Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика, том VII, 1943

К ЗАДАЧЕ О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПСЕВДОЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Б. В. БУЛГАКОВ
(Москва)

С 1918 г., когда появилось вошедшее в учебники исследование Г. Дуффинга [6] о вынужденных колебаниях системы с нелинейной характеристикой восстанавливающей силы, этому вопросу было посвящено не мало работ; некоторые из них перечислены в конце статьи. Здесь я хотел бы обратить внимание на те удобства, которые в исследованиях подобного рода, относящихся к консервативным системам, связаны с применением «укороченных» уравнений ван-дер-Поля, написанных в канонической форме. Эти уравнения не только позволяют приближенно определить амплитуды вынужденных колебаний, но и доставляют удобный аппарат для проверки их устойчивости и изучения биений.

§ 1. Приближенные уравнения вынужденных колебаний псевдолинейной системы с одной степенью свободы

Чтобы облегчить сравнение с работой А. И. Лурье и А. И. Чекмарева [11], возьмем уравнение движения в той же форме, что и эти авторы,

$$m\ddot{x} + f(x) - R\sin\omega t = 0 \tag{1}$$

где $f(x)$ — характеристика восстанавливающей силы (с обратным знаком), которая может быть задана графически. Вводя скорость $\dot{x}$ как вспомогательную неизвестную, получим эквивалентную систему двух уравнений первого порядка

$$\dot{x} = y, \qquad m\dot{y} + f(x) - R\sin\omega t = 0 \tag{2}$$

которую преобразуем еще раз при помощи формул

$$x = q\cos\omega t + p\sin\omega t, \qquad y = \omega(-q\sin\omega t + p\cos\omega t) \tag{3}$$

выражающих переход из фазовой плоскости с координатами x, y/ω во вращающуюся плоскость qp. В силу этих формул

$$\dot{x} = \dot{q}\cos\omega t + \dot{p}\sin\omega t + y, \qquad \dot{y} = \omega(-\dot{q}\sin\omega t + \dot{p}\cos\omega t) - \omega^2 x$$

и, следовательно, подставляя в уравнения (2),

$$\dot{q}\cos\omega t + \dot{p}\sin\omega t = 0$$
$$m\omega(-\dot{q}\sin\omega t + \dot{p}\cos\omega t) + f(x) - m\omega^2 x = R\sin\omega t$$

Будем предполагать, что поведение системы исследуется в области резонанса, так что характеристика восстанавливающей силы может быть представлена в виде

$$f(x) = m(\omega^2 + \mu)\, x - U'(x), \tag{4}$$

где $m(\omega^2 + \mu)\, x$ — линейное приближение для $f(x)$, буква μ обозначает некоторую малую величину, а $U'(x)$ — нелинейную поправку, которую представляем как производную от некоторой первообразной функции $U(x)$. При $\mu = 0$, $U'(x) \equiv 0$ мы имели бы линейную систему с собственной угловой частотой ω, равной частоте возмущающей силы.

Пользуясь выражением (4) и разрешая уравнения движения относительно производных $\dot{q}$, $\dot{p}$ от новых неизвестных, находим

$$\dot{q} = \sin\vartheta \left[\frac{\mu}{\omega} x - \frac{1}{m\omega} U'(x)\right] - \frac{R}{m\omega} \sin^2\vartheta$$

$$\dot{p} = -\cos\vartheta \left[\frac{\mu}{\omega} x - \frac{1}{m\omega} U'(x)\right] + \frac{R}{m\omega} \sin\vartheta \cos\vartheta$$

где

$$\vartheta = \omega t \tag{5}$$

а x в правых частях есть линейная комбинация из q и p

$$x = q\cos\vartheta + p\sin\vartheta \tag{6}$$

Для получения приближенных уравнений ван-дер-Поля следует заменить правые части уравнений движения их средними значениями по переменной ϑ, при вычислении которых q и p рассматриваются как постоянные

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mu}{\omega} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin\vartheta\,(q\cos\vartheta + p\sin\vartheta)\, d\vartheta - \frac{1}{2\pi m\omega} \int_{-\pi}^{+\pi} U'(x) \sin\vartheta\, d\vartheta - \frac{R}{m\omega} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2\vartheta\, d\vartheta$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\mu}{\omega} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos\vartheta(q\cos\vartheta + p\sin\vartheta)\, d\vartheta + \frac{1}{2\pi m\omega} \int_{-\pi}^{+\pi} U'(x)\cos\vartheta\, d\vartheta + \frac{R}{m\omega} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin\vartheta \cos\vartheta\, d\vartheta$$

Замечая, что

$$\frac{\partial x}{\partial q} = \cos\vartheta, \qquad \frac{\partial x}{\partial p} = \sin\vartheta$$

и полагая

$$K = \frac{1}{2} m\mu\,(q^2 + p^2) - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} U(q\cos\vartheta + p\sin\vartheta)\, d\vartheta \tag{7}$$

можем написать

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{2m\omega} \left(\frac{\partial K}{\partial p} - R\right), \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{1}{2m\omega} \frac{\partial K}{\partial q} \tag{8}$$

С помощью полярных координат во вращающейся плоскости, вводимых посредством соотношений

$$q = r\cos\theta, \qquad p = -r\sin\theta \tag{9}$$

получается

$$K(r) = \frac{1}{2} m\mu r^2 - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} U(r\cos u)\, du \tag{10}$$

где

$$u = \vartheta + \theta \tag{11}$$

Форма правой части выражения (10) показывает, что K действительно зависит только от r и является четной функцией этой переменной, так как, полагая $u = v + \pi$, легко получить $K(-r) = K(r)$.

Производные от K могут быть представлены в виде

$$\frac{\partial K}{\partial q} = \frac{q}{r}\frac{dK}{dr}, \qquad \frac{\partial K}{\partial p} = \frac{p}{r}\frac{dK}{dr} \tag{12}$$

и тогда уравнения (8) заменяются следующими

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{2m\omega}\left(\frac{p}{r}\frac{dK}{dr} - R\right), \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{1}{2m\omega}\frac{q}{r}\frac{dK}{dr} \tag{13}$$

Будем искать положения равновесия во вращающейся плоскости, которые соответствуют, очевидно, установившимся вынужденным колебаниям, так как при постоянных q, p выражение (3) для x будет периодической функцией с угловой частотой ω. Приравнивая нулю правые части последних уравнений, из второго получим $q = 0$, ибо если сделать равной нулю dK/dr, то из первого уравнения вытекало бы $R = 0$.

Полагая в первом уравнении $q = 0$, имеем

$$\left(\frac{\partial K}{\partial p}\right)_{q=0} - R = 0$$

или, вычисляя производную $\partial K/\partial p$ из формулы (7),

$$m\mu p - R = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \sin\vartheta\, U'(p\sin\vartheta)\, d\vartheta \tag{14}$$

Обозначая

$$\omega^2 + \mu = \alpha \tag{15}$$

найдем

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha}\right)p - \frac{R}{m\alpha} = \frac{1}{\pi m\alpha}\int_{-\pi}^{+\pi} \sin\vartheta\, U'(p\sin\vartheta)\, d\vartheta$$

и если взять частный случай $U'(x) = m\gamma x^3$, то получится уравнение

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha}\right)p - \frac{R}{m\alpha} = \frac{3}{4}\frac{\gamma}{\alpha}p^3$$

которое рассматривал Г. Дуффинг; уравнение движения имеет при этом вид

$$\ddot{x} + \alpha x - \gamma x^3 = \frac{R}{m}\sin\omega t \tag{16}$$

Возвращаясь к общему случаю, представим (14) в виде

$$-m\omega^2 p - R = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \sin\vartheta\,[-m(\omega^2 + \mu)\, p\sin\vartheta + U'(p\sin\vartheta)]\, d\vartheta$$

или согласно (4)

$$m\omega^2 p + R = J(p) \tag{17}$$

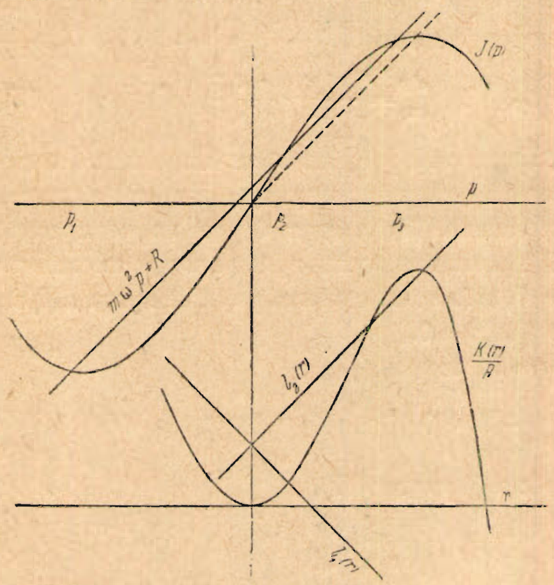
причем

$$J(p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \sin\vartheta\, f(p\sin\vartheta)\, d\vartheta \tag{18}$$

Уравнение (17), сходное с тем, которое применял Р. Рюденберг [5], и полученное А. И. Лурье и А. И. Чекмаревым [11] с помощью метода Галеркина, дает вообще для p несколько дискретных значений p^*, которые и представляют амплитуды вынужденных колебаний, так как при $q=0$, $p=p^*$ мы имеем

$$x = p^* \sin \omega t$$

Можно определять эти амплитуды графически как абсциссы точек пересечения кривой $\zeta = J(p)$ и прямой $\zeta = m\omega^2 p + R$ (фиг. 1, верхняя часть).



Фиг. 1.

Экспериментально возможность нескольких различных амплитуд вынужденного колебания при одном и том же возмущении впервые обнаружил О. Мартинссен [1].

Заметим, что функция $J(p)$ всегда нечетна, так как, полагая $\vartheta = v + \pi$, из выражения (18) имеем $J(-p) = -J(p)$; из этого следует также $J(0) = 0$, если даже $f(0) \neq 0$.

Предположим, например, что характеристика $f(x)$ есть нечетная функция, производная которой, будучи положительной при $x=0$, убывает, когда x возрастает по положительным значениям. Пользуясь формулой (18) и выводимыми из нее выражениями

$$J'(p) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \sin^2\vartheta \, f'(p \sin \vartheta)\, d\vartheta, \qquad J'(0) = f'(0) \tag{19}$$

$$J''(p) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \sin^3\vartheta \, f''(p \sin \vartheta)\, d\vartheta, \qquad J''(0) = 0 \tag{20}$$

легко убедиться, что всеми перечисленными свойствами обладает и функция $J(p)$. Уравнение (17) при некоторых значениях ω и R имеет тогда один отрицательный корень p_1 и два положительных корня p_2, p_3, как это показано на фиг. 1 (верхняя часть). Характеристика Дуффинга $f(x) \equiv m(\alpha x - \gamma x^3)$ относится как раз к данному классу.

Движения точки (q, p) во вращающейся плоскости около тех из положений $(0, p^*)$, которые являются устойчивыми, соответствуют, очевидно, биениям, так как при переменных q, p первая формула (3) дает колебания с переменной амплитудой и начальной фазой. Для изучения этих биений удобно ввести функцию Гамильтона

$$H = \frac{R}{2m\omega}\left(\frac{K}{R} - p\right) \tag{21}$$

и представить уравнения (8) в канонической форме

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{22}$$

§ 2. Устойчивость вынужденных колебаний, биения

Так как H не зависит явно от времени, то можно тотчас написать обобщенный интеграл энергии $H = \text{const}$ или

$$\frac{K}{R} - p = h \tag{23}$$

Отсюда

$$p = \frac{K(r)}{R} - h \tag{24}$$

и

$$q = \pm\sqrt{r^2 - p^2} = \pm\sqrt{r^2 - \left[\frac{K(r)}{R} - h\right]^2}$$

или

$$q = \pm\sqrt{\left[\frac{K(r)}{R} - l_1(r)\right]\left[l_2(r) - \frac{K(r)}{R}\right]} \tag{25}$$

где

$$l_1(r) = -r + h, \qquad l_2(r) = r + h \tag{26}$$

Уравнения (24) и (25) могут рассматриваться как параметрические уравнения интегральных кривых в плоскости qp. Эти кривые симметричны относительно оси p.

Умножая (13) на $2q$, $2p$ и складывая, найдем

$$\frac{d(r^2)}{dt} = -\frac{R}{m\omega}q \tag{27}$$

если же заменить q его выражением (25), то получится уравнение

$$\frac{d(r^2)}{dt} = \pm\frac{R}{m\omega}\sqrt{\left[\frac{K(r)}{R} - l_1(r)\right]\left[l_2(r) - \frac{K(r)}{R}\right]} \tag{28}$$

в котором переменные могут быть разделены, в результате чего определение закона движения по интегральной кривой приведется к квадратуре.

Дальнейшее исследование, относящееся к устойчивости вынужденных колебаний и течению биений, естественно, связывается со свойствами функции $K(r)$. Полагая $u = v + 3\pi/2$, ее можно написать в виде

$$K(r) = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + \frac{1}{2}m(\omega^2 + \mu)r^2 - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} U(r\sin v)\,dv$$

или, обозначая переменную интеграции через ϑ,

$$K(r) = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + \int_{-\pi}^{+\pi}\left[\frac{1}{2}m(\omega^2 + \mu)(r\sin\vartheta)^2 - U(r\sin\vartheta)\right]d\vartheta \tag{29}$$

Дифференцируя по r и сравнивая с выражением (18) для J, имеем

$$K'(r) = J(r) - m\omega^2 r, \qquad K''(r) = J'(r) - m\omega^2 \tag{30}$$

Разности $J(r) - m\omega^2 r$ можно взять из построенного ранее графика (фиг. 1, верхняя часть). То обстоятельство, что теперь мы берем аргумент r, а не p, не имеет, разумеется, значения. Прямая, изображающая линейный член $m\omega^2 r$, проходит через начало координат и параллельна той, при помощи которой мы находили амплитуды вынужденных колебаний. Это дает возможность составить представление о течении функции $K(r)$ (фиг. 1, нижняя часть). Точки перегиба на кривой $l = K(r)/R$ соответствуют тем точкам кривой $\zeta = J(p)$, где касательная к последней параллельна прямой $\zeta = m\omega^2 p + R$.

Как показывает (25), действительные значения q получаются только при тех положительных значениях r, для которых соответствующая часть кривой $l = K(r)/R$ заключена внутри угла, образованного прямыми $l = l_1(r)$ и $l = l_2(r)$. Эта часть кривой может состоять из одной или нескольких отдельных дуг, а значения r образуют один или несколько сплошных интервалов, ограниченных корнями подрадикального выражения в (25); интегральная кривая в плоскости qp будет также состоять из одного или нескольких отдельных кусков.

Пусть будут r^* абсолютные величины положительных и отрицательных корней $p^* = \pm r^*$ уравнения амплитуд (17), так что

$$m\omega^2(\pm r^*) + R = J(\pm r^*)$$

или, пользуясь тем, что $J(p)$ — нечетная функция,

$$m\omega^2 r^* \pm R = J(r^*) \tag{31}$$

откуда с помощью (30)

$$\frac{K'(r^*)}{R} = \pm 1 = l_2'(r^*) \text{ или } = l_1'(r^*) \tag{32}$$

Мы видим, что числа r^* обращают в нуль производную от одного из двух множителей подрадикального выражения в (25). Эти числа суть абсциссы тех точек, в которых одна из двух прямых $l = l_1(r)$, $l = l_2(r)$ касается кривой $l = K(r)/R$. Те значения h^* постоянной h, при которых касание имеет место, соответствуют установившимся вынужденным колебаниям, так как в этих случаях r^* есть двойной корень подрадикального выражения и интервал изменения r стягивается в точку. В конце настоящего параграфа мы дадим конкретный пример такого исследования.

С помощью соображений подобного рода, рассматривая малые изменения h, можно было бы получить и заключение об устойчивости вынужденных колебаний. Однако мы предпочтем дать независимый вывод.

Для этого составим уравнения в вариациях

$$\frac{d}{dt}\delta q = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p}\right)\delta q + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\right)\delta p, \qquad \frac{d}{dt}\delta p = -\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q^2}\right)\delta q - \left(\frac{\partial H}{\partial q \partial p}\right)\delta p$$

описывающие малые движения в плоскости qp около одного из положений «равновесия» $(0, p^*)$. Круглые скобки, в которые заключены символы вторых производных от H, должны указывать, что эти производные берутся для положений равновесия. Чтобы их вычислить, заметим, что из (12), (30) вытекает

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 K}{\partial q^2} &= \frac{1}{r}K'(r) + q\left[\frac{d}{dr}\frac{1}{r}K'(r)\right]\frac{q}{r} = \frac{1}{r}K'(r) + \frac{q^2}{r}\left[\frac{1}{r}K''(r) - \frac{1}{r^2}K'(r)\right] = \\ &= \frac{1}{r}\left[J(r) - m\omega^2 r\right] + \frac{q^2}{r}\left[\frac{J'(r) - m\omega^2}{r} - \frac{J(r) - m\omega^2 r}{r^2}\right] = \\ &= -m\omega^2 + \frac{1}{r}\left[\frac{q^2}{r}J'(r) + \left(1 - \frac{q^2}{r^2}\right)J(r)\right] = -m\omega^2 + \frac{1}{r^2}\left[q^2 J'(r) + \frac{p^2}{r}J(r)\right]\end{aligned} \tag{33}$$

и аналогично

$$\frac{\partial^2 K}{\partial q \partial p} = \frac{qp}{r^2}\left[J'(r) - \frac{1}{r}J(r)\right] \tag{34}$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial p^2} = -m\omega^2 + \frac{1}{r^2}\left[p^2 J'(r) + \frac{q^2}{r}J(r)\right] \tag{35}$$

Замечая, что вторые производные от H и K отличаются лишь множителем $2m\omega$, и пользуясь (31), имеем для положений равновесия ($q=0$, $p=p^*=\pm r^*$)

$$\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q^2}\right)=\pm\frac{R}{2m\omega r^*}=\frac{R}{2m\omega p^*},\qquad \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q\,\partial p}\right)=0$$
$$\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\right)=\frac{J'(r^*)-m\omega^2}{2m\omega}=\frac{J'(p^*)-m\omega^2}{2m\omega} \tag{36}$$

Уравнения в вариациях получают вид

$$\frac{d}{dt}\delta q=\frac{J'(p^*)-m\omega^2}{2m\omega}\delta p,\qquad \frac{d}{dt}\delta p=-\frac{R}{2m\omega p^*}\delta q \tag{37}$$

Характеристическое уравнение будет

$$D^2+\frac{R}{(2m\omega)^2}\frac{J'(p^*)-m\omega^2}{p^*}=0 \tag{38}$$

Если p^* и $J'(p^*)-m\omega^2$ имеют разные знаки, то корни характеристического уравнения действительны и положение равновесия, наверное, неустойчиво. Если знаки одинаковы, то корни будут чисто мнимые, сопряженные. Этот случай вообще является, как известно, сомнительным, так как здесь из уравнений в вариациях мы еще не имеем права выносить окончательное суждение об устойчивости. Однако в нашей задаче существование функции $H(q,p)$ разрешает затруднение. Очевидно, что эта функция, связанная с K простой зависимостью (21), будет иметь минимум в тех положениях равновесия, где p^* и $J'(p^*)-m\omega^2$ положительны, и максимум в тех положениях, где эти величины отрицательны. Интегральные кривые могут рассматриваться как сечения поверхности

$$z=\frac{K(q,p)}{R}-p \tag{39}$$

плоскостями $z=h$, параллельными плоскости qp. В положениях равновесия плоскость касается поверхности, и когда это положение есть минимум или максимум для z, то при малых изменениях h мы получаем в сечении малые замкнутые кривые, окружающие положение равновесия. Следовательно, это положение устойчиво.

Полученному нами критерию легко дать такую форму, при которой суждение об устойчивости выносится с одного взгляда на диаграмму фиг. 1, которая служила нам для определения самих амплитуд p^*. Представим себе те две области плоскости, которые примыкают к кривой $\zeta=J(p)$ снизу и сверху. Разность $J'(p^*)-m\omega^2$ будет положительна, если, ведя прямую $\zeta=m\omega^2 p+R$ слева направо и пересекая кривую, переходим из верхней области в нижнюю. Поэтому *при отрицательных p^* устойчивые колебания получаются в тех случаях, когда прямая переходит из нижней области в верхнюю, а при положительных p^*—в тех случаях, когда имеет место переход из верхней области в нижнюю. Если переход совершается в противоположном смысле, то соответствующее установившееся колебание неустойчиво.*

Этот графический критерий в сущности не отличается от того, который применяется в теории центробежных регуляторов угловой скорости.

В качестве примера возьмем опять характеристику Г. Дуффинга

$$f(x)\equiv m(\alpha x-\gamma x^3)$$

Здесь

$$J(p) = m\left(\alpha p - \frac{3}{4}\gamma p^3\right)$$

так что с помощью (15), (30) получаем

$$K'(r) = m\left(\mu r - \frac{3}{4}\gamma r^3\right), \qquad K(r) = \frac{1}{2} m\left(\mu r^2 - \frac{3}{8}\gamma r^4\right) + \text{const}$$

Уравнение амплитуд может быть написано в форме

$$\left(\mu p - \frac{3}{4}\gamma p^3\right) = R$$

Если взять числовые данные

$$\frac{m\alpha}{R} = 15, \qquad \frac{m\omega^2}{R} = 10, \qquad \frac{3}{4}\frac{m\gamma}{R} = 4$$

то

$$\frac{m\mu}{R} = \frac{m(\alpha - \omega^2)}{R} = 5 \quad \text{и} \quad \frac{K(r)}{R} = \frac{5}{2} r^2 - r^4 + \text{const}$$

Уравнение амплитуд получает вид

$$4p^3 - 5p + 1 \equiv (p-1)(4p^2 + 4p - 1) = 0$$

Параметрические уравнения интегральных кривых будут

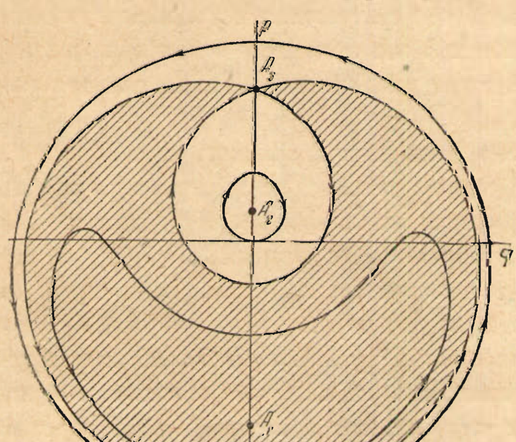
$$q = \pm\sqrt{r^4 - \left(\frac{5}{2} r^2 - r^4 - h\right)^2} = \pm\sqrt{\left(r^4 - \frac{5}{2} r^2 + r + h\right)\left(-r^4 + \frac{5}{2} r^2 + r - h\right)}$$

$$p = \frac{5}{2} r^2 - r^4 - h$$

Уравнение амплитуд имеет корни

$$p_1 = -\frac{1+\sqrt{2}}{2} = -1.207, \qquad p_2 = \frac{-1+\sqrt{2}}{2} = 0.207, \qquad p_3 = +1$$

График на фиг. 1 начерчен как раз для данного случая; применяя сформулированный выше критерий, видим, что корни p_1, p_2 соответствуют устойчивым, а корень p_3 — неустойчивым колебаниям. Приравнивая нулю производную от первого множителя подрадикального выражения в формуле для q, получим опять уравнение амплитуд.



Фиг. 2.

Если взять $h = \frac{1}{2}$, то подрадикальное выражение делится на $(r^2 - 1)^2$, и можем написать

$$q = \pm |r^2 - 1| \sqrt{-r^4 + 3r^2 - \frac{1}{4}},$$

$$p = \frac{5}{2} r^2 - r^4 - \frac{1}{2}$$

Интегральная кривая, определяемая этими уравнениями, есть так называемая сепаратриса, проходящая через неустойчивое положение равновесия $A_3(0, p_3)$, которое соответствует значению $r = 1$; эта кривая изображена на фиг. 2.

Для получения ее действительных точек нужно давать r все значения, при которых подрадикальное выражение $-r^4+3r^2-\frac{1}{4}$ остается положительным; эти значения заключены между двумя корнями

$$\sqrt{\frac{3}{2}-\sqrt{2}}=0.293, \qquad \sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}=1.707$$

Сепаратриса выделяет на плоскости qp заштрихованную на чертеже серпообразную область, где поверхность

$$z=\frac{5}{2}(q^2+p^2)-(q^2+p^2)^2-p$$

лежит выше плоскости $z=0.5$. Вершина этой «возвышенности» лежит над точкой $A_1(0, p_1)$; ее высота равна

$$z_M=\frac{21}{16}+\sqrt{2}=2.727$$

при $0.5<h<2.727$ интегральные кривые проходят в заштрихованной области и окружают точку A_1. Внутри этой области имеется другая незаштрихованная область, где поверхность лежит под плоскостью $z=0.5$. Наинизшая точка этой «низменности» лежит под точкой $A_2(0, p_2)$ на глубине

$$z_m=\frac{21}{16}-\sqrt{2}=-0.102$$

Для точек, лежащих вне заштрихованной области, поверхность также лежит ниже плоскости $z=0.5$. При $-0.102<h<0.5$ каждая интегральная кривая состоит из двух ветвей, одна из которых лежит во внутренней низменности и окружает точку $A_2(0, p_2)$, а другая проходит вне серпообразной области. При $h<-0.102$ остается лишь одна внешняя ветвь.

Поступила в редакцию
27 VII 1942

Институт механики
Московского государственного
университета

ON THE PROBLEM OF FORCED VIBRATIONS OF PSEUDO-LINEAR SYSTEMS

B. V. BULGAKOV

(Summary)

It is shown that in the case of a conservative non-linear system the method of van der Pol, when applied to the problem stated in the title and expressed by (1), leads to the approximate differential equations (8) which can be written in the Hamiltonian canonical form (22). The amplitudes of steady forced vibrations are to be determined graphically (fig. 1) with the aid of the equation of R. Rüdenberg (17) derived from the equations of motion. The Hamilton function (21) being independent of the time, the generalized integral of energy (23) can be obtained and this will be conveniently used for the discussion of the stability of the steady forced vibrations and for the examination of the phenomenon of beats in a non-linear system.

The results of such an investigation are illustrated by the phase diagram (fig. 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Martienssen O. Über neue Resonanzerscheinungen in Wechselstromkreisen. Physik. Zeitschr. 1910. 11. Jahrgang. No. 10 [S. 448—460].
2. Duffing Georg. Erzwungene Schwingungen bei veränderlichen Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung. Braunschweig. 1918.
3. Horn J. Über kleine, endliche erzwungene Schwingungen. Arch. f. Math. und Phys. 1920. 28.
4. Hamel G. Über erzwungene Schwingungen bei endlichen Amplituden. Math. Ann. 1922. Bd. 86 [S. 1].
5. Rüdenberg Reinhold. Einige unharmonische Schwingungsformen mit grosser Amplitude, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 1923. Bd. 3. H. 6 [S. 454—467].
6. Appleton E. V. On the Anomalous Behaviour of a Vibration Galvanometer. Phil. Magazine. 1924. Vol. 47 [P. 609—619].
7. Den Hartog J.P.a. Mikina S. J. Forced Vibrations with Non-Linear Spring Constants. Trans. A. S. M. E. 1932. Vol. 54. Paper APM — 54 — 15.
8. Den Hartog J. P. The Amplitudes of Non-Harmonic Vibrations, J. of the Franklinl Institute. 1933. Vol. 216 [P. 459—473].
9. Iglish R. Die erste Resonanzkurve beim Duffingschen Schwingungsproblem. Math. Ann. 1936. Bd. 112 [S. 221—246].
10. Den Hartog J. P. a. Heiles R. M. Forced Vibrations in Non-Linear Systems with Various Combinations of Linear Springs. J. of Applied Mech. 1936. Vol. 3. No. 4 [P. 126—130].
11. Лурье А. И. и Чекмарев А. И. Вынужденные колебания в нелинейной системе с характеристикой, составленной из двух прямолинейных отрезков. Прикладная математика и механика. 1938. Новая серия. Т. I. Вып. 3 [Стр. 307—324].
12. Rausher Manfred. Steady Oscillations of Systems with Non-Linear and Unsymmetrical Elasticity, J. of Applied Mech. 1938. Vol. 5. No. 4 [P. A-169—A-177].
13. Лурье А. И. К задаче о вынужденных нелинейных колебаниях. Ученые записки Ленингр. гос. университета. Серия математических наук (механика). Ленинград. 1939. Вып. 8 [Стр. 25—33].
14. Бать М. И. Вынужденные колебания в системе с гистерезисом. Прикладная математика и механика. Новая серия. 1940. Т. IV, вып. 3 [Стр. 13—30].