Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика, том VII, 1943

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Б. Г. ГАЛЕРКИН
(Казань)

Строительная механика и теория упругости дают возможность определить напряжения и перемещения в упругих системах. Мы имеем много случаев, когда решения доведены до определенного конца. Однако все эти решения пригодны только тогда, когда все три измерения тела соизмеримы. Когда же мы имеем дело с тонкими стержнями или тонкими оболочками, дело осложняется тем, что при достижении определенных напряжений в частях конструкций, напряжений, которые называют обычно критическими, система может выйти из состояния того упругого равновесия, которое вытекало бы из расчетов, даваемых строительной механикой и теорией упругости. Форма равновесия, указываемая строительной механикой и теорией упругости (форма равновесия 1), под действием критических напряжений становится неустойчивой, система принимает другую форму равновесия (форму равновесия 2). Нас интересуют только критические напряжения, т. е. возможный момент выхода из первого во второе состояние. Поэтому мы будем в дальнейшем полагать, что деформации второго состояния весьма малы. Так как эти деформации весьма малы, то можем принять во внимание только работу сил внутренних. При перемещении точек системы в этих точках внутренние силы, получаемые от напряжений, дадут изгибающие моменты и касательные напряжения. В дальнейшем мы примем во внимание только изгибающие моменты, так как будем рассматривать оболочку, подверженную сжатию или изгибу. Касательные напряжения будут иметь особое значение при рассмотрении вопроса о кручении.

Таким образом решение задачи об устойчивости сводится в общем к следующему. Нужно определить напряжения и внутренние силы в упругой системе первого состояния. Затем рассмотреть изгибающие моменты, даваемые внутренними силами в случае выхода из этого состояния. Если имеется уравнение упругой поверхности оболочки, задача может быть решена в очень простой форме. В дальнейшем мы остановимся на круговой цилиндрической оболочке.

§ 1. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки

Мы показали, что задача о равновесии цилиндрической оболочки под действием нормальных к ее поверхности сил может быть сведена к решению одного уравнения [1]. Это уравнение (IV) приведено в нашей статье [2] и относится к оболочке не только тонкой, но и средней толщины. Если мы в этом уравнении предположим, что $\alpha = \delta / c$ (δ — толщина, а c — средний радиус оболочки) величина малая, и пренебрежем величиной α по сравнению с единицей, уравнение (IV) приведется к следующему

$$\frac{\partial^8\varphi}{\partial\theta^8}+4\frac{\partial^8\varphi}{\partial\theta^6\partial\zeta^2}+6\frac{\partial^8\varphi}{\partial\theta^4\partial\zeta^4}+4\frac{\partial^8\varphi}{\partial\theta^2\partial\zeta^6}+\frac{\partial^8\varphi}{\partial\zeta^8}+\frac{\partial^6\varphi}{\partial\theta^6}+(5-3\sigma)\frac{\partial^6\varphi}{\partial\theta^4\partial\zeta^2}+(4-\sigma)\frac{\partial^6\varphi}{\partial\theta^2\partial\zeta^4}+$$
$$+2\sigma\frac{\partial^6\varphi}{\partial\zeta^6}+(1-2\sigma)\frac{\partial^4\varphi}{\partial\theta^2\partial\zeta^2}+\frac{12(1-\sigma^2)}{\alpha^2}\frac{\partial^4\varphi}{\partial\zeta^4}=\frac{12(1-\sigma^2)c}{E\alpha^3}(p_b-p_a) \tag{1.1}$$

где p_b — наружное давление, p_a — внутреннее, $\zeta=z/c$ и φ — функция перемещений.

Радиальное перемещение

$$U_0=\frac{\partial^4\varphi}{\partial\theta^4}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial\theta^2\partial\zeta^2}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial\zeta^4} \tag{1.2}$$

Перемещение по оси θ

$$V_0=\frac{\alpha^2}{6}\frac{\partial^5\varphi}{\partial\theta^3\partial\zeta^2}+\frac{\alpha^2}{6}\frac{\partial^5\varphi}{\partial\theta\partial\zeta^4}-\frac{\partial^3\varphi}{\partial\theta^3}-(2+\sigma)\frac{\partial^3\varphi}{\partial\theta\partial\zeta^2} \tag{1.3}$$

Перемещение по оси z (оси цилиндра)

$$W_0=\frac{\alpha^2}{6}\frac{\partial^5\varphi}{\partial\theta^2\partial\zeta^3}+\frac{\alpha^2}{6}\frac{\partial^5\varphi}{\partial\zeta^5}+\frac{\partial^3\varphi}{\partial\theta^2\partial\zeta}-\sigma\frac{\partial^3\varphi}{\partial\zeta^3} \tag{1.4}$$

Если рассматривать уравнение (1.1) как уравнение второго состояния оболочки, величина p должна быть изменена; вместо p надо подставить

$$\frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}(N_z U_0)+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(N_\theta U_0)\right] \tag{1.5}$$

где

$$N_z=\widehat{zz}\,\delta,\quad N_\xi=\widehat{\theta\theta}\,\delta \tag{1.6}$$

причем $\widehat{zz}$ и $\widehat{\theta\theta}$ — средние значения напряжений в сечении плоскостью, перпендикулярной к оси z, и в сечении плоскостью, проходящей через ось z.

Таким образом уравнение (1.1) примет вид

$$\frac{\partial^8\varphi}{\partial\theta^8}+4\frac{\partial^8\varphi}{\partial\theta^6\partial\zeta^2}+6\frac{\partial^8\varphi}{\partial\theta^4\partial\zeta^4}+4\frac{\partial^8\varphi}{\partial\theta^2\partial\zeta^6}+\frac{\partial^8\varphi}{\partial\zeta^8}+\frac{\partial^6\varphi}{\partial\theta^6}+(5-3\sigma)\frac{\partial^6\varphi}{\partial\theta^4\partial\zeta^2}+(4-\sigma)\frac{\partial^6\varphi}{\partial\theta^2\partial\zeta^4}+$$
$$+2\sigma\frac{\partial^6\varphi}{\partial\zeta^6}+(1-2\sigma)\frac{\partial^4\varphi}{\partial\theta^2\partial\zeta^2}+\frac{12(1-\sigma^2)}{\alpha^2}\frac{\partial^4\varphi}{\partial\zeta^4}=\frac{12(1-\sigma^2)}{E\alpha^3c}\left[\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}(N_zU_0)+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(N_\theta U_0)\right]=$$
$$=\frac{12(1-\sigma^2)}{E\alpha^3c}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\left[N_z\left(\frac{\partial^4\varphi}{\partial\theta^4}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial\theta^2\partial\zeta^2}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial\zeta^4}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left[N_\theta\left(\frac{\partial^4\varphi}{\partial\theta^4}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial\theta^2\partial\varphi^2}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial\zeta^4}\right)\right]\right\} \tag{1.7}$$

Когда на цилиндрическую поверхность действуют силы нормально к поверхности, вопросы устойчивости могут быть решены при любом расположении этих внешних сил.

§ 2. Определение критических сил в некоторых частных случаях

Пользуясь формулой (1.7), приведем ряд случаев, уже рассмотренных в литературе.

1. Устойчивость кольца под равномерным давлением. Функция φ в этом случае не зависит от ζ. Уравнение (1.7) примет вид

$$\frac{\partial^8\varphi}{\partial\theta^8}+\frac{\partial^6\varphi}{\partial\theta^6}=\frac{12(1-\sigma^2)}{E\alpha^3c}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(N_\theta\frac{\partial^4\varphi}{\partial\theta^4}\right) \tag{2.1}$$

Если принять, что $N_\theta=-pc$ (при равномерном давлении по окружности кольца, равном p), и положить $\sigma = 0$, получим

$$\frac{\partial^6}{\partial\theta^6}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}+\left(1+\frac{12p}{Ea^3}\right)\varphi\right]=0 \tag{2.2}$$

Из этого уравнения, полагая $\varphi=\cos 2\theta$, получим результат Maurice Levy и Boussinesq

$$p_{\text{кр}}=\frac{Ea^3}{4}=\frac{E\delta^3}{4c^3} \tag{2.3}$$

Точно так же получаются и результаты для части кольца.

2. Вертикальный цилиндр, концы которого свободны. К поверхности цилиндра силы не приложены. Оболочка сжимается силами $q=\text{const}$ по крайним сечениям цилиндра. Предположим, что деформация цилиндра зависит только от ζ и не зависит от θ. Обозначим силы, действующие на единицу длины крайнего сечения через $-q\delta$. Уравнение (1.7) примет вид:

$$\frac{\partial^8\varphi}{\partial\zeta^8}+2\sigma\frac{\partial^6\varphi}{\partial\zeta^6}+\frac{12(1-\sigma^2)}{a^2}\frac{\partial^4\varphi}{\partial\zeta^4}=-\frac{12(1-\sigma^2)}{Ea^2}q\frac{\partial^6\varphi}{\partial\zeta^6} \tag{2.4}$$

или

$$\frac{\partial^4}{\partial\zeta^4}\left[\frac{\partial^4\varphi}{\partial\zeta^4}+\left(2\sigma+\frac{12(1-\sigma^2)}{Ea^2}q\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}+\frac{12(1-\sigma^2)}{a^2}\varphi\right]=0 \tag{2.5}$$

Полагая

$$\varphi=\cos\beta\zeta \tag{2.6}$$

получим

$$\beta^4-\left(2\sigma+\frac{12(1-\sigma^2)q}{Ea^2}\right)\beta^2+\frac{12(1-\sigma^2)}{a^2}=0$$

или, если пренебречь 2σ, получим

$$\beta^4-\frac{12(1-\sigma^2)q\beta^2}{Ea^2}+\frac{12(1-\sigma^2)}{a^2}=0$$

откуда

$$\beta^2=\frac{6(1-\sigma^2)q}{Ea^2}\pm\sqrt{\frac{36q^2(1-\sigma^2)^2}{E^2a^4}-\frac{12(1-\sigma^2)}{a^2}} \tag{2.7}$$

Для того чтобы величина β имела вещественное значение, необходимо чтобы

$$\frac{36q^2(1-\sigma^2)^2}{E^2a^4}-\frac{12(1-\sigma^2)}{a^2}>0 \tag{2.8}$$

Наименьшее значение

$$q=\frac{Ea}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}} \tag{2.9}$$

и есть критическое значение q ($q_{\text{кр}}$).

Если концы цилиндра не смещаются, полагая

$$\varphi=\sin\frac{k\pi c\zeta}{l} \tag{2.10}$$

получим уравнение

$$\frac{k^4\pi^4c^4}{l^4}-\frac{12(1-\sigma^2)k^2\pi^2c^2q}{Ea^2}+\frac{12(1-\sigma^2)}{a^2}=0 \tag{2.11}$$

Откуда

$$q=\frac{Ea^2\pi^2k^2c^2}{12l^2(1-\sigma^2)}+\frac{El^2}{k^2\pi^2c^2} \tag{2.12}$$

Так как критическое напряжение $q_{\text{кр}} = \frac{Ea}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}$, а k должно быть число целое, то ясно, что q может быть больше $q_{\text{кр}}$, и надо найти значение k, при котором получим наименьшее значение для q. Это значение определится из неравенств

$$\frac{(k-1)^2\pi^2c^2}{12l^2(1-\sigma^2)} + \frac{l^2}{(k-1)^2\pi^2c^2} < \frac{k^2\pi^2c^2}{12l^2(1-\sigma^2)} + \frac{l^2}{k^2\pi^2c^2}$$

$$\frac{(k+1)^2\pi^2c^2}{12l^2(1-\sigma^2)} + \frac{l^2}{(k+1)^2\pi^2c^2} > \frac{k^2\pi^2c^2}{12l^2(1-\sigma^2)} + \frac{l^2}{k^2\pi^2c^2}$$

или

$$\left.\begin{aligned} (k-1)\,k &< \frac{2\sqrt{3(1-\sigma^2)}}{\pi^2\alpha^2}\,\frac{l^2}{c^2} \\ (k+1)\,k &> \frac{2\sqrt{3(1-\sigma^2)}}{\pi^2\alpha^2}\,\frac{l^2}{c^2} \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

Выбрав k, получим при данных значениях c/l и δ/c критическую нагрузку для q, — прямой цилиндр превратится в волнистый цилиндр с числом полуволн, равным k.

3. Критическое эйлерово напряжение. Полагаем c/l величиной малой. Функцию φ берем в виде

$$\varphi = \sin\frac{\pi c\zeta}{l}\cos\theta \tag{2.14}$$

Уравнение (1.7) нам дает

$$\left[\frac{\sigma\pi^2c^2}{l^2} + \frac{\pi^4c^4}{l^4}\left(2+\sigma+\frac{12(1-\sigma^2)}{\alpha^2}\right) + \frac{2\pi^6c^6}{l^6}(2-\sigma) + \frac{\pi^8c^8}{l^8}\right]\sin\frac{\pi c\zeta}{l}\cos\theta =$$
$$= \frac{12(1-\sigma^2)}{E\alpha^3c}\,\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}(N_2U_0) \tag{2.15}$$

Полагаем

$$N_2 = -\frac{P}{2c\beta} \tag{2.16}$$

где P — вся продольная нагрузка; предполагаем при этом, что нагрузка P сосредоточена по части окрестности: $\frac{1}{2}P$ около точки $\theta=0$ и $\frac{1}{2}P$ около точки $\theta=\pi$ на протяжении $2c\beta$.

Так как отношение c/l принято величиной малой, то придем к уравнению

$$\frac{\pi^2c^2}{l^2}\sin\frac{\pi c\zeta}{l}\cos\theta = \frac{P}{4c^2\beta\alpha E}\,|\cos\theta|\,\sin\frac{\pi c\zeta}{l} \tag{2.17}$$

Умножая обе части на $\cos\theta\,d\theta$ и интегрируя левую часть в пределах от $-\pi$ до π, а правую часть в пределах от $-\frac{1}{2}\beta$ до $+\frac{1}{2}\beta$ и от $\pi-\frac{1}{2}\beta$ до $\pi+\frac{1}{2}\beta$, получим

$$\frac{\pi^3c^2}{l^2} = \frac{P}{2c^2\alpha\beta E}\int\limits_{-\frac{1}{2}\beta}^{\frac{1}{2}\beta}(1+\cos 2\theta)\,d\theta = \frac{P}{2Ec^2\beta\alpha}(\beta+\sin\beta) \tag{2.18}$$

Полагая β величиной малой, получим

$$P = \frac{\pi^3c^4\alpha E}{l^2} = \frac{\pi^3Ec^3\delta}{l^2} \tag{2.19}$$

или

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2EI}{l^2} \tag{2.20}$$

где I — момент инерции площади $2\pi c\delta$.

4. Свободно опертая по концам цилиндрическая оболочка равномерно сжата по поверхности. Пусть оболочка длиной l, среднего радиуса c, свободно опертая, находится под действием сжимающих сил p, приложенных к ее поверхности. Чтобы определить устойчивость ее, полагаем

$$\varphi = \sin\frac{\pi c\zeta}{l}\cos k\theta \tag{2.21}$$

Получим уравнение

$$\Big\{k^8 + k^6\left(\frac{4\pi^2c^2}{l^2} - 1\right) + k^4\left[\frac{6\pi^4c^4}{l^4} - (5-3\sigma)\frac{\pi^2c^2}{l^2}\right] +$$

$$+ k^2\left[\frac{4\pi^6c^6}{l^6} - (4-\sigma)\frac{\pi^4c^4}{l^4} + (1-2\sigma)\frac{\pi^2c^2}{l^2}\right] - \frac{2\sigma\pi^6c^2}{l^6} + \frac{\pi^8c^8}{l^8} + \frac{12(1-\sigma^2)\pi^4c^4}{a^2l^4}\Big\}\sin\frac{\pi c\zeta}{l}\cos k\theta =$$

$$= \frac{12(1-\sigma^2)}{Ea^3c}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left[N_\theta\left(\frac{\partial^4\varphi}{\partial\theta^4} + 2\frac{\partial^4\varphi}{\partial\theta^2\,\partial\varphi^2} + \frac{\partial^4\varphi}{\partial\zeta^4}\right)\right] \tag{2.22}$$

Значения N_θ в данном случае невелики; N_θ лежит между $-pc$ и $-pc\sin(\pi c\zeta / l)$. Если положим $N_\theta = -pc$, правая часть уравнения (2.22) примет вид

$$\frac{12(1-\sigma^2)}{Ea^3}pk^2\left(k^2 + \frac{\pi^2c^2}{l^2}\right)^2\sin\frac{\pi c\zeta}{l}\cos k\theta \tag{2.23}$$

Получим

$$p = \frac{Ea^3}{12(1-\sigma^2)k^2\left(k^2 + \frac{\pi^2c^2}{l^2}\right)^2}\Big\{k^8 + k^6\left(\frac{4\pi^2c^2}{l^2} - 1\right) + k^4\left[\frac{6\pi^4c^4}{l^4} - (5-3\sigma)\frac{\pi^2c^2}{l^2}\right] +$$

$$+ k^2\left[\frac{4\pi^6c^6}{l^6} - (4-\sigma)\frac{\pi^4c^4}{l^4} - (1-2\sigma)\frac{\pi^2c^2}{l^2}\right] - 2\sigma\frac{\pi^6c^6}{l^6} + \frac{\pi^8c^8}{l^8} + \frac{12(1-\sigma^2)\pi^4c^4}{a^2l^4}\Big\} \tag{2.24}$$

Надо определить значение k, при котором p имеет наименьшее значение, это и будет $p_{\text{кр}}$. Вычисленные значения $p_{\text{кр}}$ совпадают с теми, которые в литературе известны.

Если возьмем N_θ лежащей между $-pc$ и $-pc\sin(\pi c\zeta / l)$, получим значение $p_{\text{кр}}$ несколько большее.

Мы здесь привели примеры на задачи, разрешенные уже Boussinesq, Mises, Southwell и др. Отличие состоит в том, что мы получаем все решения с помощью одного и того же уравнения.

Приведенное здесь общее решение имеет значение, идущее значительно дальше, — оно дает возможность исследовать устойчивость оболочки под любой нагрузкой, нормальной к поверхности.

Допустим, мы имеем металлический трубопровод, свободно опертый по краям; трубопровод наполнен водой и, следовательно, подвержен изгибу. В работе [3] исследовано напряженное состояние подобного трубопровода. Конечно, в одной части трубопровода напряжения $\widehat{zz}$ суть напряжения сжатия. Возникает вопрос о возможности выпучивания трубопровода. Зная напряженное состояние трубопровода, можно, пользуясь данным здесь исследованием, установить отношения c/l и δ/c, при которых может начаться выпучивание. В упомянутой работе исследован вопрос и в случае неполного заполнения водой. Дело в том, что при неполном заполнении трубопровод в смысле устойчивости может оказаться в худшем положении — надо обратить внимание на то обстоятельство, что напряжения $\widehat{\theta\theta}$ как напряжения в случае трубопровода растягивающие поддерживают устойчивость.

Исследование устойчивости трубопровода имеет большое значение. Обычно, чтобы быть уверенным в устойчивости трубопровода, наклепывают или наваривают уголки жесткости как в продольном, так и поперечном направлении. Установление пределов, при которых устойчивость обеспечена без добавочных ребер жесткости, устранило бы необходимость затраты излишнего материала.

Поступила в редакцию
7 IV 1942

Институт механики
Академии Наук СССР

STABILITY OF A CYLINDRICAL SHELL

B. G. GALERKIN

(Summary)

The paper gives a general solution of the problem of the stability of a cylindrical shell under the action of a load normal to its surface. The well known solutions of Boussinesq, Mises, Southwell and others are obtained as particular cases.

1. Stability of a Round Cylindrical Shell

In an earlier paper of the author [1] it was established that the problem in question may be reduced to solving one equation.

In the paper [2] this equation is given in the form (IV), which is applicable not only to thin shells but also to those of medium thickness. By assuming the magnitude $\alpha = \delta / c$ (where δ is the thickness, and c the middle radius of the shell) to be small as compared with unity and by neglecting it, the above-mentioned equation for the first state of equilibrium is then expressed in the form

$$\frac{\partial^8 \varphi}{\partial \theta^8} + 4 \frac{\partial^8 \varphi}{\partial \theta^6 \partial \zeta^2} + 6 \frac{\partial^8 \varphi}{\partial \theta^4 \partial \zeta^4} + 4 \frac{\partial^8 \varphi}{\partial \theta^2 \partial \zeta^6} + \frac{\partial^8 \varphi}{\partial \zeta^8} + \frac{\partial^6 \varphi}{\partial \theta^6} + (5 - 3\sigma) \frac{\partial^6 \varphi}{\partial \theta^4 \partial \zeta^2} +$$

$$+ (4 - \sigma) \frac{\partial^6 \varphi}{\partial \theta^2 \partial \zeta^4} + 2\sigma \frac{\partial^6 \varphi}{\partial \zeta^6} + (1 - 2\sigma) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \theta^2 \partial \zeta^2} + \frac{12(1 - \sigma^2)}{\alpha^2} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \zeta^4} =$$

$$= \frac{12(1 - \sigma^2)}{E\alpha^3} (p_b - p_a) \tag{1.1}$$

where p_a is the nternal and p_b — the external pressure, while φ is the displacement function and $\zeta = z / c$.

Formulae (1.2), (1.3), (1.4) give the radial displacement and the displacements along the axes θ and z correspondingly where z is the axis of the cylinder.

By replacing the value p by the expression (1.5) equation (1.1) will be then modified

$$\frac{\partial^8\varphi}{\partial\theta^8}+4\frac{\partial^8\varphi}{\partial\theta^6\,\partial\zeta^2}+6\frac{\partial^8\varphi}{\partial\theta^4\,\partial\zeta^4}+4\frac{\partial^8\varphi}{\partial\theta^2\,\partial\zeta^6}+\frac{\partial^8\varphi}{\partial\zeta^8}+\frac{\partial^6\varphi}{\partial\theta^6}+(5-3\sigma)\frac{\partial^6\varphi}{\partial\theta^4\,\partial\zeta^2}+$$

$$+(4-\sigma)\frac{\partial^6\varphi}{\partial\theta^2\,\partial\zeta^4}+2\sigma\frac{\partial^6\varphi}{\partial\zeta^6}+(1-2\sigma)\frac{\partial^4\varphi}{\partial\theta^2\,\partial\zeta^2}+\frac{12(1-\sigma^2)}{\alpha^2}\frac{\partial^4\varphi}{\partial\zeta^4}= \tag{1.7}$$

$$=\frac{12(1-\sigma^2)}{Ea^3c}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\left[N_z\left(\frac{\partial^4\varphi}{\partial\theta^4}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial\theta^2\,\partial\zeta^2}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial\zeta^4}\right)\right]+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left[N_\theta\left(\frac{\partial^4\varphi}{\partial\theta^4}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial\theta^2\,\partial\varphi^2}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial\zeta^4}\right)\right]\right\}$$

so as to apply to the second state of equilibrium of the shell.

The values N_z and N_θ are given by formulae (1.6) where $\widehat{zz}$ are the average values of stresses in the plane perpendicular to the axis z and $\widehat{\theta\theta}$ are those in the plane passing through the axis z.

2. Critical Forces in Partucular Cases

1. The stability of a ring under uniform pressure. In this case the function φ does not depend on ζ and equation (1.7) assumes the form (2.1). The latter, by equating the value N_θ to $-pc$ and the value σ to zero, is transformed into equation (2.2).

By selecting $\varphi=\cos 2\theta$ from this equation, the well known results (2.3) of Maurice Levy and Boussinesq for the critical value of p are obtained.

2. A vertical cylinder with free ends. No forces are applied to the surface of the cylinder. The shell is compressed by forces q which are constant and applied along the contours of the butt-ends. On a unit of length of these contours acts the force $-q\delta$. It is supposed that the deformation of the cylinder does not depend on θ, *i. e.* it depends only on ζ. Then equation (1.7) would become (2.4), *i. e.* (2.5). The substitution of (2.6) gives equation (2.7). The formula (2.9) for the critical load from the condition (2.8) for the existence of real values of β is derived.

When the flanges of the cylinder are clamped the function φ must be selected of the form (2.10) and then equation (2,5) is transformed into (2.11), wherefrom p is determined by formula (2.12). A comparison of this result with formula (2.9) shows that the value of q may be larger than the critical one.

Inequalities (2.12) furnish an integer value of k for which the load q will be the least for the given ratios c/l and δ/c.

The rectilinear cylinder becomes a corrugated one with the number of half waves equal to k.

3. The Euler critical load. The ratio c/l is supposed to be small. The function φ is selected of the form (2.14). Equation (1.7) gives (2.15). Assume the value N_z to be determined by formula (2.16) where P is a longitudinal load uniformly distributed; one half about the point $\theta=0$ and the other about the point $\theta=\pi$, along the ranges $2\,c\beta$. Then equation (2.15) will lead to equation (2.17).

By multiplying the latter by $\cos\theta\,d\theta$ and integrating the left-hand side within the range from $-\pi$ to $+\pi$ and the right-hand side from $-\frac{1}{2}\beta$ to $+\frac{1}{2}\beta$ and from $\pi-\frac{1}{2}\beta$ to $\pi+\frac{1}{2}\beta$ the expressions (2.18) are obtained.

By assuming the value β to be small formula (2.19) and then formula (2.20) for the critical load are derived.

4. A cylindrical shell freely supported at the ends. Let l be the length of the cylinder, which is subjected to a contracting load p uniformly distributed over the surface.

By substituting (2.21) in equation (1.7) equation (2.22) is deduced. In this case the values N_2 are not large and $-pc \leqslant N_0 \leqslant -pc \sin(\pi c\zeta/l)$. For $N_0 = -pc$ the right-hand side of equation (2.22) takes the form (2.23) and for p is obtained formula (2.24).

By determining the value of k, for which p will be the minimum, can be established the critical value p. The calculated values p_{cr} coincide with those known in literature. The value p_{cr} will be a little larger if the value N_0 is taken within the range $(-pc, \ -pc \sin \pi c\zeta / l)$.

The advantage of the method developed is its applicability to a wide range of problems.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галеркин Б. Г. Доклады АН СССР. 1934. Т. IV [Стр. 270—275].
2. Галеркин Б. Г. Равновесие упругой цилиндрической оболочки. Труды Ленинградского института сооружений. 1935. Вып. 2 [Стр. 22 — 35].
3. Галеркин Б. Г. Напряжения и перемещения в круговом цилиндрическом трубопроводе. Известия Института гидротехники. 1940. Т. XXVII.