

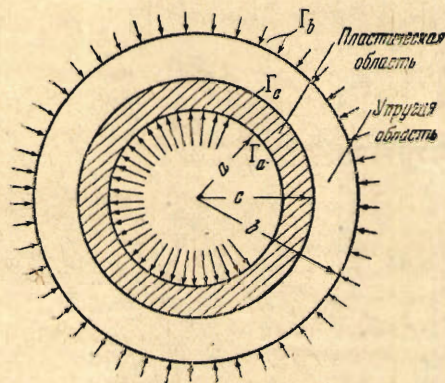
УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТРУБЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАВНОМЕРНЫХ ВНУТРЕННЕГО И ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЙ

В. В. СОКОЛОВСКИЙ

(Москва)

Статья посвящена исследованию упруго-пластического напряженного состояния трубы, находящейся под действием равномерных внутреннего и внешнего давлений на основе теории пластичности Генки—Мизеса без введения допущения о несжимаемости пластического материала¹.

Мы будем пользоваться цилиндрическими координатами r, θ и z . Ось z совпадает с осью трубы. Радиусы внутренней Γ_a и внешней Γ_b окружностей, ограничивающих поперечное сечение трубы, будем обозначать соответственно через a и b (фиг. 1).



Фиг. 1

Вследствие полярной симметрии задачи границей упругой и пластической областей является некоторая окружность Γ_c с центром в точке O , радиус которой мы обозначаем через c . Для удобства вводятся обозначения

$$\rho = r/b, \quad \alpha = a/b, \quad \gamma = c/b$$

Граничные значения вдоль окружностей Γ_a и Γ_b могут быть записаны в виде

$$\sigma_r = -kp \quad \text{при } \rho = \alpha \quad \text{и} \quad \sigma_r = -kq \quad \text{при } \rho = 1$$

При исследовании пластического напряженного состояния будем пользоваться соотношениями Г. Генки

$$2G(\varepsilon_r - \varepsilon) = (1 + \nu)(\sigma_r - S), \quad 2G(\varepsilon_\theta - \varepsilon) = (1 + \nu)(\sigma_\theta - S), \quad 2G(\varepsilon_z - \varepsilon) = (1 + \nu)(\sigma_z - S) \quad (1)$$

где

$$3\varepsilon = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z, \quad 3S = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z$$

$$\varepsilon = \frac{1 - 2\nu}{2G(1 + \nu)} S \quad (2)$$

и условием Р. Мизеса

$$(\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 = 6k^2 \quad (3)$$

где

$$k = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$$

σ_s — предел текучести материала при простом растяжении.

Будем предполагать, что труба не может удлиняться в осевом направлении

$$\varepsilon_z = 0 \quad (4)$$

Условия совместности деформаций будут иметь вид

$$\frac{d\varepsilon_\theta}{d\rho} + \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_r}{\rho} = 0 \quad (5)$$

¹ Этим вопросом уже занимались Н. М. Белаяев и А. К. Синицкий (напряжения и деформации в тонкостенных цилиндрах при упруго-пластическом состоянии материала. Известия ОТН АН СССР. 1938. № 2), однако выбранный ими путь решения задачи на наш взгляд мало удобен.

Уравнения (4) и (5) преобразованные при помощи (1) и (2), вместе с уравнением равновесия составляют систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_r}{d\rho} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \quad (1 + \varphi)(\sigma_r + \sigma_\theta - 2\sigma_z) = \frac{1 - 2\nu}{1 + \nu}(\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z) \\ \frac{d}{d\rho}(\sigma_z - \sigma_\theta) + (\sigma_z - \sigma_\theta) \frac{d \ln(1 + \varphi)}{d\rho} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{\rho} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Четыре уравнения (3) и (6) содержат четыре неизвестные функции σ_r , σ_θ , σ_z и φ . Введем новые искомые функции σ и ψ , положив

$$\sigma_r = k(\sigma + \sin \psi), \quad \sigma_\theta = k(\sigma - \sin \psi), \quad \sigma_z = k(\sigma + \sqrt{3} \cos \psi) \quad (7)$$

Условие (3) удовлетворяется тождественно, а подстановка (7) в (6) дает

$$\sigma = - \left[1 + 2 \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \exp \Phi \right] \frac{\cos \psi}{\sqrt{3}} \quad (8)$$

$$\frac{d\psi}{d\Phi} = \frac{[3(1 - 2\nu) + 2(1 + \nu) \exp \Phi] \operatorname{ctg} \psi + \sqrt{3}(1 - 2\nu)}{2[2(1 - 2\nu) + (1 + \nu) \exp \Phi]} = F_1(\Phi, \psi) \quad (9)$$

$$\frac{d \ln \rho}{d\Phi} = - \frac{2(1 + \nu) \operatorname{cosec}^2 \psi \exp \Phi + (1 - 2\nu)(1 + \sqrt{3} \operatorname{ctg} \psi)^2}{4[2(1 - 2\nu) + (1 + \nu) \exp \Phi]} = -F_2(\Phi, \psi) \quad (10)$$

где

$$\Phi = \ln(1 + \varphi)$$

Для удобства решения задачи переменные σ , ψ и ρ рассматриваются как искомые функции, а Φ принимается за независимое переменное.

Будем в дальнейшем буквами e и p отмечать компоненты напряжения соответственно в упругой и пластической областях.

В кольцевой упругой области ($\gamma \leq \rho \leq 1$) компоненты напряжения выражаются известными из теории упругости формулами

$$\sigma_r^e = -k \left(\frac{C}{\rho^2} - D \right), \quad \sigma_\theta^e = k \left(\frac{C}{\rho^2} + D \right), \quad \sigma_z^e = \nu(\sigma_r^e + \sigma_\theta^e)$$

C и D — постоянные интегрирования. Определяя D из условия на граничной окружности Γ_b , получим

$$\sigma_r^e = -kq - kC \left(\frac{1}{\rho^2} - 1 \right), \quad \sigma_\theta^e = -kq + kC \left(\frac{1}{\rho^2} + 1 \right), \quad \sigma_z^e = 2\nu k(C - q) \quad (11)$$

Предполагаем, что при переходе через границу упругой и пластической областей все компоненты напряжения и деформации изменяются непрерывно и, следовательно, вдоль окружности Γ_c , т. е. при $\rho = \gamma$

$$\sigma_r^e = \sigma_r^p, \quad \sigma_\theta^e = \sigma_\theta^p, \quad \sigma_z^e = \sigma_z^p, \quad \varphi = 0 \quad (12)$$

Отсюда в силу (3) следует, что при $\rho = \gamma$

$$(\sigma_\theta^e - \sigma_z^e)^2 + (\sigma_z^e - \sigma_r^e)^2 + (\sigma_r^e - \sigma_\theta^e)^2 = 6k^2$$

Это условие дает возможность выразить постоянное интегрирование C через γ , получим¹

$$C = \gamma^2 \frac{\alpha \sqrt{3} \sqrt{3 + (\gamma^4 - q^2)(1 - 2\nu)^2} + (1 - 2\nu)^2 \gamma^2 q}{3 + \gamma^4 (1 - 2\nu)^2} \quad (13)$$

где $\alpha = \pm 1$.

Формулы (11) и (13) определяют два решения, в зависимости от выбора знака α . Из условия на окружности Γ_c (при $\rho = \gamma$), когда она совпадает с Γ_a (при $\gamma = a$), т. е. в момент возникновения пластической области, ясно, что²

$$\alpha = \operatorname{sign} \{ p [3 + a^4 (1 - 2\nu)^2] - q [3 + a^2 (1 - 2\nu)^2] \}$$

¹ Предполагается, что q таково, что стоящее под знаком радикала выражение положительно.

² Функция $\operatorname{sign} x$ определена равенствами

$$\operatorname{sign} x = +1 (x > 0), \quad \operatorname{sign} x = -1 (x < 0), \quad \operatorname{sign} 0 = 0$$

Таким образом знак α определяется однозначно из граничных условий.

Компоненты упругой деформации находятся из соотношений Гука.

Заметим, что в момент возникновения пластической области p и q должны удовлетворять равенству

$$3(p - q)^2 + (1 - 2\nu)^2(p\alpha^2 - q)^2 = 3(1 - \alpha^2)^2$$

Из формул (7) и (12) следует, что при $\rho = \gamma$

$$\sin \psi = \frac{\sigma_r^e - \sigma_\theta^e}{2k}, \quad \cos \psi = \frac{2\sigma_z^e - (\sigma_r^e + \sigma_\theta^e)}{2\sqrt{3}k}, \quad \Phi = 0$$

Эти условия в силу (13) могут быть представлены в виде при $\Phi = 0$

$$\sin \psi = -\frac{C}{\gamma^2}, \quad \cos \psi = -\frac{(1 - 2\nu)(C - q)}{\sqrt{3}}, \quad \rho = \gamma \tag{14}$$

где C дано формулой (13).

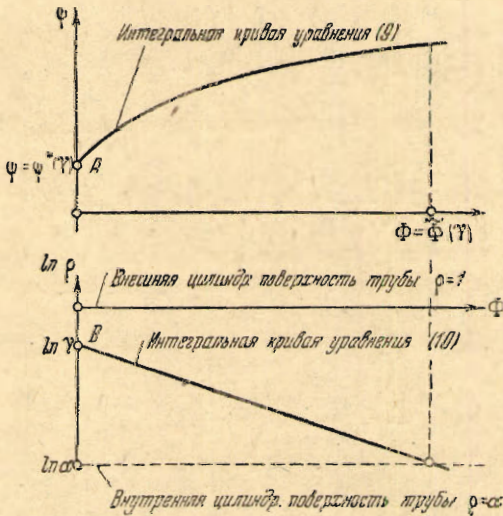
Формулы (14) определяют $\psi = \psi^*(\gamma)$ с точностью до числа, кратного 2π , не влияющего на компоненты напряжения.

В кольцевой пластической области ($\alpha \leq \rho \leq \gamma$) определение компонентов напряжения сводится к нахождению функции ψ и ρ из уравнений (9), (10) и условий (14). Пусть $\psi = \psi(\Phi, \gamma)$ есть решение уравнения (9), построенное при условии (14),

$$\psi(0, \gamma) = \psi^*(\gamma)$$

Тогда функция ρ в силу уравнения (10) и условия (14) определяется квадратурой

$$\rho = \gamma \exp \left\{ - \int_0^\Phi F_2 [\Phi, \psi(\Phi, \gamma)] d\Phi \right\} = \rho(\Phi, \gamma)$$



Фиг. 2

Решение окончательно получается в виде $\psi = \psi(\Phi, \gamma)$, $\rho = \rho(\Phi, \gamma)$

На фиг. 2 нанесены кривые, изображающие эти функции для какого-нибудь значения γ (при $\alpha = +1$). Подстановка функции $\psi = \psi(\Phi, \gamma)$ в формулы (7) и (8) дает возможность найти компоненты напряжения в виде

$$\sigma_r^p = \sigma_r^p(\Phi, \gamma), \quad \sigma_\theta^p = \sigma_\theta^p(\Phi, \gamma) \\ \sigma_z^p = \sigma_z^p(\Phi, \gamma)$$

причем Φ определена как функция ρ равенством

$$\rho(\Phi, \gamma) = \rho.$$

Компоненты пластической деформации определяются из соотношений Гейки (1) и (2).

Значение p , определяющее давление внутри трубы¹, дается формулой

$$p = p(\gamma) = \left[1 + 2 \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \exp \tilde{\Phi}(\gamma) \right] \frac{\cos \tilde{\psi}(\gamma)}{\sqrt{3}} - \sin \tilde{\psi}(\gamma)$$

причем $\tilde{\Phi}(\gamma)$ находится из уравнения

$$\rho(\Phi, \gamma) = \alpha$$

а

$$\tilde{\psi}(\gamma) = \psi[\tilde{\Phi}(\gamma), \gamma]$$

Заметим, что построенное решение выражено через параметр γ .

¹ Напомним, что давление внутри трубы обозначено через λp_i .

Для сравнения приведем известное решение рассматриваемой задачи по теории пластичности Сен-Венана (см. А. Надаи¹). Компоненты напряжения имеют вид

$$\sigma_r^e = -kq - \alpha k \gamma^2 \left(\frac{1}{\rho^2} - 1 \right) \quad \sigma_\theta^e = -kq + \alpha k \gamma^2 \left(\frac{1}{\rho^2} + 1 \right) \quad (15)$$

$$\sigma_r^p = -kq - \alpha k \left(1 - \gamma^2 + 2 \ln \frac{\gamma}{\rho} \right), \quad \sigma_\theta^p = -kq + \alpha k \left(1 + \gamma^2 - 2 \ln \frac{\gamma}{\rho} \right) \quad (16)$$

где

$$\alpha = \text{sign}(p - q)$$

Значение p дается формулой

$$p = p(\gamma) = q + \alpha \left(1 - \gamma^2 + 2 \ln \frac{\gamma}{a} \right)$$

В качестве примера рассмотрим задачу об определении напряжений и деформаций в трубе, находящейся только под действием внутреннего давления (внешнее давление отсутствует) при постепенном расширении пластической области. Пусть $a = 0.5$, а γ последовательно принимает значения 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0.

Так как $p > 0$, $q = 0$, то

$$\alpha = \text{sign } p = +1$$

В упругой области компоненты напряжения даются формулами (11) и (13) при $q = 0$, $\alpha = +1$

$$\sigma_r^e = - \frac{\sqrt{3} k \gamma^2}{\sqrt{3 + \gamma^4 (1 - 2\nu)^2}} \left(\frac{1}{\rho^2} - 1 \right), \quad \sigma_\theta^e = \frac{\sqrt{3} k \gamma^2}{\sqrt{3 + \gamma^4 (1 - 2\nu)^2}} \left(\frac{1}{\rho^2} + 1 \right) \quad (14')$$

$$\sigma_z^e = \frac{2\nu \sqrt{3} k \gamma^2}{\sqrt{3 + \gamma^4 (1 - 2\nu)^2}}$$

Компоненты деформации определяются из соотношений Гука.

В момент возникновения пластической области p должно иметь вид

$$p = \frac{\sqrt{3} (1 - a^2)}{\sqrt{3 + a^4 (1 - 2\nu)^2}}$$

При вычислениях принимаем $\nu = 0.25$.

В пластической области определение компонентов напряжения и деформации сводится к заполнению табл. 1.

Таблица 1

Φ	k	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.5	ψ	4.641									
	$-\ln \rho$	0.693									
0.6	ψ	4.609	4.638	4.662	4.684	4.703	4.719				
	$-\ln \rho$	0.511	0.546	0.582	0.618	0.655	0.692				
0.7	ψ	4.572	4.602	4.630	4.655	4.677	4.695	4.711	4.724	4.736	4.745
	$-\ln \rho$	0.356	0.393	0.430	0.467	0.504	0.542	0.580	0.619	0.658	0.688
0.8	ψ	4.530	4.566	4.597	4.625	4.649	4.670	4.688	4.703	4.716	4.727
	$-\ln \rho$	0.229	0.264	0.299	0.337	0.375	0.413	0.451	0.490	0.530	0.570
0.9	ψ	4.483	4.523	4.558	4.590	4.617	4.641	4.662	4.679	4.695	4.708
	$-\ln \rho$	0.105	0.145	0.185	0.224	0.262	0.301	0.340	0.380	0.429	0.460
1.0	ψ	4.432	4.477	4.517	4.552	4.582	4.609	4.633	4.654	4.671	4.687
	$-\ln \rho$	0	0.042	0.084	0.124	0.164	0.204	0.243	0.283	0.323	0.364

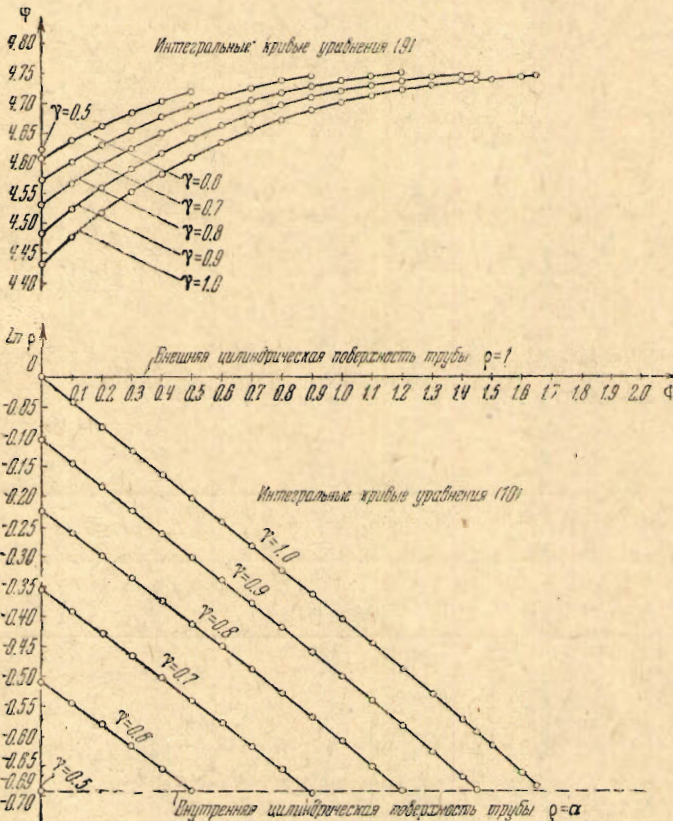
¹ А. Надаи. Пластичность. 1936.

Продолжение таблицы 1

Φ k	$\gamma = c/b$	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.45	1.5	1.6	1.65
		40	11	12	13	14	15	16	17	18
0.5	ψ									
	$-\ln \rho$									
0.6	ψ									
	$-\ln \rho$									
0.7	ψ									
	$-\ln \rho$									
0.8	ψ	4.736	4.744	4.750						
	$-\ln \rho$	0.610	0.652	0.694						
0.9	ψ	4.719	4.728	4.736	4.742	4.747	4.749			
	$-\ln \rho$	0.501	0.542	0.584	0.627	0.670	0.692			
1.0	ψ	4.700	4.711	4.720	4.728	4.734	4.737	4.739	4.743	4.745
	$-\ln \rho$	0.405	0.447	0.489	0.531	0.575	0.597	0.618	0.663	0.685

Условия (14) при $q = 0, z = +1$ могут быть переписаны в виде при $\Phi = 0$

$$\psi = \psi^*(\gamma) = \pi + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3 + \gamma^4(1 - 2\gamma)^2}}, \quad \rho = \gamma \tag{14'}$$



Фиг. 3.

интегральные кривые уравнений (9) и (10), построенные по координатам точек, вычисленным в таблице (фиг. 3).

¹ Вычисление значений ψ и $\ln \rho$ в каждой строке обрывается на тех клетках, в которых $\ln \rho \leq \ln a = -0.653$ (т. е. $\rho \leq a$).

где под \arcsin подразумевается его значение, заключающееся между 0 и $+\pi/2$; число кратное 2π , не влияющее на компоненты напряжения, опущено.

Заполнение табл. 1 проводится в следующем порядке.

В клетке 0-го столбца этой таблицы занесены значения $\psi^*(\gamma)$ и $\ln \gamma$ для $\gamma = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0$.

При помощи формул

$$\begin{aligned} \psi_{k+1} &= \psi_k + \Delta\Phi F_1(\Phi_k, \psi_k) \\ (\ln \rho)_{k+1} &= (\ln \rho)_k - \Delta\Phi F_2(\Phi_k, \psi_k) \end{aligned}$$

полученных из уравнений (9) и (10), последовательно вычисляются значения ψ и $\ln \rho$ во всех клетках каждой строки по значениям в нулевой клетке¹. Приращение независимого переменного Φ , определяющее точность расчета, принято равным

$$\Delta\Phi = 0.1$$

На фиг. 3 изображены

Значения компонентов напряжения и деформации в пластической области определяются по формулам (1), (2), (7) и (8).

В табл. 2 занесены найденные значения компонентов напряжения и деформации для $\gamma = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0$ на внутренней цилиндрической поверхности (при $\rho = a$), на границе между упругой и пластической областями (при $\rho = \gamma$) и на внешней цилиндрической поверхности (при $\rho = 1$). В первой строке получены значения внутренних давлений $k\rho$, соответствующих рассматриваемым значениям γ .

Пользуясь кривыми фиг. 3, можно найти значения компонентов напряжения и деформации для $\gamma = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0$ также в любой другой точке (при любом значении ρ в пределах $a \leq \rho \leq \gamma$) пластической области.

Для сравнения приведем решение того же примера по теории пластичности Сен-Венана. Перепишем формулы (15) и (16) при $q = 0, z = +1$

$$\sigma_r \gamma = -k\gamma^2 \left(\frac{1}{\rho^2} - 1 \right), \quad \sigma_\theta^e = k\gamma^2 \left(\frac{1}{\rho^2} + 1 \right) \quad (15')$$

$$\sigma_r^p = -k \left(1 - \gamma^2 + 2 \ln \frac{\gamma}{\rho} \right), \quad \sigma_\theta^p = k \left(1 + \gamma^2 - 2 \ln \frac{\gamma}{\rho} \right) \quad (16')$$

Таблица 2

$\gamma = c/b$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
При $\rho = a$	$- \sigma_r / k = p / k$	0.75	1.03	1.25	1.38	1.46	1.50
	σ_θ / k	1.25	0.97	0.75	0.62	0.54	0.50
	σ_z / k	0.12	-0.02	-0.19	-0.32	-0.40	-0.44
	$G\varepsilon_r / k$	0.44	0.83	1.30	1.77	2.26	2.75
	$G\varepsilon_\theta / k$	0.56	0.82	1.16	1.55	2.00	2.46
	$G\varepsilon_z / k$	0	0	0	0	0	0
При $\rho = \gamma$	$- \sigma_r / k$	0.75	0.64	0.50	0.35	0.18	0
	σ_θ / k	1.25	1.35	1.48	1.61	1.76	1.92
	σ_z / k	0.12	0.18	0.24	0.32	0.40	0.48
	$- G\varepsilon_r / k$	0.44	0.41	0.37	0.33	0.29	0.24
	$G\varepsilon_\theta / k$	0.56	0.59	0.62	0.65	0.68	0.72
	$G\varepsilon_z / k$	0	0	0	0	0	0
При $\rho = 1$	$- \sigma_r / k$	0	0	0	0	0	0
	σ_θ / k	0.50	0.72	0.97	1.26	1.58	1.92
	σ_z / k	0.12	0.18	0.24	0.32	0.40	0.48
	$- G\varepsilon_r / k$	0.06	0.09	0.12	0.16	0.20	0.24
	$G\varepsilon_\theta / k$	0.19	0.27	0.36	0.47	0.59	0.72
	$G\varepsilon_z / k$	0	0	0	0	0	0

Значение p , определяющее внутреннее давление в трубе, дается формулой

$$p = 1 - \gamma^2 + 2 \ln \frac{\gamma}{a}$$

В момент возникновения пластической области p должно иметь вид

$$p = 1 - a^2$$

В табл. 3 приведены значения компонентов напряжения σ_r и σ_θ , вычисленные на внутренней цилиндрической поверхности (при $\rho = a$), на границе между упругой и пластической областями (при $\rho = \gamma$) и на внешней цилиндрической поверхности (при $\rho = 1$), для $\gamma = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0$.

Таблица 3

$\gamma = c/b$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
При $\rho = \alpha$ $\left\{ \begin{array}{l} -\sigma_r/k = p/k \\ \sigma_\theta/k \end{array} \right.$	0.75	1.00	1.18	1.30	1.37	1.39
	1.25	1.00	0.82	0.70	0.63	0.61
При $\rho = \gamma$ $\left\{ \begin{array}{l} -\sigma_r/k \\ \sigma_\theta/k \end{array} \right.$	0.75	0.64	0.51	0.36	0.19	0
	1.25	1.36	1.49	1.64	1.81	2.00
При $\rho = 1$ $\left\{ \begin{array}{l} -\sigma_r/k \\ \sigma_\theta/k \end{array} \right.$	0	0	0	0	0	0
	0.50	0.72	0.98	1.28	1.62	2.00

Из сопоставления результатов, приведенных в табл. 2 и 3, видно, что значения основных компонентов напряжения σ_r и σ_θ , вычисленные по обеим теориям, мало отличаются друг от друга.

Поступила в редакцию
1. XI 1942

Институт механики
Академии Наук СССР

ELASTICO-PLASTIC STRESS STATE OF A TUBE UNDER THE ACTION OF UNIFORM INTERNAL AND EXTERNAL PRESSURES

W. W. SOKOLOVSKY

(Summary)

A tube is considered, whose cross-section is limited by two concentric circles Γ_a and Γ_b with radii a and b . This tube cannot be elongated in the longitudinal direction¹ ($\epsilon_z=0$) and is subjected to the action of the external and internal pressures (Fig. 1).

In the paper is investigated the elasto-plastic stress state of such a tube, according to the plasticity theory of Hencky-Mises, without introducing the admission of the non-compressibility of plastic material. Thereto there is supposed the continuity of the stress and deformation tensors at the boundary between the elastic and plastic regions (such a boundary will be the circle Γ_c with the radius c). The stress components in the elastic region (denoted by the letter e) are expressed in the forms (11) and (13).

Introducing the new functions σ and ψ with the aid of relationship (7) we reduce the problem of determining the stress components in the plastic region (designed by the letter p) to the finding of σ , ψ and φ depending on $\rho = r/b$. It is more convenient to consider σ , ψ and ρ as required functions and $\Phi = \ln(1 + \varphi)$ as the argument.

This allows reducing the solution of the problem to the integration of equations (9) and (10) under conditions of (14).

The obtained solution of the problem is expressed by the parameter $\gamma = c/b$.

The theory developed permits practical calculation with sufficient efficiency by application of numerical integration methods to equations (9) and (10).

In the given example is considered the problem of determining the stresses and deformations in a tube for a gradual dilatation of the plastic annular region.

¹ The case $\epsilon_z = \text{const}$ may be considered similarly.