Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика, том VII, 1943

УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ БЕЗМОМЕНТНЫХ ОБОЛОЧЕК

В. В. СОКОЛОВСКИЙ

(Москва)

В этой статье проводится исследование общих уравнений равновесия безмоментных оболочек. Для большинства практически интересных задач эти уравнения преобразуются к простым видам, а в ряде случаев допускают замкнутые решения.

Уравнения равновесия безмоментных оболочек имеют вид

$$B\frac{\partial N_\alpha}{\partial\alpha}+A\frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial\beta}+2N_{\alpha\beta}\frac{\partial A}{\partial\beta}+(N_\alpha-N_\beta)\frac{\partial B}{\partial\alpha}+ABX=0$$

$$B\frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial\alpha}+A\frac{\partial N_\beta}{\partial\beta}-(N_\alpha-N_\beta)\frac{\partial A}{\partial\beta}+2N_{\alpha\beta}\frac{\partial B}{\partial\alpha}+ABY=0 \qquad (1)$$

$$\frac{N_\alpha}{R_1}+\frac{N_\beta}{R_2}+Z=0 \qquad (2)$$

Мы пользуемся здесь обозначениями, принятыми в курсе A. Love [1]; усилия же обозначаем по *W*. Flügge [2].

За криволинейные координаты $\beta=\mathrm{const}$ и $\alpha=\mathrm{const}$ приняты линии кривизны средней поверхности оболочки; соответствующие главные радиусы кривизны обозначены через R_1 и R_2.

Исключая[1] N_β при помощи уравнения (2), получим

$$B\frac{\partial N_\alpha}{\partial\alpha}+A\frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial\beta}+N_\alpha\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\frac{\partial B}{\partial\alpha}+2N_{\alpha\beta}\frac{\partial A}{\partial\beta}=P$$

$$B\frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial\alpha}-A\frac{R_2}{R_1}\frac{\partial N_\alpha}{\partial\beta}-N_\alpha\frac{\partial}{\partial\beta}\left[A\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\right]+2N_{\alpha\beta}\frac{\partial B}{\partial\alpha}=Q \qquad (3)$$

$$P=-ABX-R_2\frac{\partial B}{\partial\alpha}Z,\qquad Q=-ABY+R_2\frac{\partial A}{\partial\beta}Z+A\frac{\partial}{\partial\beta}(R_2Z)$$

Уравнение характеристик системы уравнений (3) имеет вид

$$\frac{R_2}{R_1}\left(\frac{A}{B}\right)^2d\alpha^2+d\beta^2=0 \qquad (4)$$

Таким образом уравнения (3) имеют два мнимых, два действительных различных или одно действительное семейства характеристик и, следовательно, принадлежат соответственно к эллиптическому, гиперболическому или параболическому типам, в зависимости от того, будет ли гауссова кривизна средней поверхности оболочки положительной, отрицательной или нулем.

---

[1] Предполагается, что главная кривизна $1/R_2$ отлична от нуля.

В случае $\frac{1}{R_1R_2}>0$ уравнение (4) разлагается на два уравнения вида

$$\chi\frac{A}{B}d\alpha \pm i d\beta = 0 \tag{5}$$

где $\chi=|R_2/R_1|$.

Если обозначить через $\mu(\alpha,\beta)\pm i\nu(\alpha,\beta)=\text{const}$ общие интегралы этих уравнений и принять μ и ν за независимые переменные, то уравнения (3) преобразуются к виду

$$\begin{aligned}
\chi\frac{\partial N_\alpha}{\partial\mu}+\frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial\nu} &= -\frac{\chi}{B}\left(2N_{\alpha\beta}\frac{\partial A}{\partial\beta}+N_\alpha(1+\chi^2)\frac{\partial B}{\partial\alpha}-P\right)\frac{\partial\alpha}{\partial\mu}-\\
&\quad-\frac{1}{B}\left(2N_{\alpha\beta}\frac{\partial B}{\partial\alpha}-N_\alpha\frac{\partial}{\partial\beta}[A(1+\chi^2)]-Q\right)\frac{\partial\alpha}{\partial\nu}\\
\frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial\mu}-\chi\frac{\partial N_\alpha}{\partial\nu} &= \frac{\chi}{B}\left(2N_{\alpha\beta}\frac{\partial A}{\partial\beta}+N_\alpha(1+\chi^2)\frac{\partial B}{\partial\alpha}-P\right)\frac{\partial\alpha}{\partial\nu}-\\
&\quad-\frac{1}{B}\left(2N_{\alpha\beta}\frac{\partial B}{\partial\alpha}-N_\alpha\frac{\partial}{\partial\beta}[A(1+\chi^2)]-Q\right)\frac{\partial\alpha}{\partial\mu}
\end{aligned}\tag{6}$$

В случае $\frac{1}{R_1R_2}<0$ уравнение (4) разлагается на два уравнения вида

$$\chi\frac{A}{B}d\alpha\pm d\beta=0 \tag{7}$$

где $\chi=|R_2|R_1|$.

Если общие интегралы этих уравнений обозначить через $\xi(\alpha,\beta)=\text{const}$ и $\eta(\alpha,\beta)=\text{const}$ и принять ξ и η за независимые переменные, то уравнения (3) преобразуются к виду

$$\begin{aligned}
\chi\frac{\partial N_\alpha}{\partial\xi}+\frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial\xi} &= -\frac{1}{B}\Big\{\left(\chi(1-\chi^2)\frac{\partial B}{\partial\alpha}-\frac{\partial}{\partial\beta}[A(1-\chi^2)]\right)N_\alpha+\\
&\quad+2\left(\chi\frac{\partial A}{\partial\beta}+\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)N_{\alpha\beta}-\chi P-Q\Big\}\frac{\partial\alpha}{\partial\xi}\\
\chi\frac{\partial N_\alpha}{\partial\eta}-\frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial\eta} &= -\frac{1}{B}\Big\{\left(\chi(1-\chi^2)\frac{\partial B}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\beta}[A(1-\chi^2)]\right)N_\alpha+\\
&\quad+2\left(\chi\frac{\partial A}{\partial\beta}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)N_{\alpha\beta}-\chi P+Q\Big\}\frac{\partial\alpha}{\partial\eta}
\end{aligned}\tag{8}$$

Ниже рассматриваются несколько типов оболочек. Для всех этих типов уравнения характеристик (5) и (7) являются уравнениями с разделяющимися переменными. При этом интегралы уравнений (5) будут $\mu(\alpha)\pm i\nu(\beta)=\text{const}$, а интегралы уравнений (7) могут быть представлены соответственно в виде $\xi=\mu(\alpha)+\nu(\beta)=\text{const}$ и $\eta=\mu(\alpha)-\nu(\beta)=\text{const}$.

Оболочки вращения. Пусть средняя поверхность оболочки образована вращением вокруг оси z кривой $z=z(\theta)$, $r=r(\theta)\geqslant 0$; через θ обозначен угол между нормалью к кривой и осью z. Выберем за параметры α и β углы θ и φ. Уравнения поверхности вращения имеют вид

$$x=r(\theta)\cos\varphi,\qquad y=r(\theta)\sin\varphi,\qquad z=z(\theta)$$

Имеем

$$A=\frac{|z'|}{\sin\theta},\qquad B=r,\qquad \chi^2=\frac{r}{|z'|}$$

и

$$\mu=\int\frac{d\theta}{\chi\sin\theta}, \qquad \nu=\varphi$$

Рассмотрим поверхности, образованные вращением кривой

$$\frac{r^2}{a}+\frac{z^2}{c}=1$$

уравнения которой могут быть также представлены в виде

$$z^2=c\cos^2\theta\,(1-e\sin^2\theta)^{-1}, \qquad r^2=\frac{a^2}{c}\sin^2\theta\,(1-e\sin^2\theta)^{-1}$$

где $e=1-a/c$.

Имеем

$$A^2=\frac{a^2}{c}(1-e\sin^2\theta)^{-3}, \qquad B^2=\frac{a^2}{c}\sin^2\theta\,(1-e\sin^2\theta)^{-1}, \qquad \chi^2=|1-e\sin^2\theta|$$

и

$$\mu=\ln\left|\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sqrt{|1-e\sin^2\theta|}}\right|, \qquad \nu=\varphi$$

Для эллипсоида вращения ($a>0$, $c>0$) и двухполостного гиперболоида вращения ($a<0$, $c>0$) путем замены переменных

$$N_\alpha=\chi\sin^{-2}\theta\, s, \qquad N_{\alpha\beta}=\chi^2\sin^{-2}\theta\, t \tag{9}$$

Уравнения (6) преобразуются к виду [1]

$$\frac{\partial s}{\partial\mu}+\frac{\partial t}{\partial\nu}=-\frac{a\sin^3\theta}{\sqrt{c}\,(1-e\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\,(X+\operatorname{ctg}\theta\, Z)$$

$$\frac{\partial t}{\partial\mu}-\frac{\partial s}{\partial\nu}=-\frac{a\sin^3\theta}{\sqrt{c}\,(1-e\sin^2\theta)^2}\left(Y-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Z}{\partial\varphi}\right) \tag{10}$$

Для однополостного гиперболоида вращения ($a>0$, $c<0$) уравнения (8) преобразуются к виду

$$\begin{aligned}\frac{\partial s}{\partial\xi}+\frac{\partial t}{\partial\xi}&=\frac{a}{\sqrt{-c}}\frac{\sin^3\theta}{2\chi^4}\left\{-(\chi X+Y)+\chi\operatorname{ctg}\theta\, Z+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Z}{\partial\varphi}\right\}\\ \frac{\partial s}{\partial\eta}-\frac{\partial t}{\partial\eta}&=\frac{a}{\sqrt{-c}}\frac{\sin^3\theta}{2\chi^4}\left\{-(\chi X-Y)+\chi\operatorname{ctg}\theta\, Z-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Z}{\partial\varphi}\right\}\end{aligned} \tag{11}$$

Решения этих уравнений получаются в замкнутом виде. Для краткости письма мы приведем здесь решение лишь при отсутствии внешних сил ($X=Y=Z=0$). Имеем

$$N_\alpha=\frac{\sqrt{e\sin^2\theta-1}}{\sin^2\theta}\{F_1(\mu+\nu)+F_2(\mu-\nu)\} \tag{12}$$

$$N_{\alpha\beta}=\frac{e\sin^2\theta-1}{\sin^2\theta}\{-F_1(\mu+\nu)+F_2(\mu-\nu)\}$$

где F_1 и F_2 — произвольные функции.

Рассмотрим параболоид, образованный вращением параболы $r^2=-2az$, уравнения которой могут быть представлены в виде $z=-\frac{1}{2}a\operatorname{tg}^2\theta$, $r=a\operatorname{tg}\theta$.

Имеем

$$A=a\cos^{-3}\theta, \qquad B=a\operatorname{tg}\theta, \qquad \chi=\cos\theta$$

и

$$\mu=\ln\operatorname{tg}\theta, \qquad \nu=\varphi$$

[1] Случай сферы, когда $e=0$ и $\mu=\ln\operatorname{tg}(\theta/2)$, был рассмотрен в работе [2].

Путем замены переменных (9) для параболоида вращения уравнения (6) преобразуются к виду

$$\frac{\partial s}{\partial \mu}+\frac{\partial t}{\partial \nu}=-a\,\mathrm{tg}^3\,\theta\,(X+\mathrm{ctg}\,\theta\, Z),\qquad \frac{\partial t}{\partial \mu}-\frac{\partial s}{\partial \nu}=-a\frac{\mathrm{tg}^3\,\theta}{\cos\theta}\left(Y-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Z}{\partial \varphi}\right) \tag{13}$$

Приведем решение уравнений (10) и (13) в рядах. Пусть внешние силы могут быть представлены в виде

$$X=\sum_{n=0}^{\infty} X_n(\theta)\cos n\varphi,\qquad Y=\sum_{n=1}^{\infty} Y_n(\theta)\sin n\varphi,\qquad Z=\sum_{n=0}^{\infty} Z_n(\theta)\cos n\varphi$$

Будем искать s и t в виде

$$s=\sum_{n=0}^{\infty} s_n(\theta)\cos n\varphi,\qquad t=\sum_{n=1}^{\infty} t_n(\theta)\sin n\varphi$$

Уравнения (10) и (13) перейдут в обыкновенные уравнения вида

$$\begin{aligned}\frac{\partial s_n}{\partial \mu}+nt_n&=-\frac{a\sin^3\theta}{\sqrt{c}\,(1-e\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}(X_n+\mathrm{ctg}\,\theta\, Z_n)\\ \frac{\partial t_n}{\partial \mu}+ns_n&=-\frac{a\sin^3\theta}{\sqrt{c}\,(1-e\sin^2\theta)^2}\left(Y_n+\frac{n}{\sin\theta}Z_n\right)\end{aligned} \tag{10'}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial s_n}{\partial \mu}+nt_n&=-a\,\mathrm{tg}^3\,\theta\,(X_n+\mathrm{ctg}\,\theta\, Z_n)\\ \frac{\partial t_n}{\partial \mu}+ns_n&=-a\frac{\mathrm{tg}^3\,\theta}{\cos\theta}\left(Y_n+\frac{n}{\sin\theta}Z_n\right)\end{aligned} \tag{13'}$$

Решения этих уравнений могут быть представлены в квадратурах: для эллипсоида и двухполостного гиперболоида

$$s_n=A_n\left|\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sqrt{|1-e\sin^2\theta|}}\right|^n+B_n\left|\frac{\cos\theta+\sqrt{|1-e\sin^2\theta|}}{\sin\theta}\right|^n$$

$$t_n=-A_n\left|\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sqrt{|1-e\sin^2\theta|}}\right|^n+B_n\left|\frac{\cos\theta+\sqrt{|1-e\sin^2\theta|}}{\sin\theta}\right|^n$$

для параболоида

$$s_n=A_n\,\mathrm{tg}^n\,\theta+B_n\mathrm{ctg}^n\,\theta,\qquad t_n=-A_n\mathrm{tg}^n\,\theta+B_n\mathrm{ctg}^n\,\theta$$

Для краткости мы привели здесь решение лишь при отсутствии внешних сил ($X=Y=Z=0$). При наличии внешних сил следует найти еще частные решения уравнений(10′) и (13′) методом вариации произвольных постоянных.

Усилия N_θ, N_φ и $N_{\theta\varphi}$ будут

$$N_\theta=\sum_{n=0}^{\infty} N_{\theta n}(\theta)\cos n\varphi,\qquad N_\varphi=\sum_{n=0}^{\infty} N_{\varphi n}(\theta)\cos n\varphi,\qquad N_{\theta\varphi}=\sum_{n=1}^{\infty} N_{\theta\varphi n}(\theta)\sin n\varphi \tag{14}$$

Входящие в эти формулы $N_{\theta n}$, $N_{\theta\varphi n}$ имеют вид: для эллипсоида и двухполостного гиперболоида

$$\begin{aligned}N_{\theta n}&=\frac{\sqrt{|1-e\sin^2\theta|}}{\sin^2\theta}\left\{A_n\left|\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sqrt{|1-e\sin^2\theta|}}\right|^n+\right.\\ &\left.+B_n\left|\frac{\cos\theta+\sqrt{|1-e\sin^2\theta|}}{\sin\theta}\right|^n\right\}\\ N_{\theta\varphi n}&=\frac{|1-e\sin^2\theta|}{\sin^2\theta}\left\{-A_n\left|\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sqrt{|1-e\sin^2\theta|}}\right|^n+\right.\\ &\left.+B_n\left|\frac{\cos\theta+\sqrt{|1-e\sin^2\theta|}}{\sin\theta}\right|^n\right\}\end{aligned} \tag{15}$$

для параболоида

$$N_{\theta n}=\frac{\operatorname{ctg}\theta}{\sin\theta}\ \{A_n \operatorname{tg}^n\theta+B_n \operatorname{ctg}^n\theta\}$$

$$N_{\theta\varphi n}=\operatorname{ctg}^2\theta\,\{-A_n \operatorname{tg}^n\theta+B_n \operatorname{ctg}^n\theta\} \tag{16}$$

Известное решение Г. Рейсснера для сферы [2] следует из (15) при $e=0$; решение (16) уже было построено другим путем в нашей статье [3].

Выражение для $N_{\varphi n}$ может быть легко найдено из уравнения

$$\frac{N_{\theta n}}{R_1}+\frac{N_{\varphi n}}{R_2}+Z_n=0$$

которые получается из уравнения (2) в силу (14).

Оболочки, имеющие форму центральных поверхностей второго порядка $x^2/a+y^2/b+z^2/c=1$. Уравнения этих поверхностей могут быть представлены в виде

$$x^2=\frac{a(a-\alpha)(a-\beta)}{(a-b)(a-c)},\qquad y^2=\frac{b(b-\alpha)(b-\beta)}{(b-c)(b-a)},\qquad z^2=\frac{c(c-\alpha)(c-\beta)}{(c-b)(c-a)}$$

имеем

$$A^2=\frac{\alpha(\alpha-\beta)}{4(a-\alpha)(b-\alpha)(c-\alpha)},\qquad B^2=-\frac{\beta(\alpha-\beta)}{4(a-\beta)(b-\beta)(c-\beta)},\qquad \chi^2=\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|$$

и

$$\mu=\int\frac{d\alpha}{\sqrt{|(a-\alpha)(b-\alpha)(c-\alpha)|}},\qquad \nu=\int\frac{d\beta}{\sqrt{|(a-\beta)(b-\beta)(c-\beta)|}}$$

Для эллипсоида $(a>\beta>b>\alpha>c>0)$ и двухполостного гиперболоида $(a>0>b>\beta>c>\alpha>-\infty)$ при отсутствии внешних сил $(X=Y=Z=0)$ путем замены переменных

$$N_\alpha=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\frac{1}{\alpha-\beta}s,\qquad N_{\alpha\beta}=\frac{1}{\alpha-\beta}t \tag{17}$$

уравнения (6) преобразуются к виду[1]

$$\frac{\partial s}{\partial\mu}+\frac{\partial t}{\partial\nu}=0,\qquad \frac{\partial t}{\partial\mu}-\frac{\partial s}{\partial\nu}=0 \tag{18}$$

Для однополостного гиперболоида $(a>\alpha>b>0>c>\beta>-\infty)$ при отсутствии внешних сил $(X=Y=Z=0)$ решения уравнений (8) имеют вид

$$N_\alpha=\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}\ \frac{1}{\alpha-\beta}\{F_1(\mu+\nu)+F_2(\mu-\nu)\},$$

$$N_{\alpha\beta}=\frac{1}{\alpha-\beta}\{-F_1(\mu+\nu)+F_2(\mu-\nu)\} \tag{19}$$

где F_1 и F_2—произвольные функции.

Оболочка, имеющая форму эллиптического параболоида $x^2/a+y^2/b=2z$. Уравнения этой поверхности могут быть представлены в виде $(a<\alpha<b<<\beta<+\infty)$

$$x^2=-\frac{a(a-\alpha)(a-\beta)}{a-b},\qquad y^2=\frac{b(b-\alpha)(b-\beta)}{a-b},\qquad 2z=\alpha+\beta-(a+b)$$

Имеем

$$A^2=\frac{\alpha(\alpha-\beta)}{4(a-\alpha)(b-\alpha)},\qquad B^2=-\frac{\beta(\alpha-\beta)}{4(a-\beta)(b-\beta)},\qquad \chi^2=\frac{\beta}{\alpha}$$

и

$$\mu=\int\frac{d\alpha}{\sqrt{-(a-\alpha)(b-\alpha)}},\qquad \nu=\int\frac{d\beta}{\sqrt{(a-\beta)(b-\beta)}}$$

---

[1] При наличии внешних сил уравнения (18) будут иметь правые части, содержащие X, Y и Z.

Преобразование уравнений равновесия оболочек к уравнениям (18) для эллипсоида и двухполостного гиперболоида было несколько иным путем проведено В. З. Власовым [5].

Путем замены переменных (17) при отсутствии внешних сил ($X=Y=Z=0$) уравнения (6) преобразуются в уравнения (18).

Вернемся к уравнениям (3) и рассмотрим случай, когда $1/R_1=0$. Характеристиками являются $\beta=\mathrm{const}$, уравнения (3) принадлежат к параболическому типу и имеют вид

$$
\begin{gathered}
B\frac{\partial N_\alpha}{\partial\alpha}+A\frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial\beta}+N_\alpha\frac{\partial B}{\partial\alpha}+2N_{\alpha\beta}\frac{\partial A}{\partial\beta}=P \\
B\frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial\alpha}-N_\alpha\frac{\partial A}{\partial\beta}+2N_{\alpha\beta}\frac{\partial B}{\partial\alpha}=Q
\end{gathered}
\tag{20}
$$

Ниже приведено несколько примеров[1].

Цилиндрические оболочки. Пусть ось z направлена параллельно образующим цилиндра; обозначим через φ угол между нормалью и направляющей кривой, расположенной в плоскости $z=0$, и осью x.

Выберем за параметры α и β соответственно $\zeta=z/a$ и φ и будем обозначать $R_2=a\rho$, где a—какое-нибудь характерное значение R_2. Тогда $A=a$ и $B=a\rho$.

Решения уравнений (20) имеют вид

$$
\begin{gathered}
N_z=F_1(\varphi)-\frac{\zeta}{\rho}F_2'(\varphi)-a\int X\,d\zeta+\frac{a}{\rho}\int\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\int Y\,d\zeta\right)d\zeta- \\
-\frac{a}{\rho}\int\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\int\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho Z)\,d\zeta\right)d\zeta \\
N_{z\varphi}=F_2(\varphi)-a\int Y\,d\zeta+\frac{a}{\rho}\int\frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho Z)\,d\zeta
\end{gathered}
\tag{21}
$$

где $F_1(\varphi)$ и $F_2(\varphi)$ — произвольные функции.

Круговая коническая оболочка. Пусть вершина конуса расположена на оси z; обозначим через a радиус сечения конуса плоскостью $z=0$. Примем за параметры α и β переменное $\zeta=z/a$ и полярный угол φ.

Уравнения кругового конуса имеют вид

$$
x=a(1-\operatorname{tg}\gamma\,\zeta)\cos\varphi,\qquad y=a(1-\operatorname{tg}\gamma\,\zeta)\sin\varphi,\qquad z=a\zeta
$$

где 2γ — угол при вершине конуса.

Имеем

$$
A=a\cos^{-1}\gamma,\qquad B=a(1-\operatorname{tg}\gamma\zeta)
$$

Решения уравнений (20) имеют вид:

$$
\begin{gathered}
N_z=\frac{F_1(\varphi)}{1-\operatorname{tg}\gamma\,\zeta}-\frac{F_2{}'(\varphi)}{(1-\operatorname{tg}\gamma\,\zeta)^2\sin\gamma}-\frac{a}{(1-\operatorname{tg}\gamma\,\zeta)\cos\gamma}\int(1-\operatorname{tg}\gamma\,\zeta)(X-\operatorname{tg}\gamma\,Z)\,d\zeta+ \\
+\frac{a}{(1-\operatorname{tg}\gamma\,\zeta)\cos^2\gamma}\int\left\{\frac{1}{(1-\operatorname{tg}\gamma\,\zeta)^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\int(1-\operatorname{tg}\gamma\,\zeta)^2\left(Y-\frac{1}{\cos\gamma}\frac{\partial Z}{\partial\varphi}\right)d\zeta\right\}d\zeta \\
N_{z\varphi}=\frac{F_2(\varphi)}{(1-\operatorname{tg}\gamma\,\zeta)^2}-\frac{a}{(1-\operatorname{tg}\gamma\,\zeta)^2\cos\gamma}\int(1-\operatorname{tg}\gamma\,\zeta)^2\left(Y-\frac{1}{\cos\gamma}\frac{\partial Z}{\partial\varphi}\right)d\zeta
\end{gathered}
\tag{22}
$$

где $F_1(\varphi)$ и $F_2(\varphi)$ — произвольные функции.

Оболочка, имеющая форму поверхности с постоянным углом ската. Пусть $x=x(\varphi)$, $y=y(\varphi)$ есть уравнение кривой, расположенной в плоскости $z=0$, радиус которой обозначен через $R=R(\varphi)$; через φ обозначен угол между

[1] Решения (21) и (22) общеизвестны и приведены лишь для полноты.

нормалью к кривой и осью x. Уравнения поверхности с постоянным углом ската, построенной на этой кривой, имеет вид [1]

$$x = x(\varphi) - a \operatorname{tg}\gamma\, \zeta \cos\varphi, \qquad y = y(\varphi) - a \operatorname{tg}\gamma\, \zeta \sin\varphi, \qquad z = a\zeta$$

где γ — угол между образующими и осью z; a — какое-нибудь характерное значение радиуса R.

Форму такой поверхности можно проиллюстрировать при помощи кучи песка с углом внутреннего трения $\frac{1}{2}\pi - \gamma$, покрывающей пластинку, ограниченную кривой $x = x(\varphi)$, $y = y(\varphi)$.

Выберем за параметры α и β соответственно ζ и φ и будем обозначать $R = a\rho$.

Имеем

$$A = a\cos^{-1}\gamma, \qquad B = a(\rho - \operatorname{tg}\gamma\,\zeta)$$

Решения уравнений (20) при отсутствии внешних сил ($X = Y = Z = 0$) имеют вид

$$N_z = \frac{F_1(\varphi)}{\rho - \operatorname{tg}\gamma\,\zeta} - \frac{F_2'(\varphi)}{\sin\gamma\,(\rho - \operatorname{tg}\gamma\,\zeta)^2} + \frac{F_2(\varphi)\,\rho'(\varphi)}{\sin\gamma\,(\rho - \operatorname{tg}\gamma\,\zeta)^3}, \tag{23}$$
$$N_{z\varphi} = \frac{F_2(\varphi)}{(\rho - \operatorname{tg}\gamma\,\zeta)^2}$$

где $F_1(\varphi)$ и $F_2(\varphi)$ — произвольные функции.

Коническая оболочка. Пусть вершина конуса расположена на оси z на расстоянии l от начала координат, а уравнением его сечения плоскостью xy будет $r = r(\varphi)$. Выберем за параметры α и β координату $\zeta = z/l$ и полярный угол φ.

Уравнения конуса имеют вид

$$x = r(\varphi)(1-\zeta)\cos\varphi, \qquad y = r(\varphi)(1-\zeta)\sin\varphi, \qquad z = l\zeta$$

Имеем

$$A^2 = l^2(\rho^2 + 1), \qquad B^2 = l^2(1-\zeta)^2(\rho^2 + \rho'^2)$$

где $\rho = r/l$.

Путем замены переменных

$$N_z = \left(s - \frac{t}{2}\right)\frac{(1-\zeta)^{-\frac{3}{2}}}{\rho\rho'}\sqrt{\frac{\rho^2+\rho'^2}{\rho^2+1}}\exp\frac{\omega}{4}, \qquad N_{z\varphi} = t\frac{(1-\zeta)^{-\frac{3}{2}}}{\rho^2+1}\exp\frac{\omega}{4} \tag{24}$$
$$u = \ln(1-\zeta), \qquad \omega = \ln\rho + \int\frac{\rho}{\rho'}\,d\varphi$$

Уравнения (20) при отсутствии внешних сил ($X = Y = Z = 0$) могут быть приведены к виду

$$\frac{\partial s}{\partial u} - \frac{\partial t}{\partial \omega} = 0, \qquad \frac{\partial t}{\partial u} + s = 0 \tag{25}$$

Определение напряженного состояния безмоментных оболочек, когда на контурах *заданы усилия*, сводится к решению краевых задач для исследованных выше уравнений.

Поступила в редакцию
11 XII 1942

Институт механики
Академии Наук СССР

[1] При $\gamma = 0$ написанные уравнения переходят в уравнения цилиндра, а при $R = a = \mathrm{const}$ в уравнения кругового конуса.

EQUATIONS OF MOMENTLESS SHELLS

W. W. SOKOLOVSKY

(Summary)

The paper is concerned with the investigation of the general equilibrium equations (1), (2) of momentless shells.

The author replaces them by system (3). The latter having two imaginary variant or two real variant or single real families of characteristics. Whence the equations will belong to the elliptic, hyperbolic or parabolic types dependent upon the Gauss curvature sign of the middle surface of shell (correspondingly positive, negative or zero). The canonic forms of equations (3) for these three cases are equations (6), (8) or (20) correspondingly.

For the shells having ellipsoid, double hollow hyperboloid and elliptic paraboloid surfaces equations (6) may be modified so as to have the forms (18) providing the components X, Y, Z of external load are equal to zero.

If these shells have the surface of revolution then the solution of equations (6) for the ellipsoid and hyperboloid can he obtained in the forms (14) and (15) and for the paraboloid in the forms (14) and (16). The latter was given in the earlier paper of the author [3]. From formula (15) the known solution of H. Reissner for the sphere follows as a particular case.

For a shell having a single hollow hyperboloid surface equations (8) can be solved in a finite form (19) providing $X=Y=Z=0$.

For the cylindrical and circular conic shells equations (20) and for the shells having surfaces of consant slope can be solved also in the finite forms (21), 22) and (23) correspondingly. For non-circular conic shells they may be transformed into (25) providing $X=Y=Z=0$.

When the load on the contour is given, the determination of the stress state for momentless shells may be reduced to the solving boundary problems for the equations investigated in the present paper.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л я в А. Математическая теория упругости. 1935.
2. Flügge W. Statik und Dynamik der Schalen. 1934.
3. Соколовский В. В. О безмоментных оболочках вращения. Прикладная математика и механика. 1937. Т. 1. Вып. 3.
4. Гольденвейзер А. Л., Мрощинский А. К., Репман Ю. В. Методы расчета сферических куполов по безмоментной теории. Сборник «Пластинки и оболочки». 1939.
5. Власов В. З. Расчет оболочек, очерченных по центральным поверхностям второго порядка. Сборник «Пластинки и оболочки». 1939.