Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика, том VII, 1943

РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РАМ ИЗ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

Б. Н. ГОРБУНОВ
(Уфа)

1. Основные обозначения

Рассмотрим раму из тонкостенных стержней, лежащих в одной плоскости. Раму будем располагать всегда горизонтально, а оси координат следующим образом: ось z вверх; если ось x идет вправо от наблюдателя, то ось y — к наблюдателю (левая система координат).

Изложение особенностей кручения и изгиба тонкостенных стержней можно найти в книгах Уманского [1] и Власова [2]. В этой работе излагаем выведенные нами основные теоремы для расчета рам из тонкостенных стержней, работающих на пространственную нагрузку.

Будем пользоваться следующими обозначениями:

S — продольная сила в стержне, приложенная в его центре тяжести;

$M^{\text{в}}$, $M^{\text{г}}$ — моменты, изгибающие стержень в вертикальной и горизонтальной плоскостях, рассчитываемые относительно главных центральных осей инерции;

$M^{\text{к}}$ — крутящий момент, рассчитываемый относительно оси центра изгиба;

$\theta^{\text{в}}$, $\theta^{\text{г}}$, $\theta^{\text{к}}$ — углы поворотов при изгибе и кручении;

ω — единичная регулярная депланация, для открытых профилей равная секториальной площади точки сечения;

$\varkappa = -(\theta^{\text{к}})'$ — мера депланации;

$U = \omega\varkappa$ — депланация точки сечения вдоль оси x;

B — бимомент;

п, л — значки для обозначения правого и левого концов стержня, наконец,

$$J_\omega = \int_F \omega^2\, dF$$

Бимомент и $\varkappa$ считаются положительными, если знак напряжений и депланаций совпадает со знаком ω.

2. Депланация узла

Предполагаем, что в узлах стержни соединены верхней и нижней фасонками, бесконечно жесткими в своей плоскости и сконцентрированными в узле. При кручении стержней верхняя фасонка может упруго поворачиваться относительно нижней вокруг вертикальной оси, проходящей через центр изгиба воображаемого короткого вертикального тонкостенного стержня, расположенного между фасонками.

На этой оси на некоторой избранной высоте назначаем центр узла; пусть его расстояния до фасонок будут $z_в$ и $z_н$. Повернем верхнюю фасонку на угол, численно равный $z_в$, по часовой стрелке (если смотреть сверху), а нижнюю фасонку повернем на угол $z_н$ против часовой стрелки. Такую вынужденную возможную деформацию назовем единичной депланацией узла. Полная депланация узла равна единичной, умноженной на меру депланации узла $\varkappa^0$.

При единичной депланации узла концы сечений всех стержней в узле депланируют; но это будут вынужденные депланации, эпюры которых ω^0 не совпадают с эпюрами ω. Эпюры вынужденных депланаций легко построить, зная углы поворотов верхней и нижней фасонок.

3. Разложение деформаций на регулярные

Продольные (нормальные к сечению) деформации стержня будем называть регулярными, если при изгибе они следуют закону плоскости, а при кручении закону секториальных площадей или, в общем случае, закону ω. Отступления будем считать местными возмущениями, не влияющими на общую деформацию стержня. Если ось x направлена к наблюдателю вдоль стержня, то

$$U = \lambda + \theta^в z - \theta^г y + \varkappa\omega \tag{1}$$

Здесь λ — продольное перемещение центра тяжести, а оси координат совпадают с главными центральными осями инерции сечения.

Если при депланиции узла ω^0 не равно ω, то должны измениться также λ и θ

$$U = \lambda_0 + \theta^{в0} z - \theta^{г0} y + \varkappa^0 \omega^0 \tag{2}$$

Приравнивая (1) и (2), умножая результат последовательно на dF, $z\,dF$, $y\,dF$, $\omega\,dF$, после интегрирования, учитывая, что

$$\int\limits_F z\,dF = \int\limits_F y\,dF = \int\limits_F \omega\,dF = 0 \quad \text{и т. д.},$$

найдем

$$\lambda = \lambda^0 + \alpha^\lambda \varkappa^0, \qquad \theta^в = \theta^{в0} + \alpha^в \varkappa^0, \qquad \theta^г + \alpha^г \varkappa^0, \qquad \varkappa = \alpha^\varkappa \varkappa^0 \tag{3}$$

где

$$\alpha^\lambda = \frac{1}{F}\int\limits_F \omega^0\,dF, \quad \alpha^в = \frac{1}{J_y}\int\limits_F \omega^0 z\,dF, \quad \alpha^г = -\frac{1}{J_z}\int\limits_F \omega^0 y\,dF, \quad \alpha^\varkappa = \frac{1}{J_\omega}\int\limits_F \omega\omega^0\,dF \tag{4}$$

Если сечение имеет вертикальную ось симметрии, то при взаимном повороте фасонок вокруг этой оси α^λ и $\alpha^в$ равны нулю. Если сечение имеет горизонтальную ось симметрии, то при повороте фасонок в разные стороны на одинаковый угол $\alpha^\lambda = \alpha^г = 0$.

4. Уравнение равновесия бимоментов в узле

Нормальные напряжения в концевом сечении стержня равны

$$\sigma = \frac{S}{F} + \frac{M^в z}{J_y} - \frac{M^г y}{J_z} + \frac{B\omega}{J_\omega} \tag{5}$$

Дадим узлу возможную единичную депланацию. Тогда депланация конца каждого стержня будет следовать закону ω^0. Предполагаем, что стержни доходят до узла; поэтому на возможных депланациях совершат работу только нормальные напряжения. Согласно началу возможных перемещений приравниваем эту работу нулю

$$-\sum \int_F \sigma\omega^0 \, dF = 0$$

Подставляем сюда значение σ из (5), интегрируем и заменяем интегралы выражениями (4). В результате получим

$$\sum (S\alpha^{\lambda} + M^{\text{в}}\alpha^{\text{в}} + M^{\text{г}}\alpha^{\text{г}} + B\alpha^{\varkappa}) = 0 \tag{6}$$

Это выражение представляет собой уравнение равновесия бимоментов в узле в общем случае.

5. Вспомогательные формулы

Рассмотрим тонкостенный стержень, нагруженный по концам крутящими моментами и бимоментами. Зависимости между нагрузкой и деформациями на концах при пренебрежении вторичными деформациями сдвига найдем, интегрируя уравнение кручения тонкостенного стержня

$$-EJ_{\omega}\theta''' + GJ_d\theta' = M^{\text{к}}$$

Введем обозначение

$$k = \sqrt{\frac{GJ_d l^2}{EJ_{\omega}}}. \tag{7}$$

Указанные зависимости будут

$$\varkappa_{\text{п}} = \frac{1}{GJ_d}\left(\frac{k}{l}\frac{\operatorname{ch} k}{\operatorname{sh} k} B_{\text{п}} + \frac{k}{l}\frac{1}{\operatorname{sh} k} B_{\text{л}} - M_{\text{п}}^{\text{к}}\right)$$

$$\varkappa_{\text{л}} = \frac{1}{GJ_d}\left(\frac{k}{l}\frac{1}{\operatorname{sh} k} B_{\text{п}} + \frac{k}{l}\frac{\operatorname{ch} k}{\operatorname{sh} k} B_{\text{л}} - M_{\text{п}}^{\text{к}}\right) \tag{8}$$

$$\theta_{\text{п}}^{\text{к}} - \theta_{\text{л}}^{\text{к}} = \frac{1}{GJ_d}(M_{\text{п}}^{\text{к}} l - B_{\text{п}} - B_{\text{л}})$$

и

$$B_{\text{п}} = GJ_d \frac{l}{k}\frac{\operatorname{ch} k}{\operatorname{sh} k}\varkappa_{\text{п}} - GJ_d \frac{l}{k}\frac{1}{\operatorname{sh} k}\varkappa_{\text{л}} + \frac{l}{k}\frac{\operatorname{ch} k - 1}{\operatorname{sh} k} M_{\text{п}}^{\text{к}}$$

$$B_{\text{л}} = GJ_d \frac{l}{k}\frac{\operatorname{ch} k}{\operatorname{sh} k}\varkappa_{\text{л}} - GJ_d \frac{l}{k}\frac{1}{\operatorname{sh} k}\varkappa_{\text{п}} + \frac{l}{k}\frac{\operatorname{ch} k - 1}{\operatorname{sh} k} M_{\text{п}}^{\text{к}} \tag{9}$$

$$\theta_{\text{п}}^{\text{к}} - \theta_{\text{л}}^{\text{к}} = \frac{M_{\text{п}}^{\text{к}} l}{GJ_d} - \frac{l}{k}\frac{\operatorname{ch} k - 1}{\operatorname{sh} k}\left(\varkappa_{\text{п}} + \varkappa_{\text{л}} + 2\frac{M_{\text{п}}^{\text{к}}}{GJ_d}\right)$$

6. Уравнение четырех бимоментов

Сделаем в раме столько разрезов, сколько имеется полей, но в разрезах оставим закрепления, обеспечивающие одинаковую совместную депланацию разрезанных сечений. Тогда в разрезах будут передаваться бимоменты, а моменты и силы передаваться не могут. Такой контур будет статически неопределим относительно бимоментов, а изгибающие и крутящие моменты в нем рассчитываются как в статически-определимом контуре.

Каждому узлу контура дадим депланацию с мерою $\varkappa^0$ и построим эпюры ω^0 для концов каждого стержня.

Рассчитываем коэффициенты $\alpha^\varkappa$, α^λ, $\alpha^{\text{в}}$, $\alpha^{\text{г}}$. Для двух стержней $m-1, m$ и $m, m+1$, сходящихся в узле m, согласно (8) и (4) имеем

$$\varkappa_{m,m-1}{}^0 = \frac{1}{\alpha_{m,m-1}{}^\varkappa}\left[\bar{\varkappa}_{m,m-1} + \frac{1}{GJ_d}\left(\frac{k}{l}\frac{\operatorname{ch} k}{\operatorname{sh} k}B_{m,m-1} + \frac{k}{l}\frac{1}{\operatorname{sh} k}B_{m-1,m} - M_{m,m-1}{}^{\text{к}}\right)\right]$$

$$\varkappa_{m,m+1}{}^0 = \frac{1}{\alpha_{m,m+1}{}^\varkappa}\left[\bar{\varkappa}_{m,m+1} + \frac{1}{GJ_d}\left(\frac{k}{l}\frac{1}{\operatorname{sh} k}B_{m+1,m} + \frac{k}{l}\frac{\operatorname{ch} k}{\operatorname{sh} k}B_{m,m+1} - M_{m+1,m}{}^{\text{к}}\right)\right] \tag{10}$$

Здесь $\bar{\varkappa}$ — мера депланации конца стержня от нагрузки, расположенной между узлами, если $M^{\text{к}}$ ее не учитывает. Знаки моментов и бимоментов относятся не к узлу, а к концу стержня.

Приравнивая $\varkappa_{m,m-1}{}^0 = \varkappa_{m,m+1}{}^0$, получим уравнение четырех бимоментов

$$\beta_{m,m-1}B_{m-1,m} + \gamma_{m,m-1}B_{m,m-1} - \gamma_{m,m+1}B_{m,m+1} - \beta_{m,m+1}B_{m+1,m} =$$
$$= -\frac{\bar{\varkappa}_{m,m-1}}{\alpha_{m,m-1}{}^\varkappa} + \frac{\bar{\varkappa}_{m,m+1}}{\alpha_{m,m+1}{}^\varkappa} + \varepsilon_{m,m-1}M_{m,m+1}{}^{\text{к}} - \varepsilon_{m,m+1}M_{m+1,m}{}^{\text{к}} \tag{11}$$

Здесь

$$\beta = \frac{1}{GJ_d}\frac{1}{\alpha^\varkappa}\frac{k}{l}\frac{1}{\operatorname{sh} k}, \qquad \gamma = \frac{1}{GJ_d}\frac{1}{\alpha^\varkappa}\frac{k}{l}\frac{\operatorname{ch} k}{\operatorname{sh} k}, \qquad \varepsilon = \frac{1}{GJ_d}\frac{1}{\alpha^\varkappa}$$

Уравнения четырех бимоментов вместе с уравнениями (6) равновесия бимоментов в узлах позволяют определить все бимоменты на концах стержней в рассмотренном контуре.

7. Уравнения депланаций

Вместо определения бимоментов в описанном выше контуре можно определить величины $\varkappa^0$ в узлах, что часто сокращает количество неизвестных и уравнений. Подставляя (9) в уравнение (6), получим уравнение для определения величин $\varkappa^0$ в каждом узле k

$$\sum\Big[S_{\text{к}}\alpha_{\text{к}}{}^\lambda + M_{\text{к}}{}^{\text{в}}\alpha_{\text{к}}{}^{\text{в}} + M_{\text{к}}{}^{\text{г}}\alpha_{\text{к}}{}^{\text{г}} + GJ_d\frac{l}{k}\frac{\operatorname{ch} k}{\operatorname{sh} k}(\alpha_{\text{к}}{}^\varkappa)^2\varkappa_{\text{к}}{}^0 -$$
$$- GJ_d\frac{l}{k}\frac{1}{\operatorname{sh} k}\alpha_{\text{к}}{}^\varkappa\alpha_i{}^\varkappa\varkappa_i{}^0 + \frac{l}{k}\frac{\operatorname{ch} k - 1}{\operatorname{sh} k}\alpha_{\text{к}}{}^\varkappa(M_{\text{п}}{}^{\text{к}})_{\text{к}}\Big] = 0 \tag{12}$$

Знаки моментов относятся к концам стержней; если в узле находится левый конец стержня, то следует принять во внимание, что $M_{\text{п}}{}^{\text{к}} = -M_{\text{л}}{}^{\text{к}}$. Уравнение (12) годится для случая, когда между узлами нет крутящей нагрузки. В последнем случае нужно рассчитать $\bar{B}$, бимомент, действующий на конец стержня, в предположении, что концы стержня заделаны только против депланаций. Тогда уравнение примет вид

$$\sum\Big[S_{\text{к}}\alpha_{\text{к}}{}^\lambda + M_{\text{к}}{}^{\text{в}}\alpha_{\text{к}}{}^{\text{в}} + M_{\text{к}}{}^{\text{г}}\alpha_{\text{к}}{}^{\text{г}} + GJ_d\frac{l}{k}\frac{\operatorname{ch} k}{\operatorname{sh} k}(\alpha_{\text{к}}{}^\varkappa)^2\varkappa_{\text{к}}{}^0 -$$
$$- GJ_d\frac{l}{k}\frac{1}{\operatorname{sh} k}\alpha_{\text{к}}{}^\varkappa\alpha_i{}^\varkappa\varkappa_i{}^0 + \bar{B}_{\text{к}}\alpha_{\text{к}}{}^\varkappa\Big] = 0 \tag{13}$$

8. Расчет пространственных рам по методу сил

Раму превращаем в основную систему при помощи разрезов, где прикладываем лишние неизвестные. В разрезах оставляем закрепления, обеспечивающие одинаковую совместную депланацию сечений в разрезе. Поэтому основная система будет статически неопределимой относительно бимоментов.

Если лишней неизвестной является поперечная сила, то ее следует приложить в центр изгиба сечения; продольные силы следует прикладывать в центре тяжести. Изгибающие моменты рассчитываются относительно осей, проходящих через центр тяжести, а крутящие моменты — относительно осей, проходящих через центр изгиба. Расчетные длины стержней считаются по осям, проходящим через центр тяжести.

Прикладываем неизвестную $U_i = 1$ и рассчитываем изгибающие и крутящие моменты в стержнях основной системы. Затем определяем бимоменты в контуре от $U_i = 1$, составляя и решая уравнения четырех бимоментов, или же определяем величины $\varkappa^0$ от $U_i = 1$, составляя и решая уравнения депланаций (12).

Когда определены изгибающие и крутящие моменты, а также бимоменты или $\varkappa^0$ в стержнях и узлах от всех неизвестных $U = 1$ и от внешней нагрузки, можно рассчитать коэффициенты δ_{mi}. При пренебрежении деформациями от продольных и поперечных сил расчет производится по формуле

$$\delta_{mi} = \sum \int \frac{M_i^{\text{в}} M_m^{\text{в}}}{EJ} dx + \sum \int \frac{M_i^{\text{г}} M_m^{\text{г}}}{EJ} dx + \sum \frac{(M_{\text{п}}^{\text{к}})_i (M_{\text{п}}^{\text{к}} l - B_{\text{п}} - B_{\text{л}})_m}{GJ_d} + \sum B_i \varkappa_m \quad (14)$$

Величины $\varkappa_m$ вычисляются по (10). Первые три суммы распространяются на все стержни, а последняя сумма на все концы стержней. Третий член равен произведению крутящего момента на относительный угол поворота по формулам (8). Если стержни нагружены местными крутящими моментами, то при расчете они разбиваются на участки с постоянными крутящими моментами, и на границах этих участков рассчитываются B и $\varkappa$. Так же нужно поступить, если вместо (14) воспользоваться формулой (15), удобной для случая, когда за лишние неизвестные в основном контуре приняты величины $\varkappa^0$

$$\begin{aligned} \delta_{ik} = {} & \sum \int \frac{M_i^{\text{в}} M_m^{\text{в}}}{EJ} dx + \sum \int \frac{M_i^{\text{г}} M_m^{\text{г}}}{EJ} dx + \\ & + \sum (M_{\text{п}}^{\text{к}})_i \left[\frac{M_{\text{п}}^{\text{к}} l}{GJ_d} - \frac{l}{k} \frac{\operatorname{ch} k - 1}{\operatorname{sh} k} \left(\varkappa_{\text{п}} + \varkappa_{\text{л}} + \frac{2M_{\text{п}}^{\text{к}}}{GJ_d} \right) \right]_m - \\ & - \sum S_i \alpha^{\lambda} \varkappa_m^0 - \sum \check{M}_i^{\text{в}} \alpha^{\text{в}} \varkappa_m^0 - \sum \check{M}_i^{\text{г}} \alpha^{\text{г}} \varkappa_m^0 \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $\check{M}$ обозначают моменты на концах стержней. Продольная сила S и изгибающие моменты $\check{M}$ вводятся с положительным знаком, если их векторы совпадают с направлением осей координат в узле.

Поступила в редакцию
30 X 1942

Институт строительной механики
Академии Наук БССР

THE CALCULATION OF A SPACE FRAME WITH THIN-WALLED BARS

B. N. GORBUNOV

(Summary)

The first paragraph gives the basic notations.

The author defines the conceptions of the so-called unit angular displacement of a knot (§ 2) and the regular deformations (§ 3) in terms of which may be expressed the deformations of the bars.

In the fourth paragraph is given the equilibrium equation (6) of bimoments of a knot in a general case. This equation and equation (11) of four bimoments (§ 6) determine all the bimoments on the bar ends.

The author suggests (§ 7), for reducing the work, to calculate the so-called measure of angular displacement instead of the bimoments.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уманский. А. А. Кручение и изгиб тонкостенных авиаконструкций. 1939. Москва.
2. Власов. В. З. Тонкостенные упругие стержни. Москва. 1940.