

З А М Е Т К И

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ТЕОРИИ КОРАБЛЯ

Н. П. НЕРОНОВ

(Ленинград)

В теории корабля применяются некоторые приближенные формулы в случае поперечных наклонов плавающего тела при условии достаточной малости последних. Целью настоящей заметки является указание точного решения вопроса и вытекающей отсюда аналитической оценки погрешности применяемых приближенных формул. В курсах теории корабля эта оценка обычно производится практически, т. е. на частных примерах с числовыми данными, характеризующими тот или другой тип судна.

Вначале в § 1, 2 рассматривается в качестве введения, необходимого для решения поставленной задачи, общий вопрос об определении положений равновесия плавающего тела. Далее в § 3, 4 производится оценка погрешности упомянутых выше приближенных формул. Наконец, содержание § 5 посвящено численному примеру.

§ 1. Общие условия равновесия

Тело A , плавающее в однородной несжимаемой жидкости, ограниченной горизонтальной поверхностью P , находится в состоянии равновесия (фиг. 1). Пусть будет $G(x_g, y_g, z_g)$ центр тяжести тела A , причем прямоугольные координаты точки G предполагаются данными. Проведем через начало координат плоскость $ВОК$, параллельную P и пересекающую координатные плоскости по линиям OB и OK :

Будем характеризовать положение плоскости P углами φ и θ , которые прямые OB и OK образуют с координатными осями x и y . Легко показать, что эти углы связаны с углами Эйлера Φ (угол вращения), Ψ (угол прецессии) и Θ (угол нутации) следующими формулами:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\sin \Psi \operatorname{tg} \theta, \quad \operatorname{tg} \theta = \cos \Psi \operatorname{tg} \theta \quad (1.1)$$

Обозначим через $C(x_c, y_c, z_c)$ центр водоизмещения, т. е. центр тяжести объема, вытесненного в жидкости плавающим телом.

Назовем геометрическое место точек C при различных положениях плоскости P , отсекающей от тела A один и тот же объем, поверхностью (C) . Пусть

$$x_c = f_1(\varphi, \theta), \quad y_c = f_2(\varphi, \theta), \quad z_c = f_3(\varphi, \theta) \quad (1.2)$$

параметрические уравнения этой поверхности. Последнее после исключения параметров φ, θ можно также представить в форме

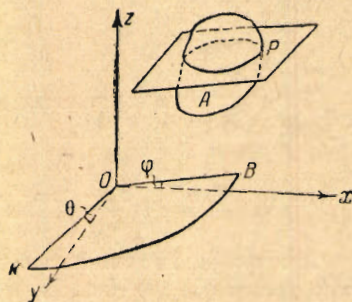
$$z_c = f(x_c, y_c) \quad (1.3)$$

В силу второй теоремы Эйлера-Дюпена^[1] касательная плоскость к поверхности (C) параллельна плоскости соответствующей грузовой ватерлинии. Отсюда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\partial z_c}{\partial x_c}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{\partial z_c}{\partial y_c} \quad (1.4)$$

Как известно, для равновесия плавающего тела необходимо и достаточно выполнение условий:

- 1) вес тела должен быть равен весу вытесненной жидкости,
- 2) линия CG должна быть вертикальной, т. е. перпендикулярной к плоскости P .



Фиг. 1.

Второе условие дает систему уравнений

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{y_c - y_g}{z_c - z_g}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{x_c - x_g}{z_c - z_g} \quad (1.5)$$

определяющую углы θ и φ для положения равновесия тела A .

В общем случае задача допускает несколько решений. Некоторые из найденных положений равновесия могут оказаться неустойчивыми.

Если уравнения (1.5) применяются к судну с жидким грузом, то координаты центра тяжести x_g, y_g, z_g будут некоторыми функциями углов θ и φ .

§ 2. Случай цилиндрического плавающего тела

Возьмем начало координат совпадающим с положением C_0 центра водоизмещения, когда соответствующая плоскость P_0 перпендикулярна к образующим цилиндра. Ось z направим параллельно этим образующим, а оси x и y параллельно главным центральным осям инерции прямого сечения цилиндра.

Уравнение поверхности (C) будет иметь вид

$$x_c = R_0 \operatorname{tg} \varphi, \quad y_c = r_0 \operatorname{tg} \theta, \quad z_c = \frac{1}{2} r_0 \operatorname{tg}^2 \theta + \frac{1}{2} R_0 \operatorname{tg}^2 \varphi \quad (2.1)$$

где через r_0 и R_0 обозначены главные метацентрические радиусы для точки C_0 , т. е. радиусы кривизны главных нормальных сечений поверхности (C) в этой точке. Мы получили уравнение эллиптического параболоида^[2].

Подставляем значения x_c, y_c, z_c в уравнения (1.5), которые представятся в виде

$$\frac{x_c - x_g}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{y_c - y_g}{\operatorname{tg} \theta} = z_g - z_c = a \quad (2.2)$$

Уравнения (2.2) определяют неизвестные углы θ и φ функции вспомогательной величины a

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y_g}{r_0 - a}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{x_g}{R_0 - a} \quad (2.3)$$

Для нахождения величины a вносим полученное значение $\operatorname{tg} \theta$ и $\operatorname{tg} \varphi$ в последнее из уравнений (2.1)

$$z_g - a = \frac{1}{2} r_0 \left(\frac{y_g}{r_0 - a} \right)^2 + \frac{1}{2} R_0 \left(\frac{x_g}{R_0 - a} \right)^2 \quad (2.4)$$

Таким образом величина a определяется как корень написанного выше алгебраического уравнения 5-й степени и является одновременно функцией параметров x_g и y_g , т. е. поперечные и продольные наклоны плавающего тела перестают быть независимыми друг от друга, что имеет место для бесконечно малых наклонов.

§ 3. Случай плоских наклонов плавающего тела, имеющего плоскость симметрии и ограниченного линейчатой поверхностью

Предположим, что поверхность плавающего тела имеет плоскость симметрии. Будем проводить плоскости P параллельно некоторой прямой (направление оси наклонов), лежащей в плоскости симметрии. Плоскость, перпендикулярную этой прямой, назовем плоскостью наклонов. Наконец, полагаем, что поверхность, ограничивающая тело или по крайней мере часть ее вблизи начальной ватерлинии, является линейчатой: именно прямые линии получаются от пересечения этой поверхности плоскостями, перпендикулярными оси наклонов¹.

¹ Поверхность значительного числа судов на некотором протяжении может считаться удовлетворяющей этому условию.

Возьмем (фиг. 2) начало координат в положении центра водоизмещения C_0 , когда соответствующая плоскость P_0 перпендикулярна плоскости симметрии плавающего тела, а центр водоизмещения, очевидно, находится в этой плоскости. Примем плоскость симметрии за координатную плоскость xz и проведем ось x параллельно оси наклонений.

Пусть уравнение линейчатой поверхности представляется в виде

$$y = (z - z_0) F_1(x) + F_2(x) \quad (3.1)$$

где z_0 обозначает отстояние точки C_0 от плоскости P_0 . Пересечение этой поверхности плоскостями, перпендикулярными оси x , дает прямую линию. Полагаем

$$F_1(x) = \operatorname{tg} \alpha, \quad F_2(x) = y_0 \quad (3.2)$$

где α обозначает угол между осью z и прямой линией сечения поверхности плавающего тела плоскостью наклонений; через y_0 обозначена координата начальной ватерлинии (фиг. 2).

В разбираемом случае, когда ось наклонений сохраняет неизменное направление, центр водоизмещения опишет некоторую кривую, уравнение проекции которой на плоскость наклонения yz представится в виде

$$y_c = r_0 \theta + \frac{1}{6} (2F - r_0) \theta^3 + \dots, \quad z_c = \frac{1}{2} r_0 \theta + \dots \quad (3.3)$$

Правые части последних уравнений суть целые относительно θ ряды^[3]. Из них ряд, представляющий y_c , оказывается четной функцией θ , а ряд для z_c — нечетной. После нас подобные разложения и некоторые их приложения рассматривал также *E. G. Barillon*^[4].

Если воспользоваться рядом

$$\theta = \operatorname{tg} \theta - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \theta + \dots$$

уравнения (3.3) могут быть заменены следующими:

$$y_c = r_0 \operatorname{tg} \theta + \frac{1}{6} (2F - 3r_0) \operatorname{tg}^3 \theta + \dots, \quad z_c = \frac{1}{2} r_0 \operatorname{tg}^3 \theta + \dots \quad (3.4)$$

В уравнениях (3.3) и (3.4) введены обозначения

$$F = \frac{3}{2} r_0 + \frac{4E}{V} - \frac{6D^2}{SV}, \quad D = \int_{x_1}^{x_2} y_0^2 \operatorname{tg} \alpha \, dx, \quad E = \int_x^{x_1} y_0^3 \operatorname{tg}^2 \alpha \, dx \quad (3.5)$$

Здесь $r_0 = J/V$ обозначает начальную величину малого метacentрического радиуса, V — объем плавающего тела, отсекаемый плоскостями P , причем S — площадь сечения тела плоскостью P_0 и J — момент инерции площади этого сечения относительно оси, проходящей через его центр тяжести и параллельной оси наклонений.

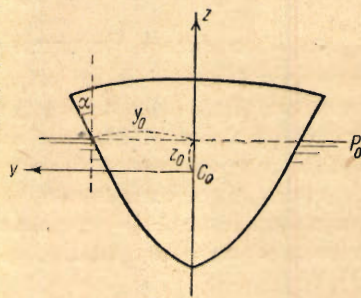
Интегралы, обозначенные через D и E , распространены на длину начальной ватерлинии. Если поверхность плавающего тела задана не уравнением, а графически (случай судна) они могут быть вычислены с тем или иным приближением по одной из формул механических квадратур.

Для призматического плавающего тела с трапециевидальным поперечным сечением $y_0 = \operatorname{const}$, $\alpha = \operatorname{const}$ разложения (3.4) принимают вид

$$y_c = \frac{r_0 \operatorname{tg} \theta}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \theta}} = r_0 \operatorname{tg} \theta + \frac{1}{2} r_0 \operatorname{tg}^3 \alpha \operatorname{tg}^3 \theta + \dots$$

$$z_c = \frac{r_0}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \theta}} - 1 \right) = \frac{1}{2} r_0 \operatorname{tg}^2 \theta + \dots \quad (3.6)$$

Подставляем из уравнений (3.3) y_c и z_c в первое из уравнений равновесия (1.5). При этом ограничиваемся случаем плоских наклонений ($\varphi = 0$), что будет иметь место, если $x_c = x_g$.



Фиг. 2.

Пользуясь разложением

$$\operatorname{tg} \theta = \theta + \frac{1}{3} \theta^3 + \frac{2}{15} \theta^5 + \dots$$

получаем для определения θ уравнение с левой частью в виде целого ряда

$$3y_g - 3h\theta - (F + h)\theta^3 + \dots = 0 \quad (3.7)$$

где

$$h = r_0 - z_g \quad (3.8)$$

Отсюда

$$\theta = \frac{y_g}{h} - \frac{F + h}{3h} \left(\frac{y_g}{h} \right)^3 + \dots \quad (3.9)$$

или

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y_g}{h} - \frac{F}{3h} \left(\frac{y_g}{h} \right)^3 + \dots \quad (3.10)$$

Ограничиваясь в последнем ряде только первым членом, получаем известную приближенную формулу теории корабля^[5]. Действительно, положим, что первоначальное состояние равновесия плавающего тела веса P нарушено благодаря перемещению некоторого груза веса p . Считаем это перемещение происходящим настолько медленно, что в результате получается новое состояние равновесия, характеризуемое углом θ .

Пусть будут y и z проекции перемещения центра тяжести груза p на соответствующие координатные оси, a — начальное расстояние между центром тяжести плавающего тела и центром водоизмещения. Имеем

$$y_g = \frac{py}{P}, \quad z_g = a + \frac{pz}{P} \quad (3.11)$$

Подстановка дает упомянутую приближенную формулу

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y_g}{h} = \frac{py}{P(r_0 - a) - pz} = \frac{py}{Ph_0 - pz} \quad (3.12)$$

Здесь через

$$h_0 = r_0 - a \quad (3.13)$$

обозначена так называемая начальная метацентрическая высота, т. е. начальное расстояние между метацентром и центром тяжести. При достаточно малых значениях угла θ погрешность формулы (3.12) характеризуется вторым членом ряда (3.10) и практически очень невелика.

§ 4. Определение метацентрической высоты по углу наклона плавающего тела

Первое из уравнений (1.5), которым мы пользовались в случае плоских наклонов при определении угла θ по заданному положению центра тяжести плавающего тела, может служить для решения обратной задачи: по известному углу наклона θ , соответствующему новому положению равновесия плавающего тела, найти положение его центра тяжести. Это положение мы будем определять параметром h . Если $z = 0$, то на основании второго из равенств (3.11)

$$z_g = a \quad \text{и} \quad h = r_0 - z_g = r_0 - a = h_0$$

С подобной задачей приходится встречаться при опытным определении метацентрической высоты судов. Как известно, для этого судно из начального положения равновесия переводят в другое, характеризуемое углом наклона θ , путем перемещения некоторого груза. Тогда из приближенной формулы (3.12) имеем

$$h = \frac{y_g}{\operatorname{tg} \theta} \quad (4.1)$$

С целью получить возможно более точный результат, производят ряд наблюдений для различных значений θ и y_g . Результаты этих наблюдений обрабатываются тем или другим способом^[6]. При этом, естественно, возникает вопрос о точности самой формулы (4.1), из которой определяется h . Найдем точное выражение для h .

Первое из уравнений (1.5) дает

$$z_g = -\frac{y_g}{\operatorname{tg} \theta} + \frac{y_c + z_c \operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \theta} \quad (4.2)$$

Подставляя значение z_g в выражение (3.8), имеем

$$h = \frac{y_g}{\operatorname{tg} \theta} + \frac{(r_0 - z_c) \operatorname{tg} \theta - y_c}{\operatorname{tg} \theta} \tag{4.3}$$

Второе слагаемое правой части последнего равенства дает представление о величине ошибки приближенной формулы (4.1).

Применяем формулу (4.3) к случаю цилиндрического плавающего тела ($\alpha = 0$). Подставляя соответствующие значения y_c и z_c (§ 2), находим известный результат

$$h = \frac{y_g}{\operatorname{tg} \theta} - \frac{1}{2} r_0 \operatorname{tg}^2 \theta \tag{4.4}$$

Случай симметричного плавающего тела (§ 3), ограниченного линейчатой поверхностью, дает выражение для h в виде бесконечного ряда

$$h = \frac{y_g}{\operatorname{tg} \theta} - \frac{1}{3} F \operatorname{tg}^2 \theta + \dots \tag{4.5}$$

При достаточно малом угле θ можно ограничиться двумя первыми слагаемыми правой части и таким образом оценить погрешность приближенной формулы (4.1).

В частном случае призматического плавающего тела с трапецидальным поперечным сечением равенство (4.5) переписывается в следующем виде:

$$h = \frac{y_g}{\operatorname{tg} \theta} - \frac{r_0}{2 \cos^2 \alpha} \operatorname{tg}^2 \theta + \dots \tag{4.6}$$

§ 5. Численный пример

Основные элементы судна

Длина между перпендикулярами	$L = 37$ м
Ширина	$B = 8.20$ м
Углубление	$T = 3.60$ м
Водоизмещение	$V = 616$ м ³
Площадь грузовой ватерлинии	$S = 247$ м ²
Начальное расстояние между центром тяжести и центром водоизмещения	$a = 0.85$ м
Начальный метацентрический радиус (малый)	$r_0 = 1.82$ м
Начальная метацентрическая высота	$h_0 = 0.97$ м

Значения ординат y даются в табл. 1.

Таблица 1

Нос				Корма			
№ ватерлинии № шпангоута	4 $\frac{1}{2}$	5	5 $\frac{1}{2}$	№ ватерлинии № шпангоута	4 $\frac{1}{2}$	5	5 $\frac{1}{2}$
	0	0	1.04		0.06	20	0
1	0.95	1.10	1.22	19	1.45	2.24	2.69
2	1.83	2.00	2.15	18	2.50	2.92	3.21
3	2.56	2.72	2.86	17	3.12	3.37	3.55
4	3.18	3.30	3.42	16	3.53	3.68	3.80
5	3.62	3.70	3.78	15	3.79	3.88	3.95
6	3.93	3.98	4.01	14	3.96	4.02	4.05
7	4.08	4.03	4.10	13	4.05	4.08	4.09
8	4.10	4.10	4.10	12	4.09	4.10	4.10
9	4.10	4.10	4.10	11	4.10	4.10	4.10
10	4.10	4.10	4.10	10	4.10	4.10	4.10

Для вычисления на основании равенств (3.5) интегралов D и E воспользуемся формулой Симпсона. Входящий в подинтегральную функцию множитель $\operatorname{tg} \alpha$ находится с помощью табл. 1. Именно

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta z}$$

где

$$\Delta y = y_{5\frac{1}{2}} - y_{4\frac{1}{2}}, \quad \Delta z = \frac{T}{5} = 0.72 \text{ м}$$

Получаем

$$D = 96.4, \quad E = 193, \quad F = 3.62$$

Пользуясь приближенной формулой (4.1) для метacentрической высоты, мы допускаем погрешность. Величина относительной погрешности δ в сторону уменьшения h_0 в случае цилиндрического плавающего тела на основании равенств (4.4) в процентах оказывается равной

$$\delta = 100 \frac{r_0}{2h_0} \operatorname{tg}^2 \theta$$

Аналогичная погрешность в случае симметричного плавающего тела, ограниченного линейчатой поверхностью, будет

$$\delta = 100 \frac{F}{3h_0} \operatorname{tg}^2 \theta$$

В табл. 2 приводятся указанные погрешности для числовых данных рассматриваемого примера и различных значений угла θ .

Таблица 2

δ (в проц.)	$\theta=0^\circ$	1°	2°	3°	4°	5°
$100 \frac{r_0}{2h_0} \operatorname{tg}^2 \theta$	0	0.03	0.11	0.26	0.46	0.72
$100 \frac{F}{3h_0} \operatorname{tg}^2 \theta$	0	0.04	0.15	0.34	0.61	0.95

Таблица позволяет сделать следующее заключение. Оценка погрешности приближенной формулы (4.1) оказывается преуменьшенной, если пользоваться формулой (4.4) для цилиндрического плавающего тела. Для судов обычных очертаний при сравнительно небольших значениях угла α , что имеет место в нашем примере, указанная погрешность будет порядка одного процента, конечно, для соответствующих значений угла $\theta < 5^\circ$.

Однако необходимо заметить, что в специальных случаях, когда значения угла α не малы, эта погрешность может оказаться значительно большей. Например, в случае призматического плавающего тела с трапециевидальным поперечным сечением погрешность на основании равенства (4.6) будет равна в процентах

$$\delta = 100 \frac{r_0}{2h_0 \cos^2 \alpha} \operatorname{tg}^2 \theta$$

и возрастает с увеличением угла α . Заметим, что во всем предыдущем диаметральной плоскостью судна предполагалась вертикальной. Это практически осуществляется с тем или иным приближением:

Поступила в редакцию 15 I 1943.

SUR QUELQUES QUESTIONS DE LA THÉORIE DU NAVIRE

N. P. NÉRONOV

(Résumé)

Dans la théorie du navire^[5] on emploie la formule approchée

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y_g}{h} = \frac{Py}{Ph_0 - pz} \quad (3.12)$$

pour l'angle θ d'inclinaison du navire dans le plan transversal, quand un poids p a un déplacement horizontal égal à y vertical à z . Dans cette formule P désigne le poids total du flotteur, r_0 le rayon métacentrique initial transversal, a la distance initiale du centre de gravité total au centre de carène et h la hauteur métacentrique.

Il existe une formule analogique pour l'angle φ d'inclinaison du flotteur dans le plan longitudinal. Ces deux formules n'ont lieu que pour les angles d'inclinaison suffisamment petits.

Dans le cas général ont lieu en même temps les inclinaisons transversales et longitudinales.

Déterminant la position d'une flottaison par les angles φ et θ (fig. 1) on obtient pour la détermination φ et θ le système des équations (1.5) où les coordonnées du centre de gravité $G(x_g, y_g, z_g)$ sont données et les coordonnées du centre de carène $G(x_c, y_c, z_c)$ sont considérées comme les fonctions connues de φ et θ . Dans le cas du navire avec un chargement liquide x_g, y_g, z_g sont les fonctions connues de φ et θ .

Dans le § 2 nous examinons le cas du flotteur cylindrique.

Dans le § 3 nous considérons le cas des inclinaisons transversales du corps flottant avec une surface réglée et un plan longitudinal xz de symétrie.

Nous obtenons les expressions¹ pour les coordonnées du centre de carène dans la forme des séries entières

$$y_c = r_0 \theta + \frac{1}{6} (2F - r_0) \theta^3 + \dots$$

$$z_c = \frac{1}{2} r_0 \theta^2 + \dots$$

ou dans la forme

$$y_c = r_0 \operatorname{tg} \theta + \frac{1}{6} (2F - 3r_0) \operatorname{tg}^3 \theta + \dots$$

$$z = \frac{1}{2} r_0 \operatorname{tg}^2 \theta + \dots$$

et pour la valeur de l'angle cherché θ dans la forme

$$\theta = \frac{y_g}{h} - \frac{F + h}{3h} \left(\frac{y_g}{h} \right)^3 + \dots \quad (3.9)$$

ou

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y_g}{h} - \frac{F}{3h} \left(\frac{y_g}{h} \right)^3 + \dots \quad (3.10)$$

Les indications abrégées sont données par les formules (3.5), où V désigne le volume de carène, S l'aire de la flottaison initiale, α l'angle qui fait la muraille avec la verticale (fig. 2).

En ne conservant que le premier terme de la série (3.9), on aura la formule approchée (3.12) de la théorie du navire.

¹Après nous^[3] les développements semblables et quelques leurs applications ont été considérés aussi par M. Barillon^[4].

Dans le § 4 nous examinons le problème inverse — connaissant l'angle d'inclinaison θ du flotteur, il faut trouver la position du centre de gravité. Nous déterminons cette position par la hauteur métacentrique h . Le problème posé se rencontre, quand on trouve la valeur de l'expérience. La formule (4.3) donne la valeur exacte de h . En l'appliquant au cas du flotteur symétrique (§ 3) on aura la valeur de h par la série

$$h = \frac{y_g}{\operatorname{tg} \theta} - \frac{1}{3} F \operatorname{tg}^2 \theta + \dots \quad (4.5)$$

Le deuxième terme de la série (4.5) permet d'évaluer l'erreur de la formule approchée (4.4). Un exemple numérique du § 5 montre que cette erreur pour les navires de la forme ordinaire (l'angle θ n'est pas grand) a l'ordre 1%, si $\theta < 5^\circ$. Il faut remarquer que l'erreur croît avec la croissance de x .

ЛИТЕРАТУРА

1. Pollard et Dudebout. Théorie du navire. 1890. T. I. Ch. XIV. § 79. [P. 265 — 267].
2. Pollard et Dudebout. Théorie du navire. 1890. T. I. Ch. XVIII. § 88 [P. 337 — 341].
3. Неронов Н. П. Об определении положений равновесия плавающих тел. Записки Ленинградского горного института. 1929. Т. VII. Вып. 3. [Стр. 83 — 89].
4. Barillon E. G. Les coordonnées du centre de carène exactes jusqu'aux termes en θ^2 . Comptes rendus du 3 Congrès International de Mécanique Appliquée. 1930. V. II, [P. 404 — 410]. (См. Там же указание на последующую литературу).
5. Pollard et Dudebout. Théorie du navire. 1891. T. II. Ch. XXII. § 109.
6. Крылов А. Н. Теория корабля. 1907. Ч. 1. Гл. II, § 21, [Стр. 109 — 116].