

**ПРИБЛИЖЕННОЕ КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ В ПРИМЕНЕНИИ
К ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО КОНТУРА
ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫМ ПОТОКОМ**

А. М. БАНИН

(Ленинград)

Задачи, связанные с обтеканием произвольного контура плоским потоком идеальной жидкости, сводятся к конформному отображению области внешней к заданному контуру на область внешнюю для единичного круга. Для численного решения этих задач большое значение имеют способы, позволяющие достаточно быстро и точно производить требуемое конформное отображение. В настоящей статье делается попытка разработать один из таких методов. В основу положено сведение задачи конформного отображения к интегральным уравнениям, примененное в 1933 г. С. А. Гершгориным^[1,2].

1. Мы предполагаем, что контур L , внешность которого требуется отобразить, задан в плоскости $z = x + iy$, а круг единичного радиуса — в плоскости $\zeta = \rho e^{i\theta}$. Отображение определяется аналитической функцией $\zeta = \zeta(z)$.

В частности, если точка z лежит на контуре L , то $\rho = |\zeta(z)| = 1$. Поэтому соответствие точек на контурах определяется равенством $\theta = \theta(\sigma)$, где σ — длина дуги L , отсчитываемая от некоторой закрепленной точки A , выбираемой произвольно на контуре. Мы предполагаем, что функция $\theta(\sigma)$ — однозначна, но претерпевает разрыв в некоторой точке, в качестве которой мы можем взять точку A . В этом случае $\theta(\sigma)$ будет изменяться от некоторого значения $\theta_0 = \theta(0)$ до $\theta_0 + 2\pi = \theta(l)$, где l — длина контура L , а значения $\sigma = 0$ и $\sigma = l$ соответствуют одной и той же точке A .

Предполагая, что при отображении сохраняется направление вещественной оси, на бесконечности мы налагаем на отображающую функцию условие

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\zeta(z)}{z} = C \quad (1)$$

где C — некоторое вещественное число.

В работе Гершгорина выведено интегральное уравнение для определения значений θ на контуре L

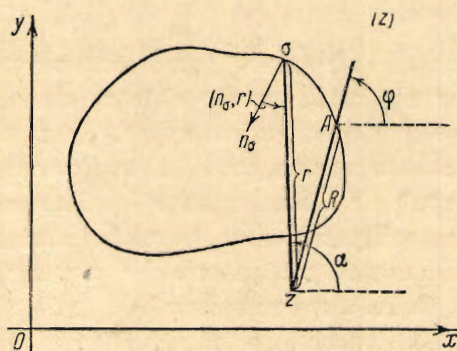
$$\theta(S) = -\frac{1}{\pi} \int_L \theta(\sigma) \frac{\cos(n\sigma, r)}{r} d\sigma + 2[\varphi(s) + \pi] \quad (2)$$

которое, как доказано там же, имеет единственное решение. Значения же модуля и аргумента функции $\zeta(z)$ в любой точке z вне контура выражаются через $\theta(\sigma)$ по формулам

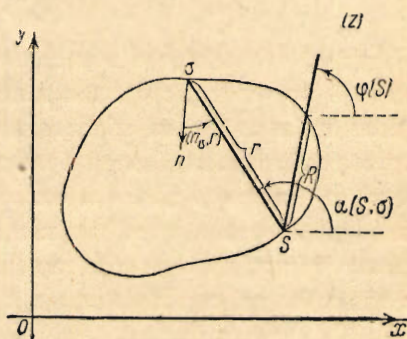
$$\lg \rho = -\frac{1}{2\pi} \int_L \theta(\sigma) \frac{\sin(n_\sigma, r)}{r} d\sigma + \lg cR \quad (3)$$

$$\theta = -\frac{1}{2\pi} \int_L \theta(\sigma) \frac{\cos(n_\sigma, r)}{r} d\sigma + \varphi + \pi \quad (4)$$

В этих формулах через n_σ обозначено направление внутренней нормали в точке σ (фиг. 1), через r и R — отрезки, соединяющие точку z соответственно с точками σ и A , через φ — угол между положительным направлением оси x и продолжением отрезка R .



Фиг. 1.



Фиг. 2.

В уравнении (2) величины n_σ , r и φ имеют тот же смысл (фиг. 2), но только точка z , обозначаемая буквой s , берется уже на самом контуре L . Отметим, что функция $\varphi(s)$ в точке A претерпевает скачок на величину π , т. е. $\varphi(l) = \varphi(0) + \pi$. Если точка A совпадает с угловой точкой контура, то имеет место $\varphi(l) = \varphi(0) + 2\pi - \delta$, где δ — внешний угол.

В дальнейшем понадобятся известные равенства

$$\frac{\sin(n_\sigma, r)}{r} = \frac{\partial \lg r}{\partial \sigma}, \quad \frac{\cos(n_\sigma, r)}{r} = \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} \quad (5)$$

где α — угол между некоторым закрепленным направлением, в качестве которого всегда будем выбирать положительное направление оси, и отрезком r , направленным из точки z (или соответственно S) в точку σ (фиг. 1 и 2). Из чертежа видно, что $(\alpha)_{\sigma=0} = (\alpha)_{\sigma=l} = \varphi$. Если точка z находится на контуре (фиг. 2), то $\alpha = \alpha(S, \sigma)$ является непрерывной функцией двух переменных s и σ при всех значениях кроме $\sigma = s$. В последнем случае имеет место

$$\alpha(s, s+0) = \alpha(s, s-0) - \pi \quad (6)$$

Если s — угловая точка, то вместо π следует подставить $2\pi - \delta$.

2. Для приближенного решения интегрального уравнения (2) обычно заменяют его системой линейных алгебраических уравнений. Однако такая замена часто приводит к большим вычислениям и, как выяснится в дальнейшем, выгоднее сначала определить производную от $\theta(s)$ по дуге.

Пользуясь вторым равенством (5) и интегрируя по частям (4), получим

$$\theta = -\frac{1}{2\pi} \left[\theta(\sigma) \alpha \right]_0^l + \frac{1}{2\pi} \int_0^l \theta'(\sigma) \alpha d\sigma + \varphi + \pi = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \theta'(\sigma) \alpha d\sigma + \pi \quad (7)$$

так как

$$[\theta(\sigma) \alpha]_0^l = [\theta(l) - \theta(0)] (\alpha)_{\sigma=0} = 2\pi\varphi$$

Устремим точку z к контуру L . Так как подынтегральная функция в равенстве (7) ограничена, мы можем перейти к пределу под знаком интеграла. Получим

$$\theta(S) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \theta'(\sigma) \alpha(s, \sigma) d\sigma + \pi \quad (8)$$

Продифференцировав последнее равенство по s , мы получим интегральное уравнение относительно $\theta'(s)$, из которого и определим эту функцию. При этом промежуток интегрирования необходимо разбить на две части $(0, s)$ и (s, l) , так как подынтегральная функция имеет разрыв при $\sigma = s$.

Имеем

$$\begin{aligned} \theta'(s) &= \frac{1}{2\pi} \frac{d}{ds} \left[\int_0^s \theta'(\sigma) \alpha(s, \sigma) d\sigma + \int_s^l \theta'(\sigma) \alpha(s, \sigma) d\sigma \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\theta'(\sigma) \alpha(s, \sigma) \right]_{\sigma=s-0} + \frac{1}{2\pi} \int_0^s \theta'(\sigma) \frac{\partial \alpha(s, \sigma)}{\partial s} d\sigma - \frac{1}{2\pi} \left[\theta'(\sigma) \alpha(s, \sigma) \right]_{\sigma=s+0} + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_s^l \theta'(\sigma) \frac{\partial \alpha(s, \sigma)}{\partial s} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_0^l \theta'(\sigma) \frac{\partial \alpha(s, \sigma)}{\partial s} d\sigma + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \theta'(s) [\alpha(s, s-0) - \alpha(s, s+0)] \end{aligned}$$

Пользуясь равенством (6), после преобразований получим

$$\theta'(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^l \theta'(\sigma) \frac{\partial \alpha(s, \sigma)}{\partial s} d\sigma \quad (9)$$

Если s — угловая точка, вместо $\frac{1}{\pi}$ в (9) следует подставить $\frac{1}{\delta}$.

Уравнение (9) имеет бесконечно много решений, отличающихся между собой постоянным множителем¹. Для определенности решения необходимо добавить очевидное условие

$$\int_0^l \theta'(\sigma) d\sigma = \theta(l) - \theta(0) = 2\pi$$

Умножая обе части последнего равенства на произвольную функцию $a(s)/\pi$ и добавляя к обеим частям уравнения (9), получим

$$\theta'(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^l \theta'(\sigma) \left[\frac{\partial \alpha(s, \sigma)}{\partial s} - a(s) \right] d\sigma + 2a(s) \quad (10)$$

¹ В работе Гершгорина^[1] доказано, что ядро $\cos(n_\sigma, r)/r$ имеет характеристическое число $1/\pi$. Так как ядро уравнения (9) вида $\partial \alpha(s, \sigma)/\partial s = \cos(n_\sigma, r)/r$ получается из указанного выше только перестановкой s и σ , оно должно иметь то же самое характеристическое число.

Во многих случаях удается подобрать функцию $a(s)$ так, что к уравнению (10) можно с успехом применить метод последовательных приближений, причем часто можно ограничиться вторым, третьим приближениями.

3. Замену интегрального уравнения (10) системой линейных алгебраических уравнений удобно производить следующим образом.

Прежде всего некоторым элементарным предварительным преобразованием можно добиться, чтобы контур L по форме напоминал окружность, т. е. представлял собой выпуклую кривую по возможности без угловых точек. Для таких контуров вычисления, естественно, значительно облегчаются.

Контур L разбиваем на некоторое число n участков, равных (но не обязательно) по длине.

Длину каждого участка обозначаем через Δs_i , где i — номер участка. На каждом из участков выбираем некоторую точку, в которой значение функции будем обозначать соответственным индексом, т. е. положим $\theta(s_i) = \theta_i$. Наконец, приблизительно полагаем

$$\left. \frac{\partial a(s, \sigma)}{\partial s} \right|_{\substack{s=s_k \\ \sigma=s_i}} \approx \frac{\Delta a_{ki}}{\Delta s_k}$$

где Δa_{ki} — угол, под которым из точки i виден участок Δs_k , взятый со знаком $+$, если участок виден изнутри области, ограниченной кривой L , и со знаком $-$ в обратном случае. Тогда интегральное уравнение (10) можно заменить системой линейных алгебраических уравнений¹

$$\theta'_k = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \theta'_i \left[\frac{\Delta a_{ki}}{\Delta s_k} - a_k \right] \Delta s_i + 2a_k \quad (11)$$

Из системы (11) можно каким-либо способом определить числа θ'_k , т. е. приближенные значения функции $\theta'(s)$ в отдельных точках. После этого из равенства (8) следует определить какое-нибудь одно или, лучше для контроля, два, три значения функции $\theta(s)$. Остальные значения этой функции проще определить, вычисляя приближенно неопределенный интеграл от $\theta'(s)$.

4. Для полного решения задачи остается вычислить величину c , которая входит в равенство (3). Для этого, пользуясь первым равенством (5), проинтегрируем по частям интеграл в равенстве (3). Получим

$$\lg \rho = + \frac{1}{2\pi} \int_0^l \theta'(\sigma) \lg r d\sigma + \lg c \quad (12)$$

так как (фиг. 1)

$$(r)_{\sigma=0} = (r)_{\sigma=l} = R \quad \text{и} \quad \theta(l) - \theta(0) = 2\pi$$

Устремим теперь точку z к контуру L , тогда ρ будет стремиться к единице, так как точкам контура L соответствует окружность единичного радиуса. Интеграл, стоящий в равенстве (12), представляет собой логарифмический потенциал простого слоя, являющийся непрерывной функцией

¹ В книге Л. В. Канторовича и В. И. Крылова [2] (гл. II, § 4) выведена оценка погрешности, получающейся при замене интегрального уравнения системой алгебраических. Однако следует иметь в виду, что, как показывают на примере сами авторы, во многих случаях действительная погрешность оказывается значительно меньше получающейся оценки.

вплоть до контура L . Поэтому, устремляя точку z к контуру, можно перейти к пределу под знаком интеграла. Получим

$$\lg c = -\frac{1}{2\pi} \int_0^l \theta'(\sigma) \lg r d\sigma \quad (13)$$

где $r = r(s, \sigma)$ теперь представляет собой расстояние между двумя точками контура L (фиг. 2). Следует отметить, что хотя подинтегральная функция в равенстве (13) зависит от s , интеграл от этой величины уже зависеть не может, так как в левой части равенства стоит постоянная величина. Поэтому для определения достаточно задать какое-нибудь одно (для контроля лучше два, три) определенное значение s и вычислить интеграл.

Для приближенного вычисления интеграла в равенстве (13) разобьем его на сумму двух интегралов, один в промежутке от $s - \varepsilon$ до $s + \varepsilon$, где ε — какое-нибудь малое число, другой по остальной части контура. Второй из полученных интегралов вычисляется без труда любым приближенным способом, первый же требует особого рассмотрения, так как при $\sigma = s$ подинтегральная функция обращается в бесконечность. Полагая приближенно $\theta'(\sigma) \approx \theta'(s)$ и $r \approx |S - \sigma|$, получим

$$\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} \theta'(\sigma) \lg r d\sigma \approx \theta'(s) \int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} \lg |s - \sigma| d\sigma = \theta'(s) 2\varepsilon (\lg \varepsilon - 1)$$

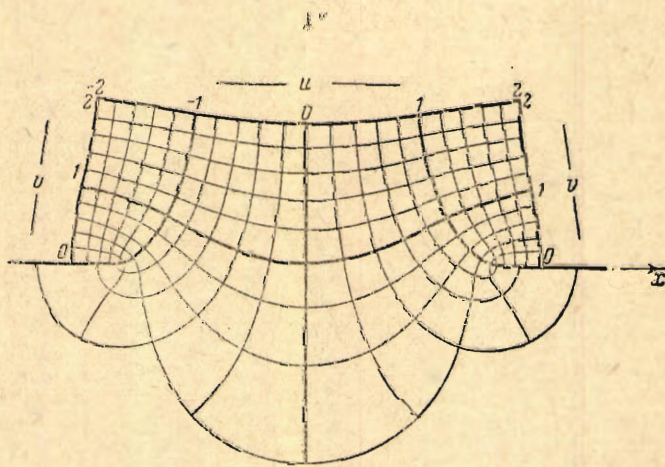
5. Выше было указано, что для облегчения вычислений следует предварительно отобразить заданный контур на контур, по форме напоминающий окружность. Это предварительное преобразование можно производить самыми разнообразными способами, однако в практической работе удобнее применять какой-нибудь определенный способ, пригодный во многих случаях.

В тех случаях когда отображаемые контуры до некоторой степени похожи на профили Жуковского, а такие контуры в гидромеханике встреча-

ются постоянно, в качестве предварительного преобразования удобно применить обратное преобразование Жуковского. Это преобразование дается равенством $z = \frac{1}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right)$, причем заданный контур предполагается расположенным в плоскости $z = x + iy$, а отображенный в плоскости $w = u + iv$.

Во избежание громоздких вычислений при отображении полезно воспользоваться графическим способом. Для этого в плоскости z чертится ортогональная сетка линий $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ (фиг. 3), где

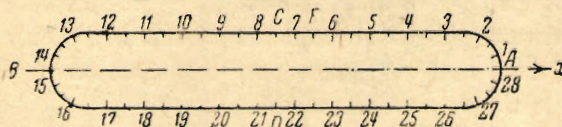
$$x = \frac{1}{2} \left(u + \frac{u}{u^2 + v^2} \right), \quad y = \frac{1}{2} \left(v - \frac{v}{u^2 + v^2} \right)$$



Фиг. 3.

Тогда значения u и v в произвольной точке заданного контура, которые мы отсчитываем по сетке, будут декартовыми координатами соответствующей точки отображенного контура. Сетку $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ можно заранее вычертить на кальке и затем накладывать на различные контуры, вычерченные в соответствующем масштабе.

6. В качестве примера рассмотрим задачу об обтекании плоскопараллельным потоком контура L , составленного из двух параллельных отрезков и двух полуокружностей (фиг. 4).



Фиг. 4.

и двух полуокружностей (фиг. 4). Отношение расстояния между центрами полуокружностей к радиусу выберем равным 10. В дальнейшем радиус полуокружностей будем считать равным 2, а расстояние между центрами — 20.

Требуемое отображение произведем изложенным выше способом.

Разделим контур L на 28 участков, как указано на чертеже, и пронумеруем точки, лежащие в середине каждого участка. Длины участков, лежащих на прямолинейных частях контура ($\Delta s_3, \Delta s_4$ и т. д.) равны 2, а длины участков, лежащих на полуокружностях ($\Delta s_1, \Delta s_2$ и т. д.) равны 1.57. Чтобы составить систему (12), определим прежде всего углы $\Delta \alpha_{ki}$. Для удобства значения этих углов измерены сразу в долях π . Полученные значения $\frac{1}{\pi} \Delta \alpha_{ki}$, для удобства увеличенные в 1000 раз, приводятся в табл. 1. В каждом столбце таблицы выписаны углы, соответствующие одному уравнению.

Таблица 1

$k \backslash i$	1	2	3	4	5	6	7	$k \backslash i$	1	2	3	4	5	6	7
1	125	125	89	32	16	10	7	15	20	10	6	5	6	8	10
2	125	125	45	8	3	2	1	16	21	12	6	8	9	12	15
3	112	76	0	0	0	0	0	17	22	14	8	9	11	16	22
4	78	42	0	0	0	0	0	18	25	15	9	12	16	22	32
5	60	29	0	0	0	0	0	19	28	18	12	16	22	32	50
6	48	22	0	0	0	0	0	20	32	21	16	22	32	50	80
7	39	18	0	0	0	0	0	21	37	26	22	32	50	80	127
8	34	15	0	0	0	0	0	22	44	32	32	50	80	127	156
9	29	13	0	0	0	0	0	23	53	42	50	80	127	156	127
10	26	11	0	0	0	0	0	24	66	59	80	127	156	127	80
11	23	10	0	0	0	0	0	25	88	86	127	156	127	80	50
12	21	9	0	0	0	0	0	26	117	122	156	127	80	50	32
13	20	8	0	0	0	0	0	27	125	125	136	85	52	33	24
14	19	9	2	2	3	4	4	28	125	125	114	58	33	21	14

В силу симметричности контура можно считать, что $\theta'(s)$ имеет равные значения в точках, одинаково расположенных относительно контура, т. е., например, $\theta_1' = \theta_{14}' = \theta_{13}' = \theta_{28}'$; $\theta_2' = \theta_{13}' = \theta_{16}' = \theta_{27}'$. Вследствие этого вместо 28 уравнений мы должны решать только семь. В табл. 2 даются суммы углов $\frac{1}{\pi} \Delta \alpha_{ki}$ соответствующих точкам с одинаковыми значениями θ' , так например, первое число в первом столбце равно сумме $\frac{1}{\pi} [\Delta \alpha_{1,1} + \Delta \alpha_{1,14} + \Delta \alpha_{1,13} + \Delta \alpha_{1,28}]$.

Выберем теперь числа a_k . Чтобы коэффициенты системы были наименьшими по абсолютной величине, положим

$$a_k = \frac{1}{n\Delta s_k} \sum_{i=1}^n \Delta z_{ki}$$

где $n=28$. Получим

$$a_1 = 0.112, \quad a_2 = 0.087, \quad a_3 = 0.051, \quad a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = 0.046.$$

В левой части табл. 3 приведены коэффициенты системы уравнений (11). Чтобы получить эти коэффициенты, мы должны соответствующие числа из

Таблица 2

$i \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	$i \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7
1	289	269	209	97	58	43	35	5	180	117	92	143	178	159	130
2	291	270	187	101	64	47	40	6	162	98	66	102	159	206	207
3	272	221	164	136	92	66	54	7	154	91	54	82	130	207	283
4	214	153	136	168	143	102	82								

табл. 2 умножить на $\Delta s_i / \Delta s_k$ и из произведения вычесть $4a_k \Delta s_i / \pi$. Множитель 4 появляется вследствие того, что каждое число в табл. 2 является суммой четырех слагаемых. В табл. 3 даны также значения $2a_k$, т. е. свободные члены системы.

Полученную систему будем решать методом последовательных приближений, причем в качестве первого приближения выберем свободные члены системы. Для получения следующих приближений надо имеющиеся значения последовательно умножать на 1-й, 2-й и т. д. столбцы таблицы, складывать все произведения и добавлять свободные члены. Последовательные приближения и значения θ' приводятся в правой части табл. 3. Мы видим, что хотя исходный контур сильно отличается от окружности, все же процесс сходится достаточно быстро.

Таблица 3

$i \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	$2a_k$	Последовательные приближения				θ_i
1	65	95	62	-16	-46	-58	-65	224	235	239	241	241	0.241
2	67	96	45	-13	-42	-55	-61	174	190	196	198	198	0.198
3	61	60	34	19	-25	-51	-63	102	113	115	116	116	0.116
4	-13	-27	6	51	26	-15	-35	92	91	91	91	91	0.091
5	-55	-73	-38	26	61	42	13	92	85	82	82	82	0.082
6	-79	-97	-64	-15	42	89	90	92	83	79	78	78	0.078
7	-89	-106	-76	-35	13	90	166	92	82	77	75	75	0.075

Приводим значения $\theta(s)$ в выбранных точках контура, полученные с помощью приближенного вычисления неопределенного интеграла от θ'

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
θ_k	0.19	0.54	0.82	1.02	1.19	1.35	1.50	1.64	1.79	1.95	2.12	2.32	2.60	2.95
k	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
θ_k	3.33	3.68	3.96	4.16	4.33	4.49	4.64	4.78	4.93	5.09	5.26	5.46	5.74	6.09

При этом учтено, что в силу симметричности контура $\theta=0$ в точке A .

В табл. 4 приведены значения коэффициента c . Вычисление проведено дважды, причем в первом случае в качестве закрепленной выбрана точка C , а во втором точка A . В обоих случаях в силу симметричности достаточно вычислить интеграл по половине контура и результат умножить на 2. В первом случае путь интегрирования разбиваем на две части DAF и FC . Первый интеграл, вычисленный по способу прямоугольников, оказался равным 2.759. Второй же, вычисленный как было указано выше, равен -0.020 . Следовательно, интеграл по всему контуру равен $2(2.759 - 0.020) = 5.478$, а $c = 0.135$. Во втором случае интеграл вычислен аналогично, и значение c получилось почти таким же.

Таблица 4

i	r_i	$\lg_{10} r_i$	$\theta_i' \lg_{10} r_i \Delta s_i$	i	r_i	$\lg_{10} r_i$	$\theta_i' \lg_{10} r_i \Delta s_i$
22	4.12	0.616	0.092	2	2.16	0.334	0.104
23	5.00	0.699	0.109	3	3.61	0.558	0.130
24	6.40	0.806	0.132	4	5.39	0.732	0.133
25	8.06	0.906	0.165	5	7.29	0.862	0.141
27	9.85	0.993	0.230	7	9.22	0.965	0.151
26	11.44	1.059	0.329	6	11.20	1.049	0.157
28	12.15	1.085	0.410	8	13.17	1.120	0.168
1	11.90	1.076	0.407	9	15.12	1.180	0.184
2	10.78	1.032	0.321	10	17.11	1.234	0.202
3	9	0.954	0.221	11	19.10	1.281	0.233
4	7	0.846	0.154	12	21.10	1.324	0.307
5	5	0.699	0.115	13	22.82	1.359	0.421
6	3	0.477	0.074	14	24.00	1.380	0.522
			2.759				2.853
			-0.020				-0.096
			2.739				2.757

$$\lg_{10} c = -0.870$$

$$c = 0.135$$

$$\lg_{10} c = -0.875$$

$$c = -0.133$$

$$c = 0.134$$

7. Вычислим теперь давление в различных точках заданного контура L (фиг. 4), точнее разность между давлением в соответствующей точке и давлением на бесконечности. Эта разность определяется формулой

$$p - p_0 = \rho \frac{v_0^2}{2} \left[1 - \left(\frac{v}{v_0} \right)^2 \right] = \rho \frac{v_0^2}{2} \left[1 - \frac{4\theta'^2}{c^2} \sin^2(\theta - \alpha) \right]$$

где v_0 — скорость на бесконечности, ρ — плотность и α — угол между направлением скорости на бесконечности и осью x задаются условиями задачи, а остальные величины θ , θ' , c получены в процессе конформного отображения. Мы положим $\frac{1}{2} \rho v_0^2 = 1$.

$$\alpha = 0$$

Таблица 5

k	θ_k	θ_k^2	$\sin \theta_k$	$\frac{2\theta_k'}{c}$	$\frac{2\theta_k'}{c} \sin \theta_k$	$1 - \frac{4\theta_k'^2}{c^2} \sin^2 \theta_k$
1	0.191	10°56'	0.190	3.60	0.685	0.53
2	0.538	30 48	0.513	2.96	1.520	-1.36
3	0.815	46 42	0.724	1.73	1.250	-0.56
4	1.016	58 12	0.850	1.36	1.156	-0.34
5	1.188	68	0.927	1.22	1.137	-0.29
6	1.348	77 18	0.969	1.15	1.125	-0.26
7	1.500	86	0.998	1.12	1.120	-0.26

Рассмотрим два случая: $\alpha=0$ и $\alpha=45^\circ$. В обоих в силу симметричности контура достаточно вычислить давление только на верхнюю часть контура. Результаты вычислений приведены для случая $\alpha=0$ в табл. 5 и для случая $\alpha=45^\circ$ в табл. 6.

$\alpha=45^\circ$

Таблица 6

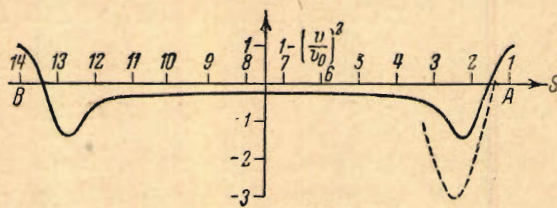
k	θ_k	$\theta_k - \alpha$	$\sin(\theta_k - \alpha)$	$\frac{20k'}{c} \sin(\theta_k - \alpha)$	$1 - \frac{4\theta'^2}{c^2} \sin(\theta_k - \alpha)$
1	10°56'	- 34° 4'	-0.561	-2.02	-3.08
2	30 48	- 14 12	-0.246	-0.73	0.47
3	46 42	1 42	0.030	0.05	1.00
4	58 12	13 12	0.228	0.31	0.90
5	68	23	0.391	0.48	0.77
6	77 18	32 18	0.534	0.61	0.63
7	86	41	0.656	0.74	0.46
8	94	49	0.755	0.85	0.29
9	102 42	57 42	0.845	0.97	0.06
10	112	67	0.920	1.13	-0.28
11	121 48	76 48	0.973	1.32	-0.71
12	133 18	88 18	1.000	1.73	-1.99
13	149 12	104 12	0.970	2.87	-7.21
14	169 4	124 4	0.828	2.98	-7.77

Распределение давления в различных точках контура представлено на фиг. 5 и 6. В обоих случаях по оси ординат откладывается давление, а по оси абсцисс дуга, отсчитываемая от точки C .

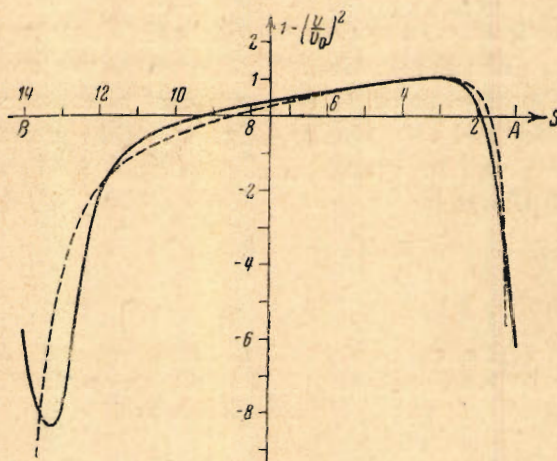
Для сравнения на фиг. 5 пунктирной линией представлено распределение давления на окружность радиуса 2 при обтекании ее тем же потоком. Мы видим, что разрежение на контуре L значительно меньше, чем на окружности, причем сама точка минимума давлений оказывается несколько сдвинутой в направлении к точке A . Отсюда следует, что рассматриваемый контур оказывается более обтекаемым, чем окружность.

На фиг. 6 (пунктиром) приведен график давлений на контуре эллипса с полуосями $a=12$ и $b=2.5$ при обтекании его плоскопараллельным потоком также под углом 45° к оси эллипса. Сам эллипс вычерчен на фиг. 7.

Из фиг. 6 видно, что графики давлений на контуре эллипса и на выбранном нами контуре L почти совпадают, существенно различаясь между

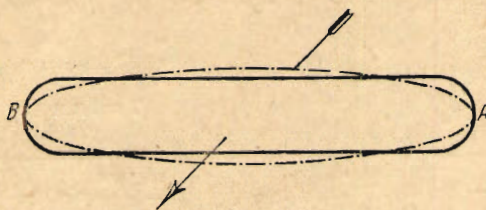


Фиг. 5.

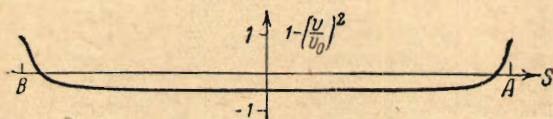


Фиг. 6.

собой только около концов. Это совпадение, очевидно, было бы еще большим, если бы мы выбрали более тонкий контур. Таким образом при определении давлений (при $\alpha > 0$) можно без большой ошибки контуры, подобные выбранному нами, заменять эллипсом, если



Фиг. 7.



Фиг. 8.

только не обращать внимания на величину давления около концов. Отметим еще, что на эллипсе точки с минимальным давлением оказываются почти около вершин, причем само минимальное давление на эллипсе много меньше, чем на контуре L (16 вместо ~ 8.5). При симметричном обтекании в случае $\alpha = 0$ различие между распределением давлений на эллипсе и на контуре L оказывается более существенным, как это видно из сравнения кривых на фиг. 8 и 5.

Поступила в редакцию 15 IV 1941.

APPROXIMATE CONFORMAL TRANSFORMATION APPLIED TO A PLANE PARALLEL FLOW PAST AN ARBITRARY SHAPE

A. M. BANIN

(Summary)

The author develops an approximate procedure for the conformal representation of the external domain of a given contour onto the exterior of the unit circle. He defines the mapping function with the aid of integral equation given by S. Gershgorin^[1] and then reduces the problem to the solution of a system of algebraic linear equations.

The applications of this procedure are illustrated throughout by a study of numerous cases for flows past a contour bounded by two parallel straight lines and two circles (Fig. 4). The pressure distribution along the contour is given for symmetrical flow and for flow directed at 45 degree to the axis of the shape.

ЛИТЕРАТУРА

¹ Гершгорин С. А. Математический сборник. 1932. Т. 40. № 1.

² Канторович Л. В. и Крылов В. И. Методы приближенного решения уравнений в частных производных. Гл. V. § 9.