

О РАСЧЕТЕ СОПЕЛ ЛАВАЛЯ

В. АСТРОВ, Л. ЛЕВИН, Е. ПАВЛОВ, С. ХРИСТИАНОВИЧ

(Москва)

Сопло Лавалья служит для получения установившегося сверхзвукового потока газа с данным распределением скоростей, например, равномерного потока или симметричного потока.

Простейший расчет сопла основан на использовании зависимости между величиной поперечного сечения «струйки» при адиабатическом течении газа и величиной скорости и относительного значения давления в этом сечении. В этот расчет входят средние скорости в каждом поперечном сечении. Таким путем можно оценить скорость потока, которая может быть получена при заданном перепаде давления, и определить отношение площади сечения в конце сопла к площади критического сечения. Длина сопла и очертание его стенок не определяются этим расчетом. Очертание стенок сопла и его длина оказывают значительное влияние на распределение скоростей в плоскостях поперечного сечения сопла и определяют отклонения действительного течения в сопле от идеальной схемы «струйки» с равномерным распределением скоростей в каждом поперечном сечении.

Для получения в конце сопла заданного, например, равномерного поля скоростей необходимо специальным образом подобрать очертание стенок и длину сопла. Правильный подбор сопла сказывается и на повышении скоростного коэффициента полезного действия сопла, который определяется как отношение средней скорости в конце сопла к скорости, которая имела бы место при соответствующем адиабатическом течении в «струйке».

Для получения равномерного потока в конце сопла пользуются теперь методом, предложенным Буземаном^[1] для расчета плоских сопел и распространенным на сопла с осевой симметрией Ф. Франклем^[2].

В сопле, рассчитанном по методу Буземана—Франкля, поток в конце сопла близок к равномерному и коэффициент полезного действия такого сопла выше, чем у обычно применявшихся ранее конических сопел.

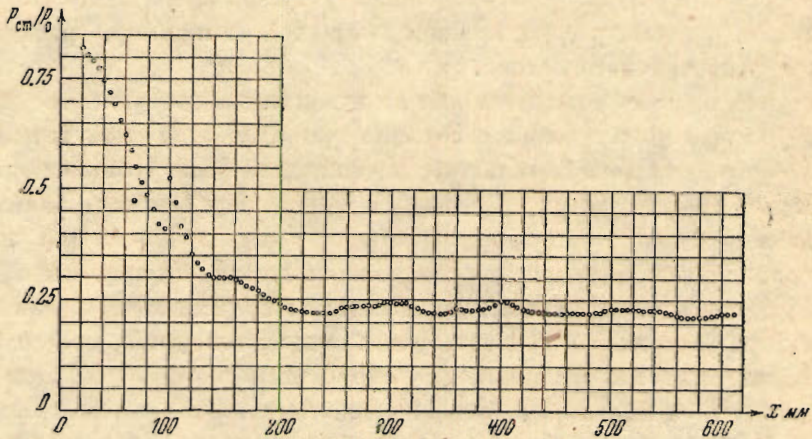
Сравнение работы этих сопел с обычными соплами можно найти в работе Кисенко^[3] и в обзорной статье Буземана^[4].

Однако, как показывают наблюдения, сопла, рассчитанные по Буземану—Франклю, все же работают недостаточно удовлетворительно.

Несмотря на полную равномерность потока, поступающего в сопло, в таких соплах имеются почти всегда, хотя и слабые, косые скачки уплотнения, которые, отражаясь от стенок сопла, вызывают неравномерное распределение скорости и давления в потоке в конце сопла.

Некоторые замечания по этому поводу можно найти в статье Ферри^[5]. Результаты измерений распределения давления вдоль оси плоского сопла

Лавая, рассчитанного по методу Буземана, произведенных в ЦАГИ Г. М. Рябинковым, показаны на фиг. 1. Недалеко от критического сечения расположен скачок уплотнения, дающий начало возмущениям, распространяющимся по всей длине сопла. Эти результаты находятся в полном согласии с данными теоретического исследования [6]. Как показывают теоретические исследования [6], конфигурация входной части сопла оказывает очень значительное влияние на развитие сверхзвукового потока непосредственно за поверхностью перехода от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым. При невыполнении некоторых специальных условий, относящихся к форме поверхности перехода и изменению вдоль нее вектора скорости, либо у самой поверхности перехода, либо недалеко от нее обязательно образуются скачки уплотнения. Благодаря тому, что эти скачки образуются недалеко от поверхности



Фиг. 1.

перехода, т. е. в области потока, где сверхзвуковые скорости еще малы, мощность их невелика, но все же достаточна для того, чтобы вызвать заметные колебания давления как вдоль оси сопла, так и в потоке после выхода из сопла.

При расчете сопла Лавая по методу Буземана не только не учитывается влияние на работу сопла его входной части, но и участка сопла, непосредственно следующего за критическим сечением. Участок сопла непосредственно за поверхностью перехода при расчете по методу Буземана предполагается сделанным в виде конуса иногда с значительным углом раствора. При расчете предполагается, что в конце этого участка сопла скорости имеют радиальное направление и что линиями равных величин скорости являются окружности с центром в вершине конуса, образующего переходную часть сопла. Эти условия принимаются как начальные при расчете следующей части сопла.

Эти начальные условия на самом деле не реализуются, что вызывает несовпадение действительного течения с расчетным.

Для правильного проектирования сопла необходимо выбрать входную часть сопла так, чтобы ее форма гарантировала возможность развития сверхзвукового течения за поверхностью перехода без образования скачков уплотнения. Затем надо дать расчет сверхзвукового течения непосредственно за поверхностью перехода для получения точных начальных условий для расчета следующей части сопла по методу Буземана.

Особенно большое значение имеет правильный подбор входной части сопла в том случае, когда поток, поступающий в сопло, неравномерный. Входная часть сопла должна быть подобрана так, чтобы эффективно выравнять неравномерность поступающего в нее потока.

Как показывают теоретические исследования, наилучшей формой поверхности перехода при симметричном течении относительно оси сопла является плоская поверхность перехода¹.

Наличие плоской поверхности перехода обладает и тем удобством, что позволяет для любой формы входной части сопла, при которой реализуется плоская поверхность перехода, независимо подбирать участок сопла с сверхзвуковой скоростью.

Ниже дан метод расчета сопел Лавалья с плоской поверхностью перехода и приведены чертежи двух вариантов таких сопел.

1. ПЛОСКИЕ СОПЛА

§ 1. Расчет входной части сопла. Общие положения

Расчет плоского сопла основан на решении уравнений адиабатического движения газа. Эти уравнения имеют вид^[2]

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\omega^2}{2} + \frac{a^2}{x-1} = \frac{a_*^2(x+1)}{2(x-1)} \quad (1.3)$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^x = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{x}{x-1}} \quad (1.4)$$

где u и v — проекции вектора скорости на оси координат, $\omega = \sqrt{u^2 + v^2}$ — величина скорости, ρ — плотность, p — давление, T — абсолютная температура, $a = \sqrt{x(p/\rho)}$ — скорость звука, $x = c_p/c_v$ — отношение теплоемкости при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме, a_* — критическая скорость.

Для воздуха $x = 1.4$ и $a_* = 18.3 \sqrt{T_0}$ м/сек.

Уравнение (1.1) есть уравнение сохранения массы, уравнение (1.2) — уравнение, выражающее отсутствие вихрей, уравнение (1.3) — уравнение энергии и уравнение (1.4) — уравнение адиабаты.

Для исследования удобно ввести функцию тока и потенциал скоростей. Эти функции определяются на основании уравнений (1.1) и (1.2) выражениями

$$d\varphi = \frac{u}{a_*} dx + \frac{v}{a_*} dy \quad (1.5)$$

$$d\psi = -\frac{\rho}{\rho_0} \frac{v}{a_*} dx + \frac{\rho}{\rho_0} \frac{u}{a_*} dy \quad (1.6)$$

Уравнения (1.1) и (1.2) могут быть преобразованы к виду, более удобному для их решения.

¹ Христианович С. А. [6], стр. 29.

Для дозвукового потока эти уравнения преобразуются к следующему каноническому виду [7]:

$$\frac{\partial s}{\partial \mu} = -\frac{\partial \theta}{\partial \nu}, \quad \frac{\partial s}{\partial \nu} = \frac{\partial \theta}{\partial \mu} \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} = \sqrt{k} \frac{\partial \psi}{\partial \nu}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = -\sqrt{k} \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \quad (1.8)$$

$$dx = \frac{\cos \theta}{\lambda} d\varphi - \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\sin \theta}{\lambda} d\psi, \quad dy = \frac{\sin \theta}{\lambda} d\varphi + \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\cos \theta}{\lambda} d\psi \quad (1.9)$$

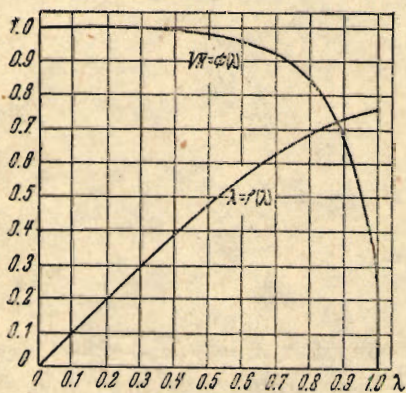
где θ — угол, образованный вектором скорости с осью x ,

$$\lambda = \frac{\omega}{a_*} \quad (1.10)$$

μ и ν — вспомогательные параметры, s и \sqrt{k} — некоторые функции λ . Имеем

$$\sqrt{k} = \sqrt{(1 - \lambda^2) \left(1 - \frac{z-1}{z+1} \lambda^2\right)^{\frac{z+1}{z-1}}} \quad (1.11)$$

$$\tilde{\lambda} = e^s = 2\lambda \sqrt{\frac{(h-1)^{h-1}}{(h+1)^{h+1}}} \sqrt{\frac{(h+u)^{h+1}}{(h-u)^{h-1}(u+1)^2}} \quad (1.12)$$



Фиг. 2.

уравнения (1.1) и (1.2) выражают, что $\varphi + i\psi$ является аналитической функцией от $x + iy$. В этом случае

$$\frac{d(\varphi + i\psi)}{d(x + iy)} = u - iv = \omega e^{-i\theta}$$

откуда

$$\ln \frac{d(\varphi + i\psi)}{d(x + iy)} = \ln \omega - i\theta$$

Таким образом $\ln \omega$ и $-\theta$ являются сопряженными гармоническими функциями и удовлетворяют уравнениям, совпадающим с уравнениями (1.7), если считать s логарифмом величины скорости этого потока. Величину $\tilde{\lambda}$ можно назвать поэтому величиной фиктивной скорости:

Уравнения (1.8) можно также интерпретировать как уравнения плоского течения несжимаемой жидкости, но в слое переменной толщины. Толщину этого слоя H следует при этом положить равной $1/\sqrt{k}$ (фиг. 3).

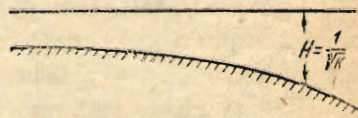
где

$$h = \sqrt{\frac{z+1}{z-1}}, \quad (1.13)$$

$$u = (1 - \lambda^2) \left(1 - \frac{z-1}{z+1} \lambda^2\right)^{-1}$$

(на фиг. 2 изображены графики этих функций).

Если рассматривать плоскость $\mu\nu$ как область, занятую некоторым вспомогательным течением несжимаемой жидкости, то уравнения (1.7) можно интерпретировать как уравнения для вектора скорости в этом течении. Действительно, в случае $\rho = \text{const}$



Фиг. 3.

Каждому решению системы уравнений (1.7), которое интерпретируется как некоторое плоское течение несжимаемой жидкости, отвечает решение уравнений (1.8) для той же области в плоскости $\mu\nu$, которое так же можно интерпретировать, как некоторое плоское течение несжимаемой жидкости в области, имеющей ту же конфигурацию в плане, но переменную толщину слоя жидкости, определяемую на основании решения системы (1.7) соответствующими значениями функции \sqrt{k} . Зная решение уравнений (1.7) и (1.8), пользуясь уравнениями (1.9), можно вычислить x и y .

Решение всех этих уравнений определяет в параметрическом виде некоторое течение газа в плоскости xu .

Таким образом каждому течению несжимаемой жидкости в плоскости $\mu\nu$ отвечает некоторое течение газа в плоскости xu .

Если переменные μ , ν выбрать так, чтобы при малых значениях числа Маха или числа λ они совпадали с координатами x и y , то течение жидкости в плоскости $\mu\nu$ можно назвать изображающим течением для соответствующего течения газа в плоскости xu .

§ 2. Расчет входной части сопла с плоской поверхностью перехода

Скорости в струе несжимаемой жидкости могут теоретически выравниваться лишь на бесконечности. Рассмотрим течение несжимаемой жидкости, схематически изображенное на фиг. 4. В бесконечности скорости в струе выравниваются и по величине и по направлению. Примем это течение в качестве изображающего течения несжимаемой жидкости в плоскости xu .

Подберем скорость этого течения так, чтобы на бесконечности эта скорость была равна $\tilde{\lambda}_{сг}$, где $\tilde{\lambda}_{сг}$ отвечает $\lambda = 1$ в соответствующем потоке газа.

В рассматриваемом течении линии тока на бесконечности и, в частности, стенки, ограничивающие поток, асимптотически стремятся к параллельным между собой прямым. Скорости в струе на бесконечности выравниваются.

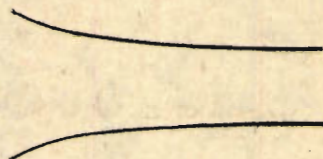
Рассмотрим второй поток несжимаемой жидкости в плоскости $\mu\nu$, отвечающий решению системы уравнений (1.8). Этот поток соответствует течению в слое переменной глубины, равной $1/\sqrt{k}$. Так как в струе скорость на бесконечности равна критической, то $1/\sqrt{k} \rightarrow \infty$. Изменение глубины слоя вдоль оси струи схематически изображено на фиг. 3. Обозначим величину скорости в потоке переменной глубины через v .

Имеем

$$v = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)^2} = \sqrt{k} \sqrt{\left(\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right)^2} \quad (2.1)$$

где φ и ψ — решение системы уравнений (1.8).

Выберем ось струи за линию $\psi = 0$. В широкой части струи, там, где скорости малы, значения функции \sqrt{k} весьма близки к единице и течения в первом и во втором вспомогательном потоке несжимаемой жидкости совпадают.



Фиг. 4.

Таким образом полный расход жидкости в обоих потоках должен совпадать.

На бесконечности в струе скорости выравниваются и расход на единицу ширины струи становится постоянным. Таким образом на бесконечности

$$\psi = \tilde{\lambda}_{cr} v \quad (2.2)$$

В достаточном удалении от широкой части струи течение во втором фиктивном потоке близко к одноразмерному течению, для которого

$$\varphi = \varphi_0(\mu), \quad \psi = \tilde{\lambda}_{cr} v \quad (2.3)$$

для этого одноразмерного течения из уравнений (1.8) получим

$$v = \frac{d\varphi_0}{d\mu} = \sqrt{k} \tilde{\lambda}_{cr} \quad (2.4)$$

Таким образом скорость на бесконечности с увеличением глубины струи стремится к нулю. Обозначим через $\sqrt{k_0}$ значение \sqrt{k} вдоль оси струи; тогда

$$\varphi_0 = \int_0^\mu \sqrt{k_0} \tilde{\lambda}_{cr} d\mu$$

Значения φ и ψ , определенные для одноразмерного потока, примем в качестве приближенного решения уравнений (1.8) для части струи, в которой скорости в достаточной мере выравнены в плоскости поперечного сечения.

Вдоль оси струи [из уравнений (1.9)] имеем

$$y = 0, \quad x - x_0 = \tilde{\lambda}_{cr} \int_\mu^\infty \frac{\sqrt{k}}{\lambda} d\mu \quad (2.5)$$

Вдоль стенки, ограничивающей струю в плоскости $\mu\nu$, имеем

$$d\varphi = \frac{v}{\cos \vartheta} d\mu = \frac{v}{\sin \vartheta} dv \quad (2.6)$$

Из уравнений (1.9) получаем уравнения стенок в плоскости xy в виде

$$x - x_0 = \tilde{\lambda}_{cr} \int_\mu^\infty \frac{\sqrt{k}}{\lambda} d\mu, \quad y - D = \tilde{\lambda}_{cr} \int_d^y \frac{\sqrt{k}}{\lambda} dv \quad (2.7)$$

где d — половина ширины струи на бесконечности в плоскости $\mu\nu$, а D — половина ширины струи в плоскости xy в соответствующем сечении. Для того чтобы найти связь между d и D , рассмотрим какую-нибудь линию $\varphi = \text{const}$ при очень большом значении μ . Вдоль этой линии имеем

$$\cos \vartheta \approx 1, \quad \sin \vartheta \approx 0, \quad \tilde{\lambda} \approx \tilde{\lambda}_{cr}, \quad \lambda \approx 1, \quad \psi \approx v \tilde{\lambda}_{cr}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} \approx \frac{\rho^*}{\rho_0} \quad (2.8)$$

где ρ^* — критическая плотность. Следовательно, вдоль такой линии $\varphi = \text{const}$

$$dx = 0, \quad dy = \frac{\rho_0}{\rho^*} \tilde{\lambda}_{cr} dv \quad (2.9)$$

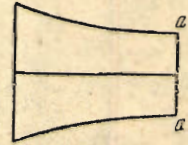
откуда

$$D = \frac{\rho_0}{\rho^*} \tilde{\lambda}_{cr} d = \left(\frac{\kappa + 1}{2} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \tilde{\lambda}_{cr} d \approx 1.193d \quad (2.10)$$

Подинтегральное выражение в уравнениях (2.7) стремится к нулю с увеличением μ вследствие стремления к нулю функции \sqrt{k} . Оказывается, что

подинтегральное выражение стремится к нулю настолько быстро, что интеграл с бесконечным пределом в уравнениях (2.5) и (2.7) оказывается сходящимся. Таким образом струе в плоскости $\mu\nu$, изображенной на фиг. 4, отвечает течение газа, схематически изображенное на фиг. 5. Сечение aa отвечает бесконечно удаленному сечению струи на фиг. 4. Скорость газа во всех точках этого сечения равна скорости звука и направлена параллельно оси x .

Таким образом стенки, ограничивающие это течение, могут служить в качестве стенок входной части сопла с плоской поверхностью перехода от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым. Задаваясь различными изображающими течениями в плоскости $\mu\nu$, получим в параметрическом виде различные входы для сопел с плоской поверхностью перехода. В зависимости от быстроты выравнивания скоростей в струе в плоскости $\mu\nu$, связанной с быстротой приближения стенок, ограничивающих струю, к параллельным прямым на бесконечности, получим разные длины входной части сопла.



Фиг. 5.

§ 3. Пример расчета

В качестве изображающего течения в плоскости $\mu\nu$ возьмем течение через насадок Борда (фиг. 6). Уравнение этого течения имеет вид

$$\tilde{\lambda}_{\infty}(\mu + i\nu) = \varphi + i\psi - e^{-(\varphi + i\psi)} \quad (3.1)$$

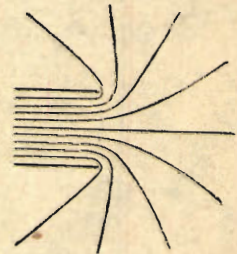
Разделяя вещественные и мнимые части, получим

$$\mu = \frac{1}{\tilde{\lambda}_{\infty}} [\varphi - e^{-\varphi} \cos \psi], \quad \nu = \frac{1}{\tilde{\lambda}_{\infty}} [\psi + e^{-\varphi} \sin \psi] \quad (3.2)$$

Линии тока этого течения схематически изображены на фиг. 6.

Для проекций вектора скорости на оси координат имеем

$$\begin{aligned} u &= \tilde{\lambda}_{\infty} \frac{1 + e^{-\varphi} \cos \psi}{1 + 2e^{-\varphi} \cos \psi + e^{-2\varphi}} \\ v &= -\tilde{\lambda}_{\infty} \frac{e^{-\varphi} \sin \psi}{1 + 2e^{-\varphi} \cos \psi + e^{-2\varphi}} \end{aligned} \quad (3.3)$$



Фиг. 6.

В качестве линии тока, ограничивающей струю (стенки), возьмем линию тока $\psi = \pi/2$. Вдоль линии тока $\psi = 0$ (ось струи) величина скорости изменяется по закону

$$\tilde{\lambda} = \frac{\tilde{\lambda}_{\infty}}{1 + e^{-\varphi}} \quad (3.4)$$

Имеем вдоль этой линии тока

$$d\varphi = \tilde{\lambda} d\mu$$

Следовательно,

$$d\tilde{\lambda} = -\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}_{\infty}} (\tilde{\lambda} - \tilde{\lambda}_{\infty}) d\varphi$$

откуда

$$d\mu = \frac{d\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}^2 (1 - \tilde{\lambda}/\tilde{\lambda}_{\infty})} \quad (3.5)$$

Для линии тока $\psi = \pi/2$ аналогичным образом получаем для изменения скорости выражения

$$\tilde{\lambda} = \frac{\tilde{\lambda}_{\infty}}{\sqrt{1 + e^{-\lambda\psi}}}, \quad d\mu = \frac{d\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}_{\infty} \tilde{\lambda} [1 - (\tilde{\lambda}/\tilde{\lambda}_{\infty})^2]} \quad (3.6)$$

Рассмотрим линию тока $\psi = 0$. Формула (2.5) принимает в данном случае вид

$$x - x_0 = -\tilde{\lambda}_{\text{cr}} \int_{\tilde{\lambda}_{\text{cr}}}^{\tilde{\lambda}} \frac{\sqrt{k}}{\lambda} \frac{d\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}^2 (1 - \tilde{\lambda}/\tilde{\lambda}_{\text{cr}})} \quad (3.7)$$

Для вычисления интеграла, стоящего в правой части уравнения (3.7), введем вспомогательную переменную

$$u^2 = \frac{1 - \lambda^2}{1 - \lambda^2/h^2} \quad (3.8)$$

где $h = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ при $x = 1.4$ $h^2 = 6$.

Пользуясь выражениями (1.11) и (1.12) для $\tilde{\lambda}$ и \sqrt{k} через λ и u , получим разложение в ряд по степеням u подынтегральной функции в уравнении (3.7). Имеем

$$\tilde{\lambda} / \tilde{\lambda}_{\text{cr}} = \frac{(1-u)(1+u/h)^h}{\sqrt{(1-u^2)(1-u^2/h^2)^h}} \quad (3.9)$$

Разлагая в ряд по степеням u при $x = 1.4$, получим

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} / \tilde{\lambda}_{\text{cr}} = & 1 - 0.27778u^3 - 0.19444u^5 + 0.03859u^6 - 0.14220u^7 + 0.05401u^8 - \\ & - 0.11461u^9 + 0.05840u^{10} - 0.009840u^{11} + 0.05875u^{12} + \dots \end{aligned} \quad (3.10)$$

Далее

$$\frac{\sqrt{k}}{\lambda} \left(\frac{\tilde{\lambda}_{\text{cr}}}{\tilde{\lambda}} \right)^2 = \left(\frac{h^2}{h^2-1} \right)^{\frac{1}{2}(h^2-1)} u \left(1 - \frac{u^2}{h^2} \right)^{\frac{1}{2}h^2+h} \left(1 - u^2 \right)^{\frac{1}{2}} (1-u)^{-2} \left(1 + \frac{u}{\lambda} \right)^{-2h}$$

Разлагая в ряд при $x = 1.4$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{k}}{\lambda} \left(\frac{\tilde{\lambda}_{\text{cr}}}{\tilde{\lambda}} \right)^2 = & 1.577u \{ 1 + 0.6565u^3 + 0.2084u^4 + 0.3875u^5 + 0.3145u^6 + \\ & + 0.3976u^7 + 0.3525u^8 + \dots \} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Для подынтегрального выражения в уравнении (3.7) имеем, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{k}}{\lambda} \left(\frac{\tilde{\lambda}_{\text{cr}}}{\tilde{\lambda}} \right)^2 \frac{1}{1 - \tilde{\lambda}/\tilde{\lambda}_{\text{cr}}} d \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}_{\text{cr}}} \right) = & 5.679 [0.8333 + 0.3888u^2 + 0.4314u^3 - \\ & - 1.521u^4 + 1.307u^5 - 0.1375u^6 - 0.5060u^7 + 0.1881u^8 + \dots] \end{aligned} \quad (3.12)$$

откуда, интегрируя, получим

$$\begin{aligned} x - x_0 = & -5.679u [0.8333 + 0.1263u^2 + 0.1079u^3 - 0.3041u^4 + \\ & + 0.2179u^5 - 0.0196u^6 - 0.0633u^7 + 0.0203u^8 + \dots] \end{aligned} \quad (3.13)$$

Для определения уравнения стенки входной части сопла необходимо еще вычислить интеграл

$$y - D = \tilde{\lambda}_{\text{cr}} \int_{\tilde{\lambda}}^{\tilde{\lambda}_{\text{cr}}} \frac{\sqrt{k}}{\lambda} d\tilde{\lambda} \quad (3.14)$$

Вдоль линии тока $\psi = \frac{1}{2} \pi$ имеем

$$\tilde{\lambda} = \frac{\tilde{\lambda}_{cr}}{\sqrt{1 + e^{-2\varphi}}}, \quad v = \frac{1}{\tilde{\lambda}_{cr}} \left[\frac{\pi}{2} + e^{-\varphi} \right] \quad (3.15)$$

Пользуясь уравнениями (1.11), (1.12) и (1.13), можно выразить все элементы подинтегральной функции в уравнении (3.14) через v .

Вычисление этого интеграла производится затем методом численного интегрирования. Построение стенок сопла указанным способом производилось до сечения, в котором скорость на оси сопла равнялась $\lambda = 0.8$; этому значению λ отвечает значение $u^2 = 0.4$.

Расчет дальнейшей части стенок производится следующим образом.

Из уравнений (1.9) следует вдоль линии тока

$$dx = \frac{\cos \vartheta}{\lambda} d\varphi, \quad dy = \frac{\sin \vartheta}{\lambda} d\varphi \quad (3.16)$$

Вдоль стенки, представляющей линию тока, во втором вспомогательном потоке несжимаемой жидкости имеем

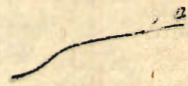
$$d\varphi = V \frac{d\mu}{\cos \vartheta} = V \frac{d\nu}{\sin \vartheta} \quad (3.17)$$

Следовательно,

$$dx = \frac{V}{\lambda} d\mu, \quad dy = \frac{V}{\lambda} d\nu \quad (3.18)$$

Для вычисления отношения

$$\frac{V}{\lambda} = \frac{V}{\tilde{\lambda}} \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}$$



Фиг. 7.

пользуемся приближенным выражением для отношения V/λ . Это выражение имеет вид [8]:

$$\frac{V}{\lambda} = \sqrt{\frac{k}{k_{\infty}}} \left(2 - \sqrt{\frac{k}{k_{\infty}}} \right) \quad (3.19)$$

Для построения стенок сопла имеем тогда следующие приближенные формулы

$$\Delta x = \sqrt{k} \left(2 - \sqrt{k} \right) \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} \Delta\mu, \quad \Delta y = \sqrt{k} \left(2 - \sqrt{k} \right) \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} \Delta\nu \quad (3.20)$$

Выражение (3.19) получено на основе приближенного решения уравнений (1.8). Естественно, что значение этого отношения должно зависеть от координат точек и конфигурации потока, однако в рассматриваемом приближении оно зависит только от величины скорости в данной точке.

При скоростях, меньших $\lambda = 0.8$, это соотношение достаточно точно.

На фиг. 7 изображена входная часть сопла, полученная на основании приведенных расчетов. При наличии звуковой скорости в сечении aa распределение скоростей по площади поперечного сечения будет равномерным.

Если взять другое течение несжимаемой жидкости в качестве изображающего течение, можно получить другую форму входной части сопла, обладающую теми же свойствами.

Если взять течение, быстрее выравнивающееся на бесконечности, чем рассмотренное, например, течение в том же насадке Борда, но при наличии свободной поверхности, то длина почти цилиндрического участка сопла станет меньше, но зато увеличится поджатие струи.

§ 4. Расчет сверхзвукового участка сопла вблизи поверхности перехода

При расчете сопла по методу Буземана начальный участок сверхзвуковой части сопла делается коническим. Течение на этом участке не определяется расчетом. При расчете последующей части сопла принимается, что скорости в конце конического участка сопла имеют направление радиусов окружности с центром в точке пересечения стенок конического участка сопла и равны по величине. Это допущение вносит в расчет сопла неточности, сказывающиеся на степени равномерности поля скоростей в конце сопла. Так как начальный участок сопла не определяется расчетом, то в нем возникают скачки уплотнения, отражающиеся затем от стенок и оказывающие свое влияние на всем протяжении сопла. Возможность пренебрежения наличием возмущений, вносимых этими скачками, основано в известной мере на том, что скачки в начальном участке сверхзвуковой части сопла не могут быть очень велики. Другим источником добавочных возмущений в сопле является то, что благодаря неточному знанию условий в конце конического участка сопла расчет дальнейшего участка базируется на весьма приближенных начальных данных.

При расчете сопла с плоской поверхностью перехода нельзя основываться на допущении Буземана, а следует произвести расчет этого участка сопла. Это тем более необходимо, что на основании общих соображений^[9] наибольшую трудность составляет как раз получение сверхзвукового потока без скачков, в котором направления векторов скорости составляли между собой достаточно большие углы.

Участок сверхзвукового течения для сопла с плоской поверхностью перехода может быть сделан самым разнообразным путем. Данный ниже метод построения этого участка не является достаточно совершенным, так как в противоположность методу расчета входной части сопла он связан с построением течения окрестности некоторой струйки¹.

Принимая за независимые переменные φ и ψ вместо x и y , уравнения (4.1) и (4.2) можно преобразовать² к виду:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \psi} + \frac{1 - \lambda^2}{\lambda} \left(1 - \frac{z-1}{z+1} \lambda^2 \right)^{\frac{z}{1-z}} \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} - \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{z-1}{z+1} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{1-z}} \frac{\partial \lambda}{\partial \psi} = 0$$

Полагая

$$t = \lambda^2 - 1 \quad (4.2)$$

¹ Аналогичный метод применен в работе Görtler [9].

² Эти уравнения получены С. А. Чаплыгиным [10].

имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \psi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{x+1}{2} \right)^{\frac{x}{x-1}} \frac{t}{1+t} \left(1 - \frac{x-1}{2} t \right)^{\frac{1-x}{x}} \frac{\partial t}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial t}{\partial \psi} &= 2 \left(\frac{x+1}{2} \right)^{\frac{1}{x-1}} (1+t) \left(1 - \frac{x-1}{2} t \right)^{\frac{1}{1-x}} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Запишем эти уравнения в виде

$$\frac{\partial \theta}{\partial \psi} = EA(t) \frac{\partial t}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial t}{\partial \psi} = DB(t) \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \quad (4.4)$$

где

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \left(\frac{x+1}{2} \right)^{\frac{x}{x+1}}, & D &= 2 \left(\frac{x+1}{2} \right)^{\frac{1}{x-1}} \\ A(t) &= t + P_2 t^2 + P_3 t^3 + \dots \\ B(t) &= 1 + Q_1 t + Q_2 t^2 + Q_3 t^3 + \dots \end{aligned} \quad (4.5)$$

причем

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{x-2}{2}, & Q_1 &= \frac{3}{2} \\ P_3 &= \frac{2x^2 - 5x + 8}{8}, & Q_2 &= \frac{x+4}{8} \\ P_4 &= \frac{6x^3 - 19x^2 + 32x - 48}{48}, & Q_3 &= \frac{x(2x+5)}{48} \\ &\dots & &\dots \end{aligned} \quad (4.6)$$

Направим ось x по направлению скорости на плоской поверхности перехода.

Будем искать решение системы (4.4) в виде разложения θ и t в ряды по степеням φ и ψ

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} \varphi^{n-k} \psi^k, \quad t = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n \beta_{nk} \varphi^{n-k} \psi^k \quad (4.7)$$

Линия перехода совпадает с линией $\varphi = 0$. Отсюда $\alpha_{nn} = \beta_{nn} = 0$. Вследствие симметрии сопла относительно линии тока $\psi = 0$ имеем

$$\alpha_{n,2m} = \beta_{n,2m+1} = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \theta &= \alpha_{21} \varphi \psi + \alpha_{31} \varphi^2 \psi + \alpha_{41} \varphi^3 \psi + \alpha_{33} \varphi \psi^3 + \alpha_{51} \varphi^4 \psi + \alpha_{53} \varphi^2 \psi^3 + \dots \\ t &= \beta_{10} \varphi + \beta_{20} \varphi^2 + \beta_{30} \varphi^3 + \beta_{32} \varphi \psi^2 + \beta_{40} \varphi^4 + \beta_{42} \varphi^2 \psi^2 + \beta_{50} \varphi^5 + \\ &\quad + \beta_{52} \varphi^3 \psi^2 + \beta_{54} \varphi \psi^4 + \dots \end{aligned} \quad (4.8)$$

Подставляя эти разложения в уравнения (3.5) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях φ и ψ , получим сразу

$$\beta_{10} = \beta_{32} = \alpha_{21} = \alpha_{31} = 0$$

Кроме того, оказывается, что коэффициенты $\beta_{20}, \beta_{30}, \dots, \beta_{n0}, \dots$ могут быть выбраны произвольно. В дальнейшем при расчетах ограничимся простейшим случаем, полагая $\beta_{30} = \beta_{40} = \dots = 0$. Коэффициент β_{20} определяет масштаб φ и ψ и может быть, не нарушая общности, принят равным единице.

В этом предположении для коэффициентов разложения (4.7), не равных нулю, получаем выражения

$$\begin{aligned}
 \alpha_{41} &= \left(\frac{x+1}{2}\right)^{\frac{x}{x-1}} & \beta_{42} &= 3 \left(\frac{x+1}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}} \alpha_{41} \\
 \alpha_{61} &= \frac{x-2}{2} \alpha_{41} & \beta_{62} &= \frac{5x-1}{6} \beta_{42} \\
 \alpha_{63} &= \frac{2}{3} \alpha_{41} \beta_{42} & \beta_{64} &= \frac{1}{3} \beta_{42} \\
 \alpha_{81} &= \frac{2x^2-5x+8}{8} \alpha_{41} & \beta_{82} &= \frac{7x^2-x+4}{12} \beta_{42} \\
 \alpha_{83} &= \frac{8x-7}{4} \alpha_{63} & \beta_{84} &= \frac{5(4x+1)}{6} \beta_{64} \\
 \alpha_{85} &= \alpha_{41} \beta_{64} & \beta_{86} &= \frac{1}{3} \beta_{42} \beta_{64} \\
 \alpha_{101} &= \frac{6x^3-19x^2+32x-48}{48} \alpha_{41} & \beta_{102} &= \frac{(x-1)(9x^2+5x+8)}{24} \beta_{42} \\
 \alpha_{103} &= \frac{25x^2-28x+34}{12} \alpha_{63} & \beta_{104} &= \frac{175x^2+137x+4}{36} \beta_{64} \\
 \alpha_{105} &= \frac{47x-22}{10} \alpha_{85} & \beta_{106} &= \frac{47x+14}{6} \beta_{86} \\
 \alpha_{107} &= \frac{4}{7} \beta_{64} \alpha_{83} & \beta_{108} &= \frac{2}{7} \beta_{64}^2 \\
 & \dots & & \dots
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Значения x и y определяются уравнениями

$$dx = \frac{\cos \theta}{\lambda} d\varphi - \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\sin \theta}{\lambda} d\psi, \quad dy = \frac{\sin \theta}{\lambda} d\varphi + \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\cos \theta}{\lambda} d\psi \tag{4.10}$$

Подставляя полученные разложения в эти уравнения и интегрируя, получим

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n \delta_{nk} \varphi^{n-k} \psi^k, \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n \gamma_{nk} \varphi^{n-k} \psi^k \tag{4.11}$$

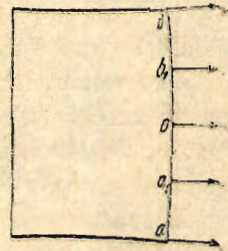
где не равные нулю коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned}
 \delta_{10} &= 1 & \delta_{96} &= -\frac{1}{6} \beta_{86} \\
 \delta_{30} &= -\frac{1}{6} & \delta_{110} &= -0.02237 \\
 \delta_{50} &= 0.075 & \delta_{112} &= \frac{6x^3-14x^2+25x-60}{18} \delta_{52} \\
 \delta_{52} &= -\frac{1}{6} \beta_{42} & \delta_{114} &= \frac{25x^2-22x+40}{12} \delta_{74} \\
 \delta_{70} &= -0.04464 & \delta_{116} &= \frac{47x-22}{10} \delta_{96} \\
 \delta_{72} &= \frac{x-2}{2} \delta_{52} & \delta_{118} &= -\frac{1}{6} \beta_{108} \\
 \delta_{74} &= -\frac{1}{6} \beta_{64} & & \dots \\
 \delta_{90} &= 0.03038 & \gamma_{111} &= \left(\frac{x+1}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}} \\
 \delta_{92} &= \frac{2x^2-4x+9}{8} \delta_{52} & \gamma_{51} &= \frac{1}{4} \alpha_{41} \\
 \delta_{94} &= \frac{8x-7}{4} \delta_{74} & \gamma_{72} &= \frac{x-3}{3} \gamma_{51} \\
 & & & \dots
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_{73} &= \frac{1}{4} \alpha_{83} & \gamma_{111} &= \frac{6x^2 - 7x + 35}{40} \gamma_{71} \\
 \gamma_{91} &= \frac{2x^3 - 7x + 15}{16} \gamma_{51} & \gamma_{113} &= \frac{10x^2 - 21x + 25}{8} \gamma_{73} \\
 \gamma_{93} &= \frac{2(2x - 3)}{3} \gamma_{73} & \gamma_{115} &= \frac{47x - 42}{15} \gamma_{95} \\
 \gamma_{95} &= \frac{1}{4} \alpha_{85} & \gamma_{117} &= \frac{1}{4} \alpha_{107} \dots
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

В частности, для воздуха при $x = 1.4$ получаем

$$\begin{aligned}
 t &= \varphi^2 + 8.958\varphi^2\psi^2 + 8.958\varphi^4\psi^2 + 26.75\varphi^2\psi^4 + 12.183\varphi^6\psi^2 + 147.12\varphi^4\psi^4 + \\
 &+ 79.87\varphi^2\psi^6 + 4.873\varphi^8\psi^2 + 400.3\varphi^6\psi^4 + 1062.3\varphi^4\psi^6 + 204.4\varphi^2\psi^8 + \dots \\
 \theta &= 1.893\varphi^3\psi - 0.5679\varphi^5\psi + 11.304\varphi^3\psi^3 + 1.1641\varphi^7\psi + \\
 &+ 11.87\varphi^5\psi^3 + 50.63\varphi^3\psi^5 - 0.9455\varphi^9\psi + \\
 &+ 4.126\varphi^7\psi^3 + 221.8\varphi^5\psi^5 + 172.8\varphi^3\psi^7 + \dots \tag{4.13} \\
 x &= \varphi - \frac{1}{6}\varphi^3 + 0.075\varphi^5 - 1.493\varphi^3\psi^2 - 0.04464\varphi^7 + \\
 &+ 0.4479\varphi^5\psi^2 - 4.458\varphi^3\psi^4 + 0.03038\varphi^9 - 1.3661\varphi^7\psi^2 - \\
 &- 4.681\varphi^5\psi^4 - 13.312\varphi^3\psi^6 - 0.02237\varphi^{11} + 1.149\varphi^9\psi^2 - \\
 &- 21.62\varphi^7\psi^4 - 58.31\varphi^5\psi^6 - 34.07\varphi^3\psi^8 + \dots \\
 y &= 1.5774\psi + 0.4732\varphi^2\psi - 0.2524\varphi^4\psi + 2.826\varphi^4\psi^3 + \\
 &+ 0.2697\varphi^6\psi - 0.3768\varphi^6\psi^3 + 12.66\varphi^4\psi^5 - 0.2332\varphi^{10}\psi + 5.370\varphi^8\psi^3 + \\
 &+ 20.08\varphi^6\psi^5 + 43.20\varphi^4\psi^7 + \dots
 \end{aligned}$$



Фиг. 8.

На фиг. 8 изображен участок сопла, определенный по этим формулам. При вычислении линии тока, отвечающей стенке сопла, принято $\psi = 0.2$. Наибольшее значение $\varphi = 0.44721$. Вдоль линии $\varphi = 0.44721$ определены значения вектора скорости.

В точках $a, a_1, 0$ имеем

$$\lambda_a = 1.14, \lambda_{a1} = 1.11, \lambda_0 = 1.09$$

Расчет дальнейшего участка сопла производится методом Буземана. Полученные значения вектора скорости вдоль линии ab (фиг. 9) определяют поле скоростей в треугольнике abc .

Обозначим через λ , значение λ , которое нужно получить в выходном сечении сопла. Произведем расчет сопла для случая, когда в конце сопла должен быть равномерный поток. На фиг. 9 схематически изображен определяемый участок сопла. Вдоль линии Маха одного семейства имеем¹

$$\sigma + \theta = \text{const} \tag{4.14}$$

а вдоль линии Маха другого семейства

$$\sigma - \theta = \text{const} \tag{4.15}$$

¹ С. А. Христинявич [6], § 1.

где

$$\sigma = 1 - \int_1^{\lambda} \sqrt{(\lambda^2 - 1) \left(1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda^2\right)} \frac{d\lambda}{\lambda} \quad (4.16)$$

Таблица значений функции σ дана в указанной работе [6].

В точке d имеем

$$\sigma_d + \theta_d = \sigma_a + \theta_a$$

а в точке f

$$\sigma_f = \sigma_a - \theta_a$$

откуда

$$\sigma_a = \frac{1}{2} (\sigma_a + \sigma_f + \theta_a)$$

$$\theta_a = \frac{1}{2} (\sigma_a - \sigma_f + \theta_a) \quad (4.17)$$

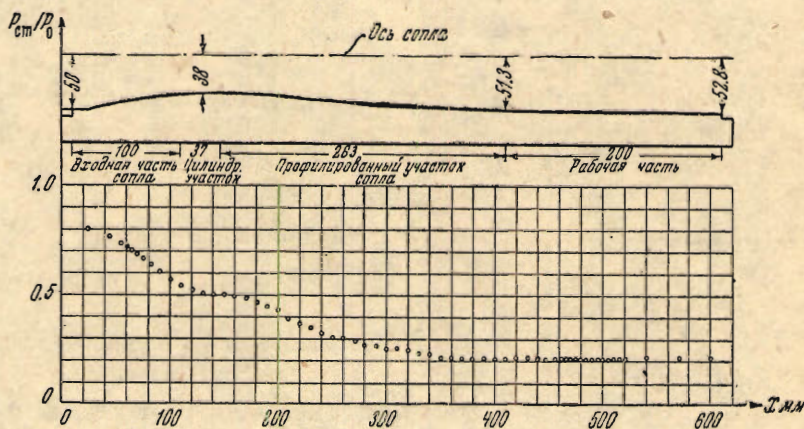
Фиг. 10.

Последняя из этих формул определяет значение угла θ_a .

Участок стенки сопла bd и соответственно ae может быть взят произвольно, лишь бы в конце этого участка наклон касательной к оси равнялся θ_a . Участок bd желательно выбрать как можно короче, но вместе с тем так, чтобы не вызвать срыва потока или образования скачков уплотнения.

Построение потока в областях abc , bcd , ace , cde производится графическим путем методом Буземана. В областях djh и efg одно из семейств характеристик прямолинейно, в частности, характеристики fh и fg — прямые.

В сопле, изображенном на фиг. 10, рассчитанном по данному методу,



Фиг. 11.

начальный участок сверхзвукового течения совпадает с участком, изображенным на фиг. 8. В этом случае

$$\theta_a = -0.040, \quad \lambda_a = 1.15, \quad \sigma_a = 0.94$$

В конце сопла

$$M = 1.7, \quad \lambda_f = 1.48, \quad \sigma_f = 0.68$$

Отсюда

$$\theta_a = 6^\circ 15'.$$

Участок сопла bd взят в виде окружности с радиусом, равным 13.4 ширины критического сечения. Входной участок этого сопла совпадает с тем, который изображен на фиг. 7.

На фиг. 11 показаны результаты измерения распределения давления на стенках спроектированного таким образом сопла, где $P_{ст}$ — статическое давление на стенках сопла, P_0 — полный напор. Как видно, в нем не возникают скачки уплотнения, и поток в конце сопла с точностью до ошибок эксперимента однороден.

II. РАСЧЕТ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СОПЕЛ

§ 5. Расход входной части сопла

Все принципиальные идеи и методы, на основании которых проводился расчет плоских сопел Лавалья, могут быть применены и к расчету осесимметричных сопел. Так же, как и в плоском случае, расчет разбивается на две части: расчет входной части сопла (с дозвуковым потоком) с плоской поверхностью перехода и расчет сверхзвуковой части сопла, которая обеспечивает развитие сверхзвукового потока без скачков уплотнения.

Расчет входной части проводится на основании решений уравнений, описывающих осесимметричное адиабатическое течение газа.

Эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial \hat{\varphi}} + \frac{a^2 \omega}{a^2 - \omega^2} \frac{\rho}{\rho_0} r \frac{\partial \theta}{\partial \hat{\psi}} + \frac{a^2 \sin^2 \theta}{(a^2 - \omega^2) r} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \hat{\psi}} - \frac{\omega}{r} \frac{\rho_2}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial \hat{\varphi}} = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial z} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r} = \omega \cos \theta, \quad \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial r} = -\frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} = \omega \sin \theta$$

где ω — величина скорости, θ — угол между вектором скорости и осью течения (ось z), r , z — цилиндрические координаты, $\hat{\varphi}$ — потенциал скорости, а $\hat{\psi}$ — функция тока.

Преобразуя (5.1) к каноническому виду, получим систему уравнений⁽¹¹⁾

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mu} - \frac{\partial s}{\partial \nu} + \frac{\sin \theta}{r^2 \lambda} \frac{\partial \psi}{\partial \mu} H(\lambda) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \nu} + \frac{\partial s}{\partial \mu} + \frac{\sin \theta}{r^2 \lambda} \frac{\partial \psi}{\partial \nu} H(\lambda) = 0 \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \frac{\sqrt{k}}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \mu} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} - \frac{\sqrt{k}}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \nu} = 0 \quad (5.3)$$

$$dz = \frac{\cos \theta}{\lambda} d\varphi - \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\sin \theta}{r \lambda} d\psi, \quad dr = \frac{\sin \theta}{\lambda} d\varphi + \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\cos \theta}{r \lambda} d\psi \quad (5.4)$$

Здесь

$$\varphi = \frac{\hat{\varphi}}{a^*}, \quad \psi = \frac{\hat{\psi}}{a^*}, \quad H(\lambda) = \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} \frac{\rho_0}{\rho}$$

Величины λ , k , s определяются так же, как и в плоском случае.

В отличие от плоского случая в уравнения фiktивного потока в пространстве $\mu\nu$ входят координаты физического потока r . Однако, так как расчет проводится для входного участка сопла, близкого к критическому сечению, и, следовательно, для фiktивного потока, близкого к одномерному, то можно обойти эту трудность. Действительно, если поток близок к одномерному, то

$$\varphi \approx \varphi(\mu), \quad \psi \approx \frac{1}{2} v^2 \tilde{\lambda}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} = \frac{\sqrt{k}}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \approx \frac{\sqrt{k}}{r} v \tilde{\lambda} \quad (5.5)$$

Вдоль поверхности равного потенциала

$$dr = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{v}{\lambda \sqrt{k}} \approx \frac{v}{r} \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} dv = H(\lambda) \frac{v}{r} dv \quad (5.6)$$

или

$$d(r^2) = H(\lambda) d(v^2) \quad (5.7)$$

Так как

$$\lambda(\mu, v) \approx \lambda(\mu)$$

то

$$r^2 = H(\lambda) v^2 \quad (5.8)$$

На основании последнего равенства уравнения (5.2), (5.3) преобразуются в приближенные уравнения

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mu} - \frac{\partial s}{\partial v} + \frac{\sin \theta}{\sqrt{\lambda}} \frac{\partial \psi}{\partial \mu} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\partial s}{\partial \mu} + \frac{\sin \theta}{\sqrt{\lambda}} \frac{\partial \psi}{\partial v} = 0 \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \sqrt{\frac{k}{H}} \frac{1}{v} \frac{\partial \psi}{\partial \mu} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} - \sqrt{\frac{k}{H}} \frac{1}{v} \frac{\partial \psi}{\partial v} = 0 \quad (5.10)$$

При этом вдоль поверхности тока

$$dz = \frac{v}{\lambda} d\mu = \sqrt{\frac{k}{H}} \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} d\mu, \quad dr = \frac{v}{\lambda} dv = \sqrt{\frac{k}{H}} \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} dv \quad (5.11)$$

Эти уравнения уже похожи на уравнения осесимметричного течения несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mu} - \frac{\partial s}{\partial v} + \frac{\sin \theta}{\sqrt{\lambda}} \frac{\partial \psi}{\partial \mu} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\partial s}{\partial \mu} + \frac{\sin \theta}{\sqrt{\lambda}} \frac{\partial \psi}{\partial v} = 0 \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{1}{v} \frac{\partial \psi}{\partial \mu} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} - \frac{1}{v} \frac{\partial \psi}{\partial v} = 0 \quad (5.13)$$

Уравнения (5.12) и (5.9) формально совпадают. Уравнения (5.10) в пространственном случае не могут быть интерпретированы как уравнения течения в слое переменной толщины, однако математический смысл их аналогичен смыслу соответствующих уравнений плоского случая.

Как и в плоском случае, для получения решения уравнений (5.9) и (5.10) скорости, полученные из решения уравнений (5.12) и (5.13), пересчитываются по формулам (1.12), (1.13). Координаты поверхности тока получаются из уравнений (5.11) и определяются соотношениями

$$z - z_0 = \int_0^\mu \sqrt{\frac{k}{H}} \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} d\mu, \quad r - r_0 = \int_{v_0}^v \sqrt{\frac{k}{H}} \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} dv \quad (5.14)$$

где r_0 — радиус поверхности тока в пространстве rz при $\lambda = 1$, а v_0 — радиус поверхности тока в пространстве μv при $\mu = \infty$.

В качестве изображающего течения в пространстве μv было взято течение в струе со свободной поверхностью. Так как расчет проводится лишь для участка сопла, в котором скорости $\lambda \geq 0.8$, то достаточно было воспользоваться асимптотическим выражением для этого течения, приведенным в работе Förster [12]. В этой работе показано, что осесимметричная струя описывается уравнениями

$$\varphi = \sum_0^\infty a_n f^{(2n)}(\mu) v^{2n}, \quad \psi = - \sum_0^\infty 2na_n f^{(2n-1)}(\mu) v^{2n} \quad (5.15)$$

где

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2}, \quad f'(\mu) = 1 - y + 1.7019y^2 - 2.76y^3 + \dots \quad (5.16)$$

причем

$$y = \exp\left(-\frac{m\mu}{R}\right)$$

где R — радиус струи в бесконечности, $m = 2.4048$.

Если искать координаты поверхности тока в виде

$$v = v_0 (1 + \beta_1 y + \beta_2 y^2 + \beta_3 y^3 + \dots) \quad (5.17)$$

где v_0 — радиус поверхности тока на бесконечности, и положить $v_0 = 0.83166R$, то получим

$$v = 0.83166 R \left[1 + 0.28836 \exp\left(-\frac{m\mu}{R}\right) + 0.05108 \exp\left(-\frac{2m\mu}{R}\right) + 0.12160 \exp\left(-\frac{3m\mu}{R}\right) + \dots \right] \quad (5.18)$$

Для нахождения $d\mu$, входящего в уравнение (5.14), нужно решить уравнение

$$v_z(r=0) \approx w(r=0) = w_\infty f'(\mu) \quad (5.19)$$

или

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}_\infty (1 - y + 1.7019y^2 - 2.76y^3 + \dots) \quad (5.20)$$

Пренебрегая высшими степенями y (начиная с 3-й) и решая квадратное уравнение

$$1 - \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}_\infty} = y - 1.7019y^2 \quad (5.21)$$

на основании (3.10) найдем, что

$$y = 0.2779u^2 (1 + 0.69998u^2 + 0.33383u^3 + 0.51191u^4 + 0.46702u^5 + 0.72824u^6 + 0.50540u^7 + 1.01714u^8 + 0.8685u^9) \quad (5.22)$$

Отсюда находим

$$d\mu = -\frac{1}{m} \frac{dy}{y} = -\frac{3}{mu} (1 + 0.46665u^2 + 0.33383u^3 + 0.35590u^4 + 0.88891u^5 + 0.85702u^6 + 0.39862u^7 + 1.30425u^8 + 1.19480u^9) \quad (5.23)$$

Разлагая подынтегральное выражение уравнения (5.14)

$$\sqrt{\frac{k}{H} \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}} = \sqrt{2} (h-1)^{\frac{h-1}{4}} (h+1)^{-\frac{h+1}{4}} (h^2-1)^{\frac{1-h^2}{4}} u (1+u)^{-\frac{1}{2}} (h+u)^{\frac{h^2+h}{4}} (h-u)^{\frac{h^2-h}{4}} \quad (5.24)$$

в ряд по степеням u , получим

$$\sqrt{\frac{k}{H} \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}} = 1.0932u (1 - 0.13889u^2 + 0.10417u^4 - 0.09685u^5 + 0.09076u^6 - 0.08564u^7 + 0.08120u^8 - 0.07739u^9) \quad (5.25)$$

и

$$z_0 - z = 1.36377 (u + 0.15555u^3 + 0.04873u^4 + 0.09201u^5 + 0.03787u^6 + 0.13572u^7 + 0.03164u^8 + 0.15316u^9 + 0.099947u^{10}) \quad (5.26)$$

где z_0 — координаты поверхности перехода.

Подставляя значение y из уравнения (5.22) в (5.18), найдем v в виде ряда по u . Найдя dv и интегрируя $\sqrt{\frac{k}{H}} \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} dv$, получим, что

$$r - r_0 = 0.24030r_0 (0.25u^4 + 0.19444u^6 + 0.08959u^7 + 0.16233u^8 + 0.13002u^9 + 0.24687u^{10} + 0.14984u^{11} + 0.35597u^{12} + 0.28068u^{13}) \quad (5.27)$$

Приводим значения координат стенок сопла на участке со скоростью $\lambda \geq 0.8$, вычисленные на основании уравнений (5.26) и (5.27)

$\lambda (r=0)$	$(z_0 - z)/r_0$	r/r_0
0.8	1.0568	1.0167
0.85	0.9064	1.0088
0.9	0.7357	1.0037
1.0	0	1.0000

Стенки участка сопла, в котором $\lambda < 0.8$, можно строить более или менее произвольно.

§ 6. Расчет сверхзвуковой части сопла

Расчет начальной части сверхзвукового участка сопла производится таким же образом, как и в плоском случае.

Уравнения газовой динамики (1.1)–(1.4) при введении обозначений (1.10) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} + \frac{\lambda}{1-M^2} \frac{\rho}{\rho_0} r \frac{\partial \theta}{\partial \psi} + \frac{\sin \theta}{(1-M^2)^2} &= 0, & \frac{\partial \lambda}{\partial \psi} - \frac{\lambda}{r} \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} &= 0 \\ dz = \frac{\cos \theta}{\lambda} d\varphi - \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\sin \theta}{r\lambda} d\psi, & dr = \frac{\sin \theta}{\lambda} d\varphi + \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\cos \theta}{r\lambda} d\psi \end{aligned} \quad (6.1)$$

Произведем замену переменной λ на $t = \lambda^2 - 1$. Так как

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{x-1}}, \quad M^2 - 1 = \frac{\lambda^2 - 1}{1 - \frac{x-1}{x+1} \lambda^2}$$

то уравнения (6.1) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \frac{tr}{2\sqrt{1+t}} \frac{\partial t}{\partial \varphi} &= \sqrt{1+t} \left[\frac{2}{x+1} \left(1 - \frac{x-1}{2} t\right) \right]^{\frac{x}{x-1}} r^2 \frac{\partial \theta}{\partial \psi} + \sin \theta \frac{2}{x+1} \left(1 - \frac{x-1}{2} t\right), \\ \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} &= \left[\frac{2}{x+1} \left(1 - \frac{x-1}{2} t\right) \right]^{\frac{1}{x-1}} \frac{r}{2(1+t)} \frac{\partial t}{\partial \psi} \\ dz &= \frac{\cos \theta}{\sqrt{1+t}} d\varphi - \left[\frac{2}{x+1} \left(1 - \frac{x-1}{2} t\right) \right]^{\frac{1}{x-1}} \frac{\sin \theta}{r\sqrt{1+t}} d\psi \\ dr &= \frac{\sin \theta}{\sqrt{1+t}} d\varphi + \left[\frac{2}{x+1} \left(1 - \frac{x-1}{2} t\right) \right]^{\frac{1}{x-1}} \frac{\cos \theta}{r\sqrt{1+t}} d\psi \end{aligned} \quad (6.2)$$

Решение этих уравнений, как и в плоском случае, пишется в виде степенных рядов. Однако для осесимметричного случая нельзя разложить неизвестные функции уравнений (6.2) по степеням ψ , так как ось $\psi = 0$ является особой линией уравнений (например, однородный, осесимметричный поток определяется соотношением $r = \sqrt{2\psi/\omega}$). Разложение ведется по степеням $\Phi = \sqrt{\psi}$.

Если в уравнениях (6.2) произвести замену переменных $\Phi = \sqrt{\psi}$, получится система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{tr\Phi}{\sqrt{1+t}} \frac{\partial t}{\partial \varphi} &= \sqrt{1+t} \left[\frac{2}{x+1} \left(1 - \frac{x-1}{2} t \right) \right]^{\frac{x}{x-1}} r^2 \frac{\partial \theta}{\partial \Phi} + \frac{4}{x+1} \left(1 - \frac{x-1}{2} t \right) \Phi \sin \theta \\ \Phi \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} &= \left[\frac{2}{x+1} \left(1 - \frac{x-1}{2} t \right) \right]^{\frac{1}{x-1}} \frac{r}{4(1+t)} \frac{\partial t}{\partial \Phi} \\ \frac{\partial r}{\partial \varphi} &= \frac{\sin \theta}{\sqrt{1+t}}, & \frac{\partial r}{\partial \Phi} &= \frac{2\Phi \cos \theta}{2\sqrt{1+t}} \left[\frac{2}{x+1} \left(1 - \frac{x-1}{2} t \right) \right]^{\frac{1}{x-1}} \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} &= \frac{\cos \theta}{\sqrt{1+t}}, & \frac{\partial z}{\partial \Phi} &= -\frac{2\Phi \sin \theta}{2\sqrt{1+t}} \left[\frac{2}{x+1} \left(1 - \frac{x-1}{2} t \right) \right]^{\frac{1}{x-1}} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Для нее ищутся решения в виде

$$\begin{aligned} \theta &= \sum_{n,h=0}^{\infty} \alpha_{nh} \varphi^{n-h} \Phi^h, & r &= \sum_{n,h=0}^{\infty} \gamma_{nh} \varphi^{n-h} \Phi^h \\ t &= \sum_{n,h=0}^{\infty} \beta_{nh} \varphi^{n-h} \Phi^h, & z &= \sum_{n,h=0}^{\infty} \delta_{nh} \varphi^{n-h} \Phi^h \end{aligned} \quad (6.4)$$

В силу симметрии задачи некоторые коэффициенты этих рядов равны нулю. Так как плоскость $z=0$ является поверхностью перехода и на ней $\varphi=0$, $t=0$, $\theta=0$ для любого Φ , то $\alpha_{nn} = \beta_{nn} = \delta_{nn} = 0$. На оси $z=0$, $\Phi=0$, $\theta=0$ для любого φ . Поэтому $\alpha_{n0} = \gamma_{n0} = 0$.

Для упрощения расчета удобно представить уравнения (6.3) в виде

$$\Phi \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = Ar \frac{\partial t}{\partial \Phi} (1 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} \Phi r (1 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots) \frac{1}{2} \frac{\partial t^2}{\partial \Phi} &= B_0 r^2 \frac{\partial \theta}{\partial \Phi} (1 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots) + \\ &+ B_1 (1 + \sigma t) \Phi \sin \theta \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial r}{\partial \varphi} = (1 + d_1 t + d_2 t^2 + \dots) \sin \theta \quad (6.7)$$

$$\Phi \cos \theta = \frac{1}{2} \frac{\partial r^2}{\partial \Phi} F_0 (1 + f_1 t + f_2 t^2 + \dots) \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = (1 + g_1 t + g_2 t^2 + \dots) \cos \theta \quad (6.9)$$

$$-\Phi \sin \theta = F_0 (1 + f_1 t + f_2 t^2 + \dots) r \frac{\partial z}{\partial \Phi} \quad (6.10)$$

где

$$a_1 = -\frac{3}{2}, \quad a_2 = \frac{4x-x}{8}, \quad a_3 = -\frac{2x^2-13x+90}{48}, \dots$$

$$b_1 = -0.5, \quad b_2 = 0.375, \quad b_3 = -0.3125, \dots$$

$$A = 0.25 \left(\frac{2}{x+1} \right)^{\frac{1}{x-1}}, \quad B_0 = \left(\frac{2}{x+1} \right)^{\frac{x}{x-1}}, \quad B_1 = \frac{4}{x+1}, \quad F_0 = 2A \quad (6.11)$$

$$\sigma = -\frac{x-1}{2} = \epsilon_1, \quad \epsilon_2 = -\frac{x+4}{8}, \quad \epsilon_3 = \frac{(x+1)(x+3)}{48} \dots$$

$$\begin{aligned}
 d_1 &= -0.5, & d_2 &= 0.375, & d_3 &= -0.3125 \dots \\
 f_1 &= 0, & f_2 &= -\frac{x+1}{8}, & f_3 &= -\frac{(x+1)(x-3)}{24} \\
 f_4 &= -\frac{(x+1)(2x^2-9x+13)}{128}, & f_5 &= -\frac{(x+1)(x-3)(6x^2-17x+25)}{960} \dots \\
 g_1 &= -0.5, & g_2 &= 0.375, & g_3 &= -0.3125, & g_4 &= 0.27344, & g_5 &= -0.24609 \dots
 \end{aligned}$$

Подставив ряды (6.4) в уравнения (6.5)–(6.8), можно найти соотношения между коэффициентами α_{nk} , β_{nk} , γ_{nk} и коэффициентами уравнений (одно из этих уравнений есть следствие остальных, и связи между коэффициентами, полученные из него, являются контрольными). Найдя из них α_{nk} , β_{nk} , γ_{nk} и подставив их значения в уравнения (6.9), (6.10) (одно из них контрольное), получим уравнения, из которых легко определить коэффициенты δ_{nk} .

Так же, как и в плоском случае, упомянутые уравнения удовлетворяются при произвольных значениях β_{n0} ($n > 1$); мы приняли $\beta_{20} = 1$, $\beta_{n0} = 0$ ($n > 2$).

Коэффициенты рядов (6.4), выраженные через x , имеют вид

$$\begin{aligned}
 \gamma_{11} &= \sqrt{2 \left(\frac{x+1}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}}} & \alpha_{41} &= 4\gamma_{51} \\
 \gamma_{51} &= \frac{x+1}{16} \gamma_{11} & \alpha_{61} &= \frac{x-2}{2} \alpha_{41} \\
 \gamma_{71} &= \frac{x-3}{3} \gamma_{51} & \alpha_{62} &= 4\gamma_{73} \\
 \gamma_{73} &= \gamma_{51} \beta_{42} & \alpha_{81} &= \frac{4x^2-11x+15}{16} \alpha_{41} \\
 \gamma_{91} &= \frac{4x^2-15x+29}{32} & \alpha_{83} &= \frac{8x-7}{4} \alpha_{63} \\
 \gamma_{93} &= \frac{8x-11}{6} \gamma_{73} & \alpha_{85} &= 4\gamma_{95} \\
 \gamma_{95} &= \frac{1}{3} \alpha_{41} \beta_{64} & \alpha_{101} &= \frac{12x^3-43x^2+71x-84}{96} \alpha_{41} \\
 \gamma_{111} &= \frac{12x^2-19x+65}{80} & \alpha_{103} &= \frac{60x^2-91x+59}{24} \alpha_{63} \\
 \gamma_{113} &= \frac{60x^2-131x+121}{48} \gamma_{73} & \alpha_{105} &= \frac{39(2x-1)}{16} \alpha_{85} \\
 \gamma_{115} &= \frac{13(6x-5)}{24} \gamma_{95} & \alpha_{107} &= 4\gamma_{117} \\
 \gamma_{117} &= \frac{13}{72} \beta_{62} \alpha_{62} & & \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_{42} &= 3\alpha_{41}\gamma_{11} & \delta_{10} &= 1, & \delta_{74} &= -\frac{1}{6}\beta_{64} \\
 \beta_{62} &= \frac{5x-1}{6}\beta_{42} & \delta_{30} &= -\frac{1}{6} & \delta_{90} &= 0.03038 \\
 \beta_{64} &= \frac{1}{2}\beta_{42}^2 & \delta_{50} &= 0.075 & \delta_{92} &= \frac{2x^2-5x+8}{8}\delta_{52} \\
 \beta_{82} &= \frac{14x^2-7x+3}{24}\beta_{42} & \delta_{32} &= -\frac{1}{6}\beta_{42} & \delta_{94} &= \frac{8x-7}{4}\delta_{74} \\
 \beta_{84} &= \frac{40x+1}{12}\beta_{64} & \delta_{70} &= -0.04464 & \delta_{96} &= \frac{1}{6}\beta_{86} \\
 \beta_{86} &= \frac{4}{9}\beta_{64}\beta_{42} & \delta_{72} &= \frac{x-2}{2}\delta_{52} & \delta_{110} &= -0.02237
 \end{aligned}$$

$$\beta_{102} = \frac{(x-1)(18x^2-x+5)}{48} \beta_{42}$$

$$\delta_{112} = \frac{6x^3-19x^2+32x-48}{48} \delta_{52}$$

$$\beta_{104} = \frac{420x^2-79x-1}{72} \beta_{64}$$

$$\delta_{114} = \frac{60x^2-85x+65}{24} \delta_{74}$$

$$\beta_{106} = \frac{13(10x+1)}{16} \beta_{86}$$

$$\delta_{116} = \frac{39(2x-1)}{16} \delta_{96}$$

$$\beta_{108} = \frac{13}{36} \beta_{64}^2$$

$$\delta_{118} = -\frac{1}{6} \beta_{108}$$

Для осесимметричного сверхзвукового течения воздуха ($x=1.4$) с плоской поверхностью перехода получаются выражения

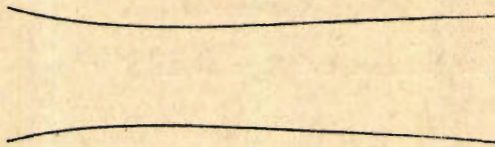
$$r = 1.7762\Phi + 0.2664\Phi^4 - 0.1421\Phi^6 + 1.513\Phi^4\Phi^3 + 0.1319\Phi^8\Phi + 0.05043\Phi^6\Phi^3 + \\ + 5.728\Phi^4\Phi^5 - 0.1100\Phi^{10}\Phi + 1.740\Phi^8\Phi^3 + 10.55\Phi^6\Phi^5 + 17.62\Phi^4\Phi^7 + \dots$$

$$z = \varphi - \frac{1}{6}\varphi^3 + 0.075\varphi^5 - 0.9465\varphi^3\Phi^2 - 0.04464\varphi^7 + 0.2839\varphi^5\Phi^2 - \\ - 2.6874\varphi^3\Phi^4 + 0.03038\varphi^9 - 0.5821\varphi^7\Phi^2 - 2.8218\varphi^5\Phi^4 - 6.783\varphi^3\Phi^6 - \\ - 0.02237\varphi^{11} + 0.4728\varphi^9\Phi^2 - 7.121\varphi^7\Phi^4 - 29.76\varphi^5\Phi^6 - 15.648\varphi^3\Phi^8 + \dots$$

$$\theta = 1.0657\varphi^3\Phi - 0.3197\varphi^5\Phi + 6.052\varphi^3\Phi^3 + 0.4956\varphi^7\Phi + 6.355\varphi^5\Phi^3 + \\ + 22.91\varphi^3\Phi^5 - 0.3991\varphi^9\Phi + 12.407\varphi^7\Phi^3 + 100.53\varphi^5\Phi^5 + 70.48\varphi^3\Phi^7 + \dots$$

$$t = \varphi^2 + 5.679\varphi^2\Phi^2 + 5.679\varphi^4\Phi^2 + 16.124\varphi^2\Phi^4 + 4.884\varphi^6\Phi^2 + 76.59\varphi^4\Phi^4 + \\ + 40.70\varphi^2\Phi^6 + 1.840\varphi^8\Phi^2 + 159.36\varphi^6\Phi^4 + 495.9\varphi^4\Phi^6 + 93.89\varphi^2\Phi^8 + \dots$$

В конце рассчитываемого участка сопла либо скорость должна иметь величину, при которой уже возможно точное построение по методу Франкля продолжения потока и стенок, либо наклон стенок должен быть достаточен:



Фиг. 12;

чтобы при заданных габаритах сопла и заданной скорости на выходе можно было бы конечный участок сопла сделать коническим. Учитывая габариты сопла, нужно задаться удлинением рассчитываемого участка сопла и, как в плоском случае, получить значение для поверхности тока, служащей стенкой сопла.

Если в задачу расчета не входит получение однородного потока в конце сопла, то конечный участок сопла можно делать коническим. В случае необходимости получения однородного потока на выходе (например, в сопле, служащем для создания сверхзвукового потока в аэродинамической трубе) конечный участок сопла рассчитывается по методу Буземана—Франкля.

Частный случай осесимметричного сопла, рассчитанного изложенным методом, изображен на фиг. 12.

Поступила в редакцию
20 VIII 1942

Центральный
аэрогидродинамический
институт им. Н. Е. Жуковского.

ON THE DESIGN OF THE LAVAL NOZZLES**V. ASTROV, L. LEVIN, E. PAVLOV and S. KHRISTIANOVICH**

(Summary)

In the paper is given a method for the design of nozzles with a plane surface for transition from presound velocities to extrasound ones.

Such nozzles guarantee the development of extrasound flow without density jumps and allow an exact uniform flow at the end of the nozzle. In the case of a non-uniform flow these nozzles equalize well the irregularities of the flow.

ЛИТЕРАТУРА

1. Handbuch d. exp. Physik. Bd. IV [S. 421].
2. Основы газовой динамики. Труды ЦАГИ. 1938. № 364.
3. Сравнительные результаты испытаний нескольких вариантов сопел. Труды ЦАГИ. 1940. № 478.
4. Z. V. D. I. 1940. Bd. 84 [S. 857].
5. Исследования и испытания в аэродинамической трубе сверхзвуковых скоростей в Гвидонии.
6. Христианович С. А. О сверхзвуковых течениях газа. Труды ЦАГИ. 1941. № 543.
7. Христианович С. А. Обтекание тел газом при больших дозвуковых скоростях. Труды ЦАГИ. 1940. № 469.
8. Христианович С. А. Влияние сжимаемости на аэродинамические характеристики профиля.
9. Görtler. ZAMM. 1929. Bd. 49 [S. 325].
10. Чаплыгин С. А. О газовых струях. Труды ЦАГИ. 1941. № 549 [Стр. 34].
11. Христианович С. А. Обтекание тел газом при больших дозвуковых скоростях. Труды ЦАГИ. 1940. № 481.
12. Förster. Zeitschr. für Mathem. und Phys. 1914.