(A-C)\,r-A\varphi']\,\chi'\,(-\sin\varphi\cos\psi-\cos\varphi\sin\psi\cos\theta_0)+Z\zeta\sin\theta_0\cos\varphi=0$$
$$[(C-A)\,r+A\varphi']\,\chi'\,(\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\cos\theta_0)-Z\zeta\sin\theta_0\sin\varphi=0$$

Эти соотношения равносильны двум уравнениям:

$$[(A-C)\,r-A\varphi']\,\chi'\cos\psi=0$$
$$-[(A-C)\,r-A\varphi']\,\chi'\sin\psi\cos\theta_0+Z\zeta\sin\theta_0=0 \tag{11}$$

Выражение

$$(A-C)\,r-A\varphi'=-Cr+A\chi'\sin\theta_0\sin\psi$$

для практически важных случаев всегда отрицательно при $r>0$. Поэтому в таких случаях для установившегося решения должно быть при $\theta_0<\frac{1}{2}\pi$

$$\psi=\tfrac{3}{2}\pi$$

Значение θ_0 определяется согласно (11) из уравнения

$$\chi'\,(-Cr-A\chi'\sin\theta_0)\cos\theta_0+Z\zeta\sin\theta_0=0 \tag{12}$$

которое имеет по крайней мере один корень для θ_0 на интервале $(0, \frac{1}{2}\pi)$, в чем можно убедиться подстановкой концов этого интервала в левую часть уравнения.

В установившемся решении ось снаряда будет отклонена влево от касательной к окружности ($\psi=\frac{3}{2}\pi$) на определенный угол θ_0.

Для движений снаряда по окружности при $a=\text{const}$ и $\gamma=0$ функция f в соотношении (10) имеет вид

$$f=\left(\alpha-au+a\chi'\int_0^t\sin\theta\cos\psi\,dt\right)(1-u^2)-\left(\beta-bru-\chi'\int_0^t\eta\,dt\right)^2$$

Функция эта, очевидно, обращается в нуль для установившегося движения снаряда по окружности. Для возмущенных движений, у которых в начальный момент $\theta=\theta_0$, $\theta'=0$ и угол прецессии сохраняется невозмущенным, функция f имеет вид

$$f^*=(\alpha-au)(1-u^2)-(\beta-bru+\chi'(\arccos u-\arccos u_0))^2$$

где

$$\alpha=au_0+\chi'^2u_0^2 \qquad \text{и} \qquad \beta=bru_0+\chi'u_0\sqrt{1-u_0}$$

Функция f^* обращается в нуль при $u=u_0$. А так как производная

$$\frac{\partial f^*}{\partial u}=-a(1-u^2)-2u(\alpha-au)+$$
$$+2(\beta-bru+\chi'(\arccos u-\arccos u_0))\left(br+\frac{\chi'}{\sqrt{1-u^2}}\right)$$

уничтожается при $u=u_0$, то корень $u=u_0$ функции f^* будет второй кратности. Это обстоятельство доказывает устойчивость в бесконечно малом невозмущенного, установившегося движения снаряда, в чем можно убедиться другим путем.

В возмущенном движении угол нутации θ будет иметь малые отклонения от значения θ_0, если кратный корень u_0 функции f^* расщепится для возмущенного движения на корни u_1 и u_2, лежащие на $(-1, +1)$ близко к u_0. Пусть u не больше u_0, тогда

$$f^*<(\alpha-au)(1-u^2)-(\beta-bru)^2=k(u)$$

Неравенство это становится равенством на $(-1, u_0)$ лишь при $u=u_0$.

Полином $k(u)$ уничтожается при $u=u_0$; следовательно, наименьший из корней полинома $k(u)$ не больше наименьшего корня $f^*(u)$.

Условия, при которых все корни полинома $k(u)$, а тем самым и корни функции $f^*(u)$ будут больше $u_0-\delta$, где δ — некоторая малая положительная величина, определяются, как в $n^\circ 1$; лишь α и β имеют указанную здесь величину.

Следует отметить, что выводы сделаны в предположении, что в возмущенном движении угол прецессии ψ остается невозмущенным.

Уравнение (12) дает для определения u_0 уравнение

$$l(u) = (Z\zeta - A\chi'^2 u)^2 (1-u^2) - C^2 r^2 \chi'^2 u^2 = 0 \tag{13}$$

Полином $l(u)$ имеет по одному корню в интервалах $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, +1)$, $(+1, +\infty)$. Нас интересует корень u_0 на интервале $(0, +1)$. Если через u^* обозначить предельное значение переменной u, при котором снаряд не переворачивается при возможных возмущениях, то условие непереворачиваемости имеет вид

$$(Z\zeta - A\chi'^2 u^*)^2 (1-u^{*2}) - C^2 r^2 \chi' u^{*2} > 0 \tag{14}$$

6. Криволинейный полет

Случай криволинейной траектории снаряда, когда отсутствуют тушащие моменты, а центр тяжести снаряда движется с постоянной скоростью, возможно рассмотреть методом мажорант функции f. Отсутствие достаточных опытных данных не позволяет выбрать из мажорант функции f наиболее приемлемую, поэтому разумно этот прием сейчас оставить.

Приближенный анализ условий устойчивости путем рассмотрения малых участков траектории за дуги соответствующих кругов кривизны удобен для определения необходимых условий устойчивости.

При этих замечаниях вопрос о достаточных условиях устойчивости вращательного движения снаряда на криволинейной траектории возможно разрешить непосредственно.

Пусть θ^* представляет определенное значение угла θ, которое не должно быть достигнуто вращающимся снарядом во время его действительного полета ни для какого момента времени t. Это значение θ^*, наверное, не будет достигаться, если за интересующий момент времени для возможных движений снаряда всегда будет $f(\cos\theta^*, \ldots) < 0$.

Чтобы пояснить мысль, начну с простого случая прямолинейного движения. Если начальные условия возмущенных движений суть

$$\theta_0 = 0, \qquad \theta_0' > 0$$

то указанное условие $(\alpha - au^*)(1-u^{*2}) - (\beta - br_0 u^*)^2 < 0$ после подстановки вместо α и β их значений $\alpha = a + \theta_0'^2$, $\beta = br_0$ приводит к неравенству

$$[a(1-u^*) + \theta_0'^2]\,\frac{1+u^*}{1-u^*} < b^2 r^2$$

которое представляет собой достаточное условие устойчивости снаряда, движущегося равномерно и прямолинейно при $\theta_0 = 0$, $\theta_0' > 0$.

Если начальные значения θ_0 и θ_0' для возмущенных движений снаряда могут быть отличными от нуля, то, подставляя в указанное неравенство явные значения

$$\alpha = au_0 + p_0^2 + q_0^2, \qquad \beta = br_0 u_0 + (p_0 \sin\varphi_0 + q_0 \cos\varphi_0)\sqrt{1-u_0^2}$$

будем иметь

$$[\alpha(u_0 - u^*) + p_0^2 + q_0^2](1-u^{*2}) <$$
$$< [br_0(u_0 - u^*) + (p_0 \sin\varphi_0 + q_0\cos\varphi_0)\sqrt{1-u_0^2}]^2$$

При этом должно быть

$$u_0 > u^*$$

Для случая криволинейной траектории условие нахождения θ_0 в области неперескакиваемого барьера $f < 0$ выражается неравенством

$$\left[a(u_0 - u^*) + p_0^2 + q_0^2 + \int_0^t a \sin\theta \cos\psi \, dt \right] (1 - u^{*2}) <$$

$$< \left[br(u_0 - u^*) + (p_0 \sin\varphi_0 + q_0 \cos\varphi_0) \sin\theta_0 - \int_0^t \chi' \eta \, dt \right]^2$$

где

$$\eta = \sin\psi(\theta' + \chi' \cos\psi) + \cos\psi \cos\theta (\psi' \sin\varphi - \chi' \sin\psi \cos\theta) - br \cos\psi \sin\theta$$

Для интересующего артиллерию случая

$$u_0 < u^*$$

В начале выстрела $t = 0$, когда интегралы уничтожаются, неравенство должно выполняться в своих постоянных членах. С течением времени при $\cos\psi < 0$ интеграл правой части уменьшается (по меньшей мере относительно) при увеличении угловой скорости вращения снаряда $r > 0$. Следовательно, неравенство может ограничивать r не только снизу, но и сверху.

Поступила в редакцию 25/I 1943

Институт механики
Академии Наук СССР

CONCERNING THE SUFFICIENT CONDITIONS OF THE STABILITY OF A ROTATING MOTION OF A PROJECTILE

N. G. ČETAJEV

(Summary)

The author uses a method closely related to that by which Dirichlet had proved the well known Lagrange theorem on the stability of equilibrium at a maximum force function.

In chapters 1, 2, 3 the problem stated in the title of this paper is treated for the rectilinear movement of a projectile for the three following cases correspondingly:

1. The velocity of movement of the centre of gravity and the angular velocity of rotation are constant.

2. The velocity of the centre of gravity is constant and the angular velocity of rotation is variable.

3. Both the velocity of centre of gravity and the angular velocity are variable.

In chapter 4 the curvilinear movement of a projectile with the given variable velocity of its centre of gravity and with a variable angular velocity of rotation is discussed.

In chapter 5 is considered as an illustrating example the imaginary case of the movement of a projectile along a circle with the constant velocity.

In chapter 6 the author deals again with curvilinear movement using more general assumptions.

ЛИТЕРАТУРА

1. Майевский Н. В. О влиянии вращательного движения на полет продолговатых снарядов в воздухе. Санкт-Петербург, 1865.
2. Крылов А. Н. О вращательном движении продолговатого снаряда во время полета. Ленинград, 1929.