Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика, том VII, 1943

О ВЫНУЖДЕННЫХ ДВИЖЕНИЯХ

Н. Г. ЧЕТАЕВ
(Москва)

Вопрос о движении механической системы, зависящей от некоторых вынужденно изменяющихся параметров, представляет значительный интерес, особенно, когда изменения параметров связаны с координатами системы и не допускают гипотезы о весьма медленном или адиабатическом изменении.

1. Постановка задачи

Вообразим механическую систему, состоящую из находящихся под действием сил X_i, Y_i, Z_i точек с массами m_i и координатами x_i, y_i, z_i относительно некоторых неподвижных и прямоугольных осей; пусть каждой точке приписаны некоторые параметры θ_i, вынужденно изменяющиеся согласно дифференциальным уравнениям

$$\mu_i \frac{d\theta_i}{dt} = \Phi_i$$

где Φ_i обозначают принуждения, а μ_i — некоторые постоянно положительные функции t, θ, x, y, z.

Если параметры θ_i свободны и не стеснены никакими связями, то вопрос о движении такой материальной системы не вызывает принципиальных затруднений.

Рассмотрим поэтому случай, когда движения материальной системы стеснены некоторыми связями, ограничивающими линейными соотношениями перемещения $\delta\theta_i$, δx_i, δy_i, δz_i, совместимые со связями при фиксированном значении времени.

Следуя идеям творца аналитической динамики Лагранжа [1], свое изучение мы ограничим идеальными связями, не рассеивающими энергию материальной системы на своих возможных перемещениях.

Примем, что работа принуждений Φ_i при перемещениях $\delta\theta_i$ параметров θ_i определяется выражением

$$\sum_i \Phi_i \, \delta\theta_i$$

где суммирование распространено по точкам материальной системы.

Если действие наложенных на материальную систему связей эквивалентно действию принуждений реакции R_{θ_i} и сил реакции R_{x_i}, R_{y_i}, R_{z_i} в том смысле, что материальная система, стесненная связями, будет двигаться как совершенно свободная, но находящаяся под действием принуждений $\Phi_i + R_{\theta_i}$ и сил

$X_i + R_{x_i}$, $Y_i + R_{y_i}$, $Z_i + R_{z_i}$, то определение идеальных связей непосредственно приводит к соотношению

$$\sum_i (R_{\theta_i}\delta\theta_i + R_{x_i}\delta x_i + R_{y_i}\delta y_i + R_{z_i}\delta z_i) = 0$$

которое следует считать за аксиому определения; суммирование здесь идет по точкам системы.

2. Общие предложения

Если определить R_{θ_i}, R_{x_i}, R_{y_i}, R_{z_i} из дифференциальных уравнений движения механической системы как совершенно свободной системы, но находящейся под действием принуждений $\Phi_i + R_{\theta_i}$ и сил $X_i + R_{x_i}$, $Y_i + R_{y_i}$, $Z + R_{z_i}$, и эти значения вставить в аксиому определения идеальных связей, то непосредственно получим следующий основной принцип динамики таких систем

$$\sum_i \left[\left(\Phi_i - \mu_i \frac{d\theta_i}{dt}\right)\delta\theta_i + \left(X_i - m_i \frac{d^2x_i}{dt^2}\right)\delta x_i + \left(Y_i - m_i \frac{d^2y_i}{dt^2}\right)\delta y_j + \right.$$
$$\left. + \left(Z - m_i \frac{d^2z_i}{dt^2}\right)\delta z_i \right] = 0. \tag{1}$$

Этот принцип возможно осветить в духе Эйлера. Действительно, если от действующих на систему принуждений Φ_i и сил X_i, Y_i, Z_i отнять принуждения

$$\mu_i \frac{d\theta_i}{dt}$$

и силы

$$m_i \frac{d^2x_i}{dt^2}, \qquad m_i \frac{d^2y_i}{dt^2}, \qquad m_i \frac{d^2z_i}{dt^2}$$

которых одних было бы достаточно для создания действительного движения материальной системы, если последняя была бы совершенно свободной, то система будет в равновесии.

Если действительное движение системы отнимать кинематически, а не по Эйлеру, — силами, то можно установить интересное видоизменение принципа.

Рассмотрим класс мыслимых движений (μ) материальной системы от t до $t + dt$, определенных в момент времени t системой действительных значений θ_i, x_i, y_i, z_i и θ_i', x_i', y_i', z_i' и условиями удовлетворения наложенных связей.

Работа действующих принуждений Φ_i и сил X_i, Y_i, Z_i на элементарных перемещениях какого-либо мыслимого движения есть

$$\sum_i \left\{ \Phi_i \left[\overset{\mu}{\theta}_i (t + dt) - \theta_i(t) \right] + X_i \left[\overset{\mu}{x}_i (t + dt) - x_i(t) \right] + Y_i \left[\overset{\mu}{y}_i (t + dt) - y_i(t) \right] + \right.$$
$$\left. + Z_i \left[\overset{\mu}{z}_i (t + dt) - z_i(t) \right] \right\}$$

Из этого выражения вычтем работу принуждений $\mu_i\theta_i'$ и сил mx_i'', m_iy_i'', m_iz_i'', которых было бы достаточно для создания действительного движения механической системы, если бы ее точки были совершенно свободными

$$\sum_i \Big\{ \mu_i\theta_i' \Big[\overset{\mu}{\theta}_i(t+dt) - \theta_i(t) \Big] + m_i x_i'' \Big[\overset{\mu}{x}_i(t+dt) - x_i(t) \Big] +$$

$$+ m_i y_i'' \Big[\overset{\mu}{y}_i(t+dt) - y_i(t) \Big] + m_i z_i'' \Big[\overset{\mu}{z}_i(t+dt) - z_i(t) \Big] \Big\}$$

После вычитания получим выражение

$$A_\mu = \sum_i \Big\{ (\Phi_i - \mu_i\theta_i') \Big(\theta_i'\,dt + \overset{\mu}{\theta}_i{}'' \frac{dt^2}{2} \Big) +$$

$$+ (X_i - m_i x_i'') \Big(x_i'dt + \overset{\mu}{x}_i{}'' \frac{dt^2}{2} \Big) + (Y_i - m_i y_i'') \Big(y_i'dt + \overset{\mu}{y}_i{}'' \frac{dt^2}{2} \Big) +$$

$$+ (Z_i - m_i z_i'') \Big(z_i'\,dt + \overset{\mu}{z}_i{}'' \frac{dt^2}{2} \Big) \Big\}$$

представляющее работу на элементарном цикле, состоящем из прямого мыслимого движения в поле действующих принуждений и сил и движения попятного (обратного) в поле сил, которых было бы достаточно для создания действительного движения, если бы механическая система была совершенно свободной.

Действительное движение механической системы находится в классе мыслимых движений. Поэтому

$$A_\mu - A = \frac{dt^2}{2} \sum_i \Big\{ (\Phi_i - \mu_i\theta_i) \Big(\overset{\mu}{\theta}_i{}'' - \theta_i'' \Big) +$$

$$+ (X_i - m_i x_i'') \Big(\overset{\mu}{x}_i{}'' - x_i'' \Big) + (Y_i - m_i y_i'') \Big(\overset{\mu}{y}_i{}'' - y_i'' \Big) + (Z_i - m_i z_i'') \Big(\overset{\mu}{z}_i{}'' - z_i'' \Big) \Big\}$$

Если через Δ обозначить изменение при переходе от действительного движения к движению (μ) мыслимому

$$\Delta\varphi = \overset{\mu}{\varphi} - \varphi$$

и если заданные силы X_i, Y_i, Z_i не зависят от ускорений θ_i'', x_i'', y_i'', z_i'', а принуждения Φ_i не зависят ни от скоростей θ_i', x_i', y_i', z_i' и ни от ускорений, то

$$\Delta A = -\frac{dt^2}{2} \Delta \sum_i \Big\{ \frac{1}{2\mu_i} \frac{d}{dt} (\Phi_i - \mu_i\theta_i')^2 +$$

$$+ \frac{1}{2m_i} \Big[(X_i - m x_i'')^2 + (Y_i - m_i y_i'')^2 + (Z_i - m_i z_i'')^2 \Big] \Big\}.$$

Но для рассматриваемых линейных связей

$$\frac{dt^2}{2} \Delta\theta_i'' = \delta\theta_i, \quad \frac{dt^2}{2} \Delta x_i'' = \delta x_i, \quad \frac{dt^2}{2} \Delta y_i'' = \delta y_i, \quad \frac{dt^2}{2} \Delta z_i'' = \delta z_i$$

Поэтому согласно основному принципу динамики (1) непосредственно следует, что A для действительного движения есть экстремум среди A_μ, так как

$$\Delta A = 0$$

Вторая вариация

$$\Delta^2 A \leqslant 0$$

Следовательно, A для действительного движения есть минимум среди A_μ.

Рассмотрим теперь случай, имеющий большое практическое значение, когда действительные перемещения механической системы находятся среди ее возможных перемещений

$$\delta\theta_i = d\theta_i\,, \qquad \delta x_i = dx_i\,, \qquad \delta y_i = dy_i\,, \qquad \delta z_i = dz_i$$

Подставляя эти значения в принцип (1), после простых преобразований получим теорему живых сил

$$\frac{d}{dt}\sum_i \frac{m_i}{2}(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) + \sum_i \mu_i\theta_i'^2 = \sum_i (\Phi_i\theta_i' + X_i x_i' + Y_i y_i' + Z_i z_i')$$

Если принуждения и силы допускают силовую функцию $U(\theta, x, y, z)$

$$\Phi_i = \frac{\partial U}{\partial \theta_i}\,, \qquad X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}\,, \qquad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}\,, \qquad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i}$$

то выражение теоремы живых сил примет вид

$$\frac{d}{dt}(T - U) = -\sum_i \mu_i\theta_i'^2, \tag{2}$$

где T обозначает живую силу механической системы

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2}(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)$$

Теорема живых сил (2) непосредственно приводит к ряду важных следствий.

В движении механической системы значения функции $T - U$ уменьшаются со скоростью $\sum \mu_i\theta_i'^2$.

Если отсутствуют непосредственные принуждения $\Phi_i = 0$ на параметры θ_i, т. е. если все принуждения являются принуждениями реакций наложенных на материальную систему связей, то функция $T - U$ будет выражать полную механическую энергию системы, и, следовательно, механическая энергия системы рассеивается со скоростью $\sum \mu_i\theta_i'^2$. Это в общем случае означает, что при существовании в системе параметров θ_i указанной природы движение механической системы будет сбиваться к равновесию, в котором значение силовой функции U имеет относительно наибольшее значение. Такое положение равновесия устойчиво по отношению к переменным x_i, y_i, z_i и x_i', y_i', z_i'. Действительно, пусть в положении равновесия $x_i = y_i = z_i = 0$, а силовая функция $U(x, y, z)$ имеет максимум и равна нулю. Тогда $T - U$ будет определенно положительной относительно x_i, y_i, z_i и x_i', y_i', z_i'; ее полная производная по времени никогда не положительна (2), а это согласно известной теореме Ляпунова об устойчивости [2] означает, что невозмущенное движение (в данном случае рассматриваемое положение равновесия) будет устойчиво по отношению к переменным x_i, y_i, z_i и x_i', y_i', z_i'.

Из теоремы Ляпунова об устойчивости и теоремы живых сил (2) также непосредственно следует, что изолированное положение равновесия механической системы, в котором силовая функция $U(\theta, x, y, z)$ есть максимум относительно всех переменных θ_i, x_i, y_i, z_i, является устойчивым относительно θ_i, x_i, y_i, z_i и x_i', y_i', z_i'.

Если параметры θ_i вынуждаются к бесконечно медленным изменениям, при которых в теореме живых сил (2) скорость диссипации с большой степенью точности возможно считать равной нулю, то в этом случае функция $T - U$ постоянна.

3. Уравнения движения

Определим уравнения движения механической системы для того случая, когда связи, наложенные на систему, возможно выразить через k независимых координат $q_1, \ldots, q_k$.

Пусть

$$\theta_i = \theta_i(q_1, \ldots, q_k, t),$$

$$x_i = x_i(q_1, \ldots, q_k, t), \qquad y_i = y_i(q_1, \ldots, q_k, t) \qquad z_i = z_i(q_1, \ldots, q_k, t)$$

Отсюда

$$\delta\theta_i = \sum_s \frac{\partial\theta_i}{\partial q_s}\delta q_s,$$

$$\delta x_i = \sum_s \frac{\partial x_i}{\partial q_s}\delta q_s, \qquad \delta y_i = \sum_s \frac{\partial y_i}{\partial q_s}\delta q_s, \qquad \delta z_i = \sum_s \frac{\partial z_i}{\partial q_s}\delta q_s$$

Подставляя эти значения в принцип (1), после преобразований выражение (1) можно привести к виду

$$\sum_s \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} + \frac{\partial f}{\partial q_s'} - Q_s\right]\delta q_s = 0$$

где

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2}(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)$$

есть живая сила,

$$f = \sum_i \frac{\mu_i}{2}\theta_i'^2$$

— диссипативная функция,

$$Q_s = \sum_i \left(\Phi_i \frac{\partial\theta_i}{\partial q_s} + X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right)$$

— обобщенная сила.

Так как последнее выражение должно иметь место при произвольных δq_s, то поэтому должно быть

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s - \frac{\partial f}{\partial q_s'} \qquad (s = 1, \ldots, k) \tag{3}$$

Это — искомые дифференциальные уравнения движения.

Если принуждения и силы допускают силовую функцию U, то

$$Q_s = \frac{\partial U}{\partial q_s}.$$

Если связи, наложенные на систему, не зависят явно от времени

$$\frac{\partial\theta_i}{\partial t} = \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial y_i}{\partial t} = \frac{\partial z_i}{\partial t} = 0$$

то диссипативная функция f будет квадратичной относительно q_s', а дифференциальные уравнения движения вблизи положения равновесия принимают вид, хорошо изученный Релеем и Томсоном.

Поступила в редакцию
11 XII 1942

Институт механики
Академии Наук СССР.

FORCED MOTIONS

N. G. ČETAJEV

(Summary)

In this paper a mechanical system of points depending on parameters θ_i is considered. It is assumed that for a free state of the system the parameters are governed by the differential equations $\mu_i \theta_i' = \Phi_i$ where Φ_i are the coercive forces, whose work done is $\Sigma \Phi_i d\theta_i$. The author obtains basic principle (1), the theorem of kinetic energy (2) and the equations of motion (3), providing the constraints for which the work of the coercive and reacting forces upon possible displacements are equal to zero.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лагранж. Аналитическая механика. Т. 1.
2. Ляпунов А. М. Общие задачи об устойчивости движения. 1935.