Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика, том VII, 1943

ЗАМЕТКИ

ЯВЛЕНИЕ ДЖИБСА ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА

В. М. ДАРЕВСКИЙ

(Новосибирск)

Пусть на прямолинейный свободно опертый стержень, находившийся в момент $t=0$ в покое, действует поперечная сосредоточенная сила $P(t)=p\sin kt$, приложенная к середине стержня.

Введем обозначения: l—длина стержня, x—расстояние какой-либо точки стержня от его левого конца, M—масса стержня, ω—круговая частота первого тона свободных поперечных колебаний стержня.

Прогиб $y(x, t)$ стержня в точке x в момент t определяется равенством

$$y(x, t)=\frac{2p}{M}\sum_{n=1,3,5,\ldots}(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\frac{1}{n^4\omega^2-k^2}\left(\sin kt-\frac{k}{n^2\omega}\sin n^2\omega t\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{1}$$

если $n^4\omega^2-k^2\neq 0$ при $n=1, 3, 5, \ldots$

Этот прогиб будем называть динамическим, в отличие от «статического» прогиба $y_s(x, t)$, который имел бы место, если бы сила, равная $P(t)$ при том или ином значении t, была приложена к стержню статически. Прогиб $y_s(x, t)$ может быть выражен в виде ряда

$$y_s(x, t)=\frac{2p}{M\omega^2}\sin kt\sum_{n=1,3,5,\ldots}(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\frac{1}{n^4}\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{2}$$

Назовем динамическим эффектом для точки x в момент t величину

$$d(x, t)=\frac{y(x, t)}{y_s(x,t)}$$

Для чисто вынужденных колебаний, при которых по определению прогиб равен

$$\frac{2p}{M}\sin kt\sum_{n=1,3,5,\ldots}(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\frac{1}{n^4\omega^2-k^2}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

известно, что если k фиксировано, а $\omega\to\infty$, то отношение динамического прогиба к статическому в любой точке x стремится к 1, хотя обычно это устанавливается недостаточно строго (см., например[1]). В этом случае динамический эффект не зависит от t.

Реально говорить о чисто вынужденных колебаниях можно, только имея в виду достаточно большие значения t, при которых свободные колебания в силу тех или иных причин (внутреннее трение, сопротивление внешней среды) следует считать погашенными.

Таким образом нельзя судить по чисто вынужденным колебаниям о поведении динамического эффекта при $\omega\to\infty$ на достаточно малом интервале $(0, t)$, в частности, для кратковременной нагрузки. Цель настоящей заметки — выяснить поведение $d(x, t)$ при $\omega\to\infty$ с учетом свободных колебаний.

Докажем сперва, что $\lim d(x, t)=1$ при $\to\infty$ для любых фиксированных значениях k и t $(t\neq\nu\pi/k,\ \nu=0, 1, 2, \ldots)$ в любой точке x интервала $0<x<l$.

В самом деле, считая $\omega>k$, имеем из формул (1), (2)

$$d(x, t)=\frac{\sum(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\frac{1}{n^4}\frac{n^4\omega^2}{n^4\omega^2-k^2}\left(1-\frac{k}{n^2\omega}\frac{\sin n^2\omega t}{\sin kt}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}}{\sum(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\frac{1}{n^4}\sin\frac{n\pi x}{l}}\qquad \omega\to\infty\ (n=1,3,5,\ldots)$$

Ряд, стоящий в числителе, отличается от ряда, стоящего в знаменателе, только тем, что его члены содержат дополнительные множители

$$\varphi_n(\omega)=\frac{n^4\omega^2}{n^4\omega^2-k^2}\left(1-\frac{k}{n^2\omega}\,\frac{\sin n^2\omega t}{\sin kt}\right)\qquad (n=1,\ 3,\ 5,\ \ldots)$$

Рассматривая величины $\varphi_n(\omega)$ как множители сходимости[1] и замечая, что при фиксированных значениях k и t ($t\neq\nu\pi/k$, $\nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$) выполняются условия регулярности

1. $\lim\limits_{\omega\to\infty}\varphi_n(\omega)=1\qquad (n=1,\ 3,\ 5,\ \ldots)$

2. $\sum\limits_{n=1,3,5,\ldots}|\varphi_n(\omega)-\varphi_{n+2}(\omega)|$ ограничена на множестве всех значений $\omega>k$,

получаем

$$\lim_{\omega\to\infty}\sum_{n=1,3,5,\ldots}(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\frac{1}{n^4}\,\frac{n^4\omega^2}{n^4\omega^2-k^2}\left(1-\frac{k}{n^2\omega}\,\frac{\sin n^2\omega t}{\sin kt}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}=$$

$$=\sum_{n=1,3,5,\ldots}(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\frac{1}{n^4}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

поскольку ряд, стоящий в правой части, сходится.

Следовательно, $\lim\limits_{\omega\to\infty}d(x,\ t)=1$.

Этот способ доказательства применим также для чисто вынужденных колебаний

Покажем теперь, что **если k фиксировано, то как бы ни было велико ω, всегда можно указать такое достаточно малое $t\neq0$, при котором $d(x,\ t)>1+\varepsilon$** (ε—некоторая положительная постоянная), **или, точнее,**

$$\overline{\lim_{\omega,\ \frac{1}{t}\to\infty}}\ d(x,\ t)>1$$

для любого x из интервала $0<x<l$

Так как

$$y(x,\ t)=y(l-x,\ t)\qquad y_s(x,\ t)=y_s(l-x,\ t)$$

то при доказательстве можно ограничиться интервалом $0<x\leqslant\frac{1}{2}l$.

Считая $\omega>k$, представим $d(x,\ t)$ в виде

$$d(x,\ t)=\left[\frac{\omega^2}{\omega^2-k^2}\left(1-\frac{\sin\omega t}{\omega t}\,\frac{kt}{\sin kt}\right)+A(x,\ t)\right]\frac{\sin\pi x/l}{B(x)}$$

где

$$A(x,\ t)=\sum_{n=3,5,7,\ldots}(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\frac{\omega^2}{n^4\omega^2-k^2}\left(1-\frac{\sin n^2\omega t}{n^2\omega t}\,\frac{kt}{\sin kt}\right)\frac{\sin n\pi x/l}{\sin\pi x/l}$$

$$B(x)=\sum_{n=1,3,5,\ldots}(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\frac{1}{n^4}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

По довольно грубой, но достаточной для наших целей оценке получаем

$$|A(x,\ t)|<\sum_{n=3,5,7,\ldots}\frac{n}{n^4-1}\left(1+\frac{kt}{\sin kt}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{kt}{\sin kt}\right)\left(\frac{3}{3^4-1}+\frac{5}{5^4-1}+\frac{7}{7^4-1}+\sum_{n=9,11,\ldots}\frac{n^{-3}}{1-n^{-4}}\right)<$$

$$<\left(1+\frac{kt}{\sin kt}\right)\left(0.04843+\frac{1}{1-9^{4}}\,\frac{1}{9}\,\frac{1}{8}\right)=\left(1+\frac{kt}{\sin kt}\right)\times 0.06232\ \ldots$$

---

[1] О множителях сходимости см., например, статью O. Perron [2] или статью автора [3].

Далее, поскольку

$$B(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi^4}{96l^3} x(3l^2 - 4x^2), & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} l \\ \dfrac{\pi^4}{96l^3} (l-x)(8lx - l^2 - 4x^2), & \text{если } \frac{1}{2} < x \leqslant l \end{cases}$$

имеем для любого x из интервала $0 < x \leqslant \frac{1}{2} l$

$$0 < \frac{B(x)}{\sin \pi x / l} < \sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{1}{n^3} < 1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9} \frac{1}{8} < 1.062$$

Замечая, что среди отрицательных значений отношения $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ наибольшее по модулю будет при $\alpha = \alpha_1 = 4.49\ldots$ и что $\frac{\sin \alpha_1}{\alpha_1} = -0.2167$, получим, что при $\omega, \frac{1}{t} \to \infty$

$$\overline{\lim}\, d(x, t) > \frac{1}{1.062}(1 + 0.2167 - 2 \times 0.06233) = 1.027\ldots$$

Соединяя оба полученных результата, можно сказать, что в правой окрестности точки $t = 0$ имеет место так называемое явление Джибса.

Что касается точек $t = \nu\pi / k$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$, то без доказательства ясно, что в окрестности каждой такой точки имеет место явление Джибса, так как при указанных значениях t статический прогиб равен нулю, а динамический прогиб отличен от нуля, за исключением некоторых значений ω.

Поступила в редакцию 16 V 1942.

THE GIBBS PHENOMENON FOR DYNAMIC EFFECT

V. M. DAREVSKY

(Summary)

Let a transverse concentrated force $P(t) = p \sin kt$ be applied to the middle of a rectilinear freely-supported rod being at rest at the instant $t = 0$.

Denote l—the lenght of the rod, ω—the frequency of the first harmonic of free transverse oscillations of the rod. The ratio of the dynamic bending of the rod to the «static» bending we shall call the dynamic effect and denote $d(x, t)$.

In the present paper it is investigated the behaviour of the dynamic effect for $\omega \to \infty$, free oscillations being taken into account.

Firstly it is demonstrated that for any fixed values of k and t $(t \neq \nu(\pi / k),\ \nu = 0, 1, 2, \ldots)$

$$\lim_{\omega \to \infty} d(x, t) = 1$$

at anyone point x of the interval $0 < x < l$. (This result is known for purely forced oscillations, which is usually established not sufficiently rigorously.)

Secondly, it is established that for anyone x in the interval $0 < x < l$

$$\overline{\lim_{\omega,\, \frac{1}{t} \to \infty}}\, d(x, t) > 1$$

Thus, it becomes evident that the Gibbs phenomenon takes place for the dynamic effect in the right-hand vicinity of the point $t = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов А. Н. Вибрация судов. 1936. § 63,0; 63, 1.

2. Perron E. Beitrag zur Theorie der divergenten Reihen. Mathematische Zeitschrift. 1920. 6 [S. 286—317].

3. Даревский В. М. К вопросу о суммировании расходящихся рядов. Математический сборник. 1934; Т. 41; 3.