Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика, том VII, 1943

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ВНЕШНЕЙ БАЛЛИСТИКИ ДЛЯ АВИАБОМБЫ

В. С. ПУГАЧЕВ
(Москва)

В настоящей статье излагается приближенный аналитический метод решения основной задачи внешней баллистики для авиабомбы. Этот метод основан на разложении элементов траектории в целые степенные ряды относительно баллистического коэффициента бомбы [1]. Ограничиваясь первой степенью баллистического коэффициента, мы получаем приближенные аналитические формулы для элементов траектории, дающие достаточную точность для практических целей.

1. Как известно [2], [3], решение основной задачи внешней баллистики для авиабомбы приводится к интегрированию системы уравнений

$$w\frac{du}{dy} = -cH_\tau(H-y)\,G(\lambda v)\,u$$
$$w\frac{dw}{dy} = g - cH_\tau(H-y)\,G(\lambda v)\,w \qquad \left(\lambda = \sqrt{\frac{\tau_0}{\tau}}, \quad v = \sqrt{u^2+w^2}\right) \qquad (1.1)$$

и вычислению квадратур

$$t = \int_0^y \frac{dy}{w}, \qquad x = \int_0^y \frac{u\,dy}{w} \qquad (1.2)$$

Здесь через u и w обозначены соответственно горизонтальная и вертикальная составляющие скорости центра массы бомбы, через τ_0 и τ — соответственно виртуальная температура воздуха на начальном уровне и виртуальная температура воздуха на высоте $H-y$ над начальным уровнем, через t и x — время падения бомбы и абсцисса центра массы бомбы, соответствующие ординате y, H_τ и G — известные баллистические функции. Система координат — декартова, имеющая начало в точке сбрасывания, ось абсцисс направлена по горизонтальной проекции вектора начальной скорости центра массы бомбы, а ось ординат — по вертикали вниз.

Предположим, что функция G является аналитической при любых действительных значениях аргументов, которые нам встретятся в дальнейшем. Тогда на основании известной теоремы Poincaré [4] мы можем разложить интеграл системы (1.1), удовлетворяющий начальным условиям

$$y = 0, \qquad u = u_0, \qquad w = w_0 \qquad (1.3)$$

в ряды, расположенные по целым положительным степеням c, сходящиеся при достаточно малом $|c|$. Эти разложения могут быть получены формальной подстановкой рядов

$$u = \sum_{\mu=0}^{\infty} u^{(\mu)} c^{\mu}, \qquad w = \sum_{\mu=0}^{\infty} w^{(\mu)} c^{\mu} \tag{1.4}$$

в уравнения (1.1) и сравнением коэффициентов при одинаковых степенях c в обеих частях уравнений.

Выполняя эти операции, без труда получаем уравнения для определения коэффициентов разложений (1.4)

$$w^{(0)} \frac{du^{(0)}}{dy} = 0, \qquad w^{(0)} \frac{dw^{(0)}}{dy} = g \tag{1.5}$$

$$w^{(0)} \frac{du^{(\nu)}}{dy} + \frac{du^{(0)}}{dy} w^{(\nu)} = -\sum_{\mu=1}^{\nu-1} w^{(\mu)} \frac{du^{(\nu-\mu)}}{dy} - H_{\tau}(H-y) \sum_{\mu=1}^{\nu} f_{\mu-1} u^{(\nu-\mu)}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots) \tag{1.6}$$

$$w^{(0)} \frac{dw^{(\nu)}}{dy} + \frac{dw^{(0)}}{dy} w^{(\nu)} = -\sum_{\mu=1}^{\nu-1} w^{(\mu)} \frac{dw^{(\nu-\mu)}}{dy} - H_{\tau}(H-y) \sum_{\mu=1}^{\nu} f_{\mu-1} w^{(\nu-\mu)}$$

где

$$f_{\mu} = \frac{1}{\mu!} \left\{ \frac{d^{\mu}}{dy^{\mu}} G\left(\lambda \sqrt{\left(\sum_{\mu=0}^{\infty} u^{(\mu)} c^{\mu} \right)^2 + \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} w^{(\mu)} c^{\mu} \right)^2} \right) \right\}_{c=0} \tag{1.7}$$

Интегралы уравнений (1.5), удовлетворяющие начальным условиям (1.3), имеют вид

$$u^{(0)} = u_0, \qquad w^{(0)} = \sqrt{w_0^2 + 2gy} \tag{1.8}$$

После этого система уравнений (1.6) распадается на два элементарных уравнения первого порядка, интегралы которых выражаются формулами

$$u^{(\nu)} = -\int_0^y \left[\sum_{\mu=1}^{\nu-1} w^{(\mu)} \frac{du^{(\nu-\mu)}}{dy} + H_{\tau}(H-y) \sum_{\mu=1}^{\nu} f_{\mu-1} u^{(\nu-\mu)} \right] \frac{dy}{w^{(0)}}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots) \tag{1.9}$$

$$w^{(\nu)} = -\frac{1}{w^{(0)}} \int_0^y \left[\sum_{\mu=1}^{\nu-1} w^{(\mu)} \frac{dw^{(\nu-\mu)}}{dy} + H_{\tau}(H-y) \sum_{\mu=1}^{\nu} f_{\mu-1} w^{(\nu-\mu)} \right] dy$$

Полагая здесь, в частности, $\nu = 1$, получаем

$$u^{(1)} = -u_0 \int_0^y \frac{H_{\tau}(H-y)\, G\left(\lambda \sqrt{u^{(0)2} + w^{(0)2}}\right)}{w^{(0)}} dy$$

$$w^{(1)} = -\frac{1}{w^{(0)}} \int_0^y H_{\tau}(H-y)\, G\left(\lambda \sqrt{u^{(0)2} + w^{(0)2}}\right) w^{(0)} dy \tag{1.10}$$

Заменяя здесь $u^{(0)}$ и $w^{(0)}$ их выражениями (1.8) и вводя обозначения

$$v_0 = \sqrt{u_0^2 + w_0^2}$$

$$A_{\nu}(y, H, u_0, w_0) = \int_0^y H_{\tau}(H-y)\, G\left(\lambda \sqrt{v_0^2 + 2gy}\right) \left(\frac{w_0^2}{2g} + y \right)^{\frac{\nu-1}{2}} dy \tag{1.11}$$

можем написать

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= -\frac{u_0}{\sqrt{2g}} A_0(y, H, u_0, w_0) \\ w^{(1)} &= -\sqrt{\frac{2g}{w_0^2+2gy}} A_2(y, H, u_0, w_0) \end{aligned} \tag{1.12}$$

Аналогично можно вычислить остальные коэффициенты разложений (1.4).

Подставив разложения (1.4) в формулы (1.2), можно разложить величины t и x по степеням c. Ограничиваясь членами не выше первой степени c, получим приближенные формулы

$$\begin{aligned} t &= \frac{\sqrt{w_0^2+2gy}-w_0}{g} + cT(y, H, u_0, w_0) \\ x &= u_0 \left\{ \frac{\sqrt{w_0^2+2gy}-w_0}{g} - cX(y, H, u_0, w_0) \right\} \end{aligned} \tag{1.13}$$

где

$$\begin{aligned} T(y, H, u_0, w_0) &= \frac{1}{2g} \int_0^y \left(\frac{w_0^2}{2g} + y \right)^{-\frac{3}{2}} A_2 dy \\ X(y, H, u_0, w_0) &= \frac{1}{2g} \int_0^v \left(\frac{w_0^2}{2g} + y \right)^{-\frac{3}{2}} \left\{ \left(\frac{w_0^2}{2g} + y \right) A_0 - A_2 \right\} dy = \\ &= \frac{1}{2g} \int_0^y \left(\frac{w_0^2}{2g} + y \right)^{-\frac{3}{2}} \left[\int_0^y A_0 dy \right] dy \end{aligned} \tag{1.14}$$

Нетрудно видеть, что функции T и X выражаются через функции A,

В самом деле, применяя формулу интегрирования по частям и принимая во внимание (1.11), легко получим

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{g} \left(A_1 - \frac{\sqrt{2g}}{u_0 p} A_2 \right), \\ X &= \frac{1}{g} \left(\frac{u_0 p}{\sqrt{2g}} A_0 - 2A_1 + \frac{\sqrt{2g}}{u_0 p} A_2 \right) \end{aligned} \tag{1.15}$$

где

$$p = \frac{w^{(0)}}{u^{(0)}} = \frac{\sqrt{w_0^2+2gy}}{u_0} \tag{1.16}$$

При произвольных функциях H_τ, G и λ (заданных хотя бы таблично) функции A_ν, T и X могут быть вычислены методами численного интегрирования функций и табулированы. Однако ввиду того что эти функции зависят от четырех аргументов, таблицы этих функций будут громоздкими и неудобными в обращении. Поэтому имеет смысл ввести некоторые упрощающие допущения.

Во-первых, условимся пренебрегать зависимостью скорости звука от высоты, что равносильно допущению [5]

$$G(\lambda v) = \lambda G(v) \tag{1.17}$$

Тогда, пользуясь обычным обозначением

$$H(y) = \lambda H_\tau(y) \tag{1.18}$$

вторую формулу (1.11) можно представить в виде

$$A_\nu = \int_0^y H(H-y)\, G\left(\sqrt{v_0^2+2gy}\right) \left(\frac{w_0^2}{2g} + y \right)^{\frac{\nu-1}{2}} dy \tag{1.19}$$

Во-вторых, с достаточной для практики точностью можно принять, что плотность воздуха изменяется в зависимости от высоты по показательному закону, т. е. принять

$$H(y) = e^{-ky} \tag{1.20}$$

Тогда формула (1.19) примет вид

$$A_\nu(y, H, u_0, w_0) = H(H) \int_0^y \frac{G(\sqrt{v_0^2 + 2gy})}{H(y)} \left(\frac{w_0^2}{2g} + y\right)^{\frac{\nu-1}{2}} dy =$$

$$= H(H)\, \tilde{A}_\nu(y, u_0, w_0) \tag{1.21}$$

Подставляя это выражение функции A_ν в (1.14), получим

$$T(y, H, u_0, w_0) = \frac{H(H)}{2g} \int_0^y \left(\frac{w_0^2}{2g} + y\right)^{-\frac{3}{2}} \tilde{A}_2\, dy =$$

$$= H(H)\, \tilde{T}(x, u_0, w_0)$$

$$X(y, H, u_0, w_0) = \frac{H(H)}{2g} \int_0^y \left(\frac{w_0^2}{2g} + y\right)^{-\frac{3}{2}} \left[\int_0^y \tilde{A}_0\, dy\right] dy = \tag{1.22}$$

$$= H(H)\, \tilde{X}(y, u_0, w_0)$$

Таким образом решение задачи можно свести к табулированию функций трех аргументов. Для случая сбрасывания бомбы с самолета, летящего горизонтально, $w_0 = 0$, и решение задачи сводится к функциям двух аргументов.

2. Для того чтобы получить приближенные аналитические выражения для элементов траектории, примем квадратичный закон сопротивления воздуха и линейный закон изменения плотности воздуха с высотой.

Тогда

$$G(v) = av, \qquad H(y) = 1 - ky \tag{2.1}$$

и формула (1.19) даст

$$A_\nu(y, H, u_0, w_0) = \frac{2au_0}{\nu+2} \left\{(1 - kH_0)\, a_\nu(p, p_0) + k\frac{\nu+2}{\nu+4} \frac{u_0^2 p^2}{2g} a_{\nu+2}(p, p_0)\right\} \tag{2.2}$$

где

$$a_\nu(p, p_0) = \frac{\nu+2}{p^{\nu+1}} \int_{p_0}^{p} p^\nu \sqrt{1+p^2}\, dp \tag{2.3}$$

$$p_0 = \frac{w_0}{u_0} \tag{2.4}$$

$$H_0 = H + \frac{w_0^2}{2g}.$$

а p определяется формулой (1.16).

Функции $a_\nu(p, p_0)$ легко вычисляются

$$a_0 = \sqrt{1+p^2} - \frac{p_0}{p}\sqrt{1+p_0^2} + \frac{1}{p} \ln \frac{p + \sqrt{1+p^2}}{p_0 + \sqrt{1+p_0^2}}$$

$$a_\nu = \frac{1}{p^2}\left\{(1+p^2)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\nu-1} (1+p_0^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{\nu-1}{\nu} a_{\nu-2}\right\} \tag{2.5}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots)$$

Подставляя в формулы (1.15) вместо A_ν их выражения (2.2), после несложных преобразований получим

$$\left.\begin{aligned} T(y,\ H,\ u_0,\ w_0) &= \alpha\frac{u_0^3p^2}{12g^2}\left\{(1-kH_0)\,c_0(p,\ p_0)+k\,\frac{u_0^2p^2}{5g}c_2(p,\ p_0)\right\} \\ X(y,\ H,\ u_0,\ w_0) &= \alpha\frac{u_0^3p^2}{12g^2}\left\{(1-kH_0)\,d_0(p,\ p_0)+k\,\frac{u_0^2p^2}{10g}d_2(p,\ p_0)\right\}\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

Здесь

$$\begin{aligned} c_0(p,p_0) &= 4a_1(p,p_0)-3a_2(p,p_0) \\ c_2(p,p_0) &= 6a_3(p,p_0)-5a_4(p,p_0) \\ d_0(p,p_0) &= 6a_0(p,p_0)-8a_1(p,p_0)+3a_2(p,p_0) \\ d_2(p,p_0) &= 15a_2(p,p_0)-24a_3(p,p_0)+10a_4(p,p_0)\end{aligned} \tag{2.7}$$

Заменяя в формулах (1.13) функции T и X их выражениями (2.6) и вводя обозначение

$$C=c\alpha, \tag{2.8}$$

получим формулы для времени падения бомбы и абсциссы траектории:

$$\begin{aligned} t &= \frac{\sqrt{w_0^2+2gy}-w_0}{g}+C\frac{u_0^3p^2}{12g^2}\left[(1-kH_0)\,c_0+k\frac{u_0^2p^2}{5g}c_2\right] \\ x &= u_0\left\{\frac{\sqrt{w_0^2+2gy}-w_0}{g}-C\frac{u_0^3p^2}{12g^2}\left[(1-kH_0)\,d_0+k\frac{u_0^2p^2}{10g}d_2\right]\right\}\end{aligned} \tag{2.9}$$

Для практического применения этих формул удобно составить таблицы коэффициентов c_0, c_2, d_0 и d_2 в зависимости от p и p_0.

Нетрудно видеть, что при $p\to\infty$ все величины $a_\nu-p$, $c_\nu-p$ и $d_\nu-p$ стремятся к нулю. В самом деле, пусть P — любое число, большее, чем $\max\{1,\ p_0\}$; тогда

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{p}\left\{\int\limits_{p_0}^{P}\sqrt{1+p^2}\,dp+\int\limits_{P}^{p}p\left(1+\frac{1}{2p^2}+\ldots\right)dp\right\}= \\ &= p+\frac{1}{p}\ln\frac{p}{P}+\frac{1}{p}\left(2\int\limits_{p_0}^{P}\sqrt{1+p^2}\,dp-P^2\right)+\ldots \\ a_\nu &= \frac{\nu+2}{p^{\nu+1}}\left\{\int\limits_{p_0}^{P}p^\nu\sqrt{1+p^2}\,dp+\int\limits_{P}^{p}p^{\nu+1}\left(1+\frac{1}{2p^2}+\ldots\right)dp\right\}= \\ &= p+\frac{\nu+2}{2\nu p}\left\{1-\left(\frac{P}{p}\right)^\nu\right\}+\frac{1}{p^{\nu+1}}\left\{(\nu+2)\int\limits_{p_0}^{P}p^\nu\sqrt{1+p^2}\,dp-P^{\nu+2}+\ldots\right\}\end{aligned} \tag{2.10}$$

откуда и следует справедливость высказанного утверждения.

Таким образом при больших p можно c_0, c_2, d_0 и d_2 в формулах (2.9) заменить величиной p.

Если p_0 также велико, но при этом величины $\frac{1}{p}\ln\frac{p}{p_0}$ и p^{-1} малы по сравнению с $p-p_0$, то в (2.10) можно положить $P=p_0$ и принять приближенно

$$a_\nu = p-\frac{p_0^{\nu+2}}{p^{\nu+1}} \tag{2.11}$$

Тогда формулы (2.7) дадут

$$\begin{aligned} c_0 &\approx p-\left(\frac{p_0}{p}\right)^3(4p-3p_0), & c_2 &\approx p-\left(\frac{p_0}{p}\right)^5(6p-5p_0) \\ d_0 &\approx p-\frac{p_0^3}{p^3}(6p^2-8p_0p+3p_0^2), & d_2 &\approx p-\frac{p_0^4}{p^5}(15p^2-24p_0p+10p_0^2)\end{aligned} \tag{2.12}$$

Заметим еще, что, как показывают вычисления, при любых p величины c_0, c_2, d_0 и d_2 могут быть с достаточной точностью представлены приближенными формулами

$$
\begin{aligned}
c_0 = d_2 &= \sqrt{4+p^2} - \frac{p_0}{p}\sqrt{4+p_0^2}, \\
c_2 &= \sqrt{\frac{9}{4}+p^2} - \frac{p_0}{p}\sqrt{\frac{9}{4}+p_0^2}, \\
d_0 &= \sqrt{16+p^2} - \frac{p_0}{p}\sqrt{16+p_0^2}.
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

3. Рассмотрим теперь наиболее важный практически частный случай, когда бомба сбрасывается с самолета, летящего горизонтально. В этом случае

$$
w_0 = p_0 = 0, \qquad u_0 = v_0, \qquad p = \frac{\sqrt{2gy}}{v_0}, \qquad H_0 = H
\tag{3.1}
$$

и формулы (2.9) принимают вид

$$
\begin{aligned}
t &= \sqrt{\frac{2y}{g}}\left\{1 + \frac{Cv_0}{12}\sqrt{\frac{2y}{g}}\left[(1-kH)c_0 + \frac{2}{5}kyc_2\right]\right\} \\
x &= v_0\sqrt{\frac{2y}{g}}\left\{1 - \frac{Cv_0}{12}\sqrt{\frac{2y}{g}}\left[(1-kH)d_0 + \frac{ky}{5}d_2\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Формулы (2.5) для вычисления a_ν принимают в этом случае вид

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \sqrt{1+p^2} + \frac{1}{p}\ln\left(1+\sqrt{1+p^2}\right) \\
a_1 &= \frac{1}{p^2}\left\{(1+p^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right\} \\
a_\nu &= \frac{1}{p^2}\left\{(1+p^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{\nu-1}{\nu}a_{\nu-2}\right\} \qquad (\nu = 2,\ 3,\ \ldots)
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

При малых p для вычисления a_ν, c_ν и d_ν удобно пользоваться разложениями этих величин по степеням p

$$
\begin{aligned}
&a_0 = 2 + \frac{1}{3}p^2 + \ldots, \qquad && a_1 = \frac{3}{2} + \frac{3}{8}p^2 + \ldots, \qquad && a_2 = \frac{4}{3} + \frac{2}{5}p^2 + \ldots \\
&a_3 = \frac{5}{4} + \frac{5}{12}p^2 + \ldots, && a_4 = \frac{6}{5} + \frac{3}{7}p^2 + \ldots, && \ldots \\
&c_0 = 2 + \frac{3}{10}p^2 + \ldots, && c_2 = \frac{3}{2} + \frac{5}{14}p^2 + \ldots, && \ldots \\
&d_0 = 4 + \frac{1}{5}p^2 + \ldots, && d_2 = 2 + \frac{2}{7}p^2 + \ldots, && \ldots
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

При больших p, как мы видели, можно принять

$$
c_0 = c_2 = d_0 = d_2 = p = \frac{\sqrt{2gy}}{v_0}
\tag{3.5}
$$

Тогда формулы (3.2) можно заменить следующими

$$
\begin{aligned}
t &= \sqrt{\frac{2y}{g}}\left\{1 + \frac{Cy}{6}\left[1 - k\left(H - \frac{2}{5}y\right)\right]\right\} \\
x &= v_0\sqrt{\frac{2y}{g}}\left\{1 - \frac{Cy}{6}\left[1 - k\left(H - \frac{y}{5}\right)\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Эти формулы дают хорошую точность при малых v_0 ($v_0 \leqslant 70$ м/сек), так как в этом случае p велико на значительной части траектории.

Формулы (3.6), полученные автором в 1933 г. [1], являются обобщением формул Wimperis [6], которые получаются из (3.6) при $k=0$.

При малых y, когда p мало, можно ограничиться в формулах (3.4) одними первыми членами. Кроме того, можно пренебречь величиной ky по сравнению с единицей.

Тогда формулы (3.2) примут вид

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{2y}{g}}\left\{1+\frac{Cv_0}{3}\sqrt{\frac{2y}{g}}(1-kH)\right\} \\ x &= v_0\sqrt{\frac{2y}{g}}\left\{1-\frac{Cv_0}{3}\sqrt{\frac{2y}{g}}(1-kH)\right\} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Эти формулы дают хорошую точность при малых y ($y \leqslant 500$ м).

Если принять при любых p приближенные формулы (2.13), которые в данном случае принимают вид

$$c_0 = d_2 = \frac{\sqrt{4v_0^2+2gy}}{v_0}, \quad c_2 = \frac{\sqrt{9v_0^2+8gy}}{2v_0}, \quad d_0 = \frac{\sqrt{16v_0^2+2gy}}{v_0} \tag{3.8}$$

то получим приближенные формулы

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{2y}{g}}\left\{1+\frac{C}{12}\sqrt{\frac{2y}{g}}\left[(1-kH)\sqrt{4v_0^2+2gy}+\frac{ky}{5}\sqrt{9v_0^2+8gy}\right]\right\} \\ x &= v_0\sqrt{\frac{2y}{g}}\left\{1-\frac{C}{12}\sqrt{\frac{2y}{g}}\left[(1-kH)\sqrt{16v_0^2+2gy}+\frac{ky}{5}\sqrt{4v_0^2+2gy}\right]\right\} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Эти формулы дают высокую точность практически во всех случаях.

Поступила в редакцию
26 VI 1942

Военно-воздушная академия
им. Жуковского

THE GENERAL PROBLEM OF EXTERIOR BALLISTICS FOR AVIATION BOMBS

V. S. PUGACHEY

(Summary)

The author takes the motion equations of the centre of mass of a bomb (1.1) and seeks the solution of these equations in the form of series (1.4). Substituting these series in equations (1.1) and comparing the coefficients at identical powers of c in both parts of the equations, he obtains equations (1.5) and (1.6) for determining the coefficients of expansion (1.4), where l_p is given by equation (1.7). The solution of equations (1.5) and (1.6) satisfying the initial conditions (1.3) is given by formulae (1.8) and (1.9). In particular, formulae (1.9) give the expressions (1.11) and (1.12) for the coefficients c of the first power.

The author determines u and w and calculates further, with formulae $(1.2)_3$ the time taken in falling and the abscissa of the bomb trajectory. Expanding t and x into series, with respect to integer positive powers of the ballistic coefficient c, and confining himself with the terms c not higher than the first power, he get the approximate formulae (1.13) where the functions T and X are determined by formulae (1.14) or (1.15) and (1.16).

Neglecting the dependence of the sound velocity upon altitude, which is equivalent to the admission of approximate formula (1.17), we shall reduce the second formula (1.11) to the form (1.19) where $H(y)$ is determined by

formula (1.18). Further for simplifying the tabulation of the functions T and X it is accepted formula (1.12). Therefore T and X will be expressed by formulae (1.21) and (1.22).

To obtain approximate analytical formulae for t and x a quadratic law for the air resistance and a linear law for the change of the air density with altitude are adopted. Then G and H are expressed by formulae (2.1), and further A, T and H are defined by formulae (2.2)—(2.7). Introducing the notation (2.8) we obtain the approximate formulae (2.9).

Further on the author demonstrates that for large p may be taken $a_0 = c_0 = d_0 = c_2 = d_2 = p$. If p_0 is also large, and the values of $\frac{1}{p} \ln \frac{p}{p_0}$ are small as compared with $p - p_0$, then can be used the approximate formulae (2.11), (2.12). Finally, as the calculations show, for any p the approximate formulae (2.13) are acceptable.

In a particular case, when an airplane, dropping the bomb, is flying horizontally $p_0 = w_0 = 0$ and formulae (2.9) take the form (3.2).

For small values of p it is more convenient to apply formulae (3.1). For large values of p, *i. e.* for small v_0, formulae (3.2) may be substituted by approximate formulae (3.6). For small values of y, *i. e.* for small p, formulae (3.2) are substituted by approximate formulae (3.7). Finally, for anyone y and v_0 formulae (3.2) may be replaced, in virtue of (2.13), by approximate formulae (3.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Пугачев В. С. О применении теоремы Poincaré к интегрированию уравнения движения бомбы, сброшенной с самолета. Труды ВВА. 1936. № 16.
2. Пугачев В. С. Основная задача внешней баллистики для авиабомбы. Прикладная математика и механика. 1942. Т. VI. Вып. 1.
3. Пугачев В. С. О приближенном представлении элементов траектории авиабомбы полиномами относительно начальной скорости. Труды ВВА. 1941. № 76.
4. Poincaré H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. S. 1.
5. Вентцель Д. А., Шапиро Я. М. Внешняя баллистика. Оборонгиз. 1939. Ч. 1.
6. Wimperis. Technical report of the Aeronautical Research Committee 1927—1928. Vol. II.