АКАДЕМИЯ НАУК СССР
USSR ACADEMY OF SCIENCES

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ
ЖУРНАЛ „ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА“

INSTITUTE OF MECHANICS
JOURNAL OF APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Т. IV, в. 5—6, 1940

О ГРАВИТАЦИОННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ГАЗОВОЙ СФЕРЫ

Л. Н. СРЕТЕНСКИЙ

(Москва)

1. Уравнение и граничные условия задачи

Рассмотрим равновесное состояние некоторой газовой массы, все частицы которой притягиваются друг к другу по закону Ньютона, и исследуем вопрос об ее устойчивости, рассматривая лишь бесконечно малые возмущения.[1]

Допустим, что между плотностью газа и давлением существует соотношение

$$p = p(\rho), \tag{1.1}$$

и предположим, что в состоянии равновесия свободная поверхность газа имеет сферическую форму, находящуюся под равномерным давлением p_0; плотность, отвечающую этому давлению, обозначим через ρ_0, так что

$$p_0 = p(\rho_0).$$

Обозначим через $\Omega(x,y,z)$ Ньютоновский потенциал данной массы газа в состоянии его равновесия:

$$\Omega = -\gamma \iiint\limits_{(S)} \frac{\rho\, d\tau}{R}. \tag{1.2}$$

Здесь γ есть постоянная всемирного тяготения, R есть расстояние между притягиваемой точкой и произвольной притягивающей точкой сферического объема (S).

Уравнения гидростатики напишутся для этого объема так:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial \Omega}{\partial y}, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial \Omega}{\partial z}. \tag{1.3}$$

[1] Разбираемая задача имеет отношение к теории гравитационной неустойчивости, предложенной Джинсом [1] (J. H. Jeans). В данной работе строятся уравнения колебаний газовой массы для бесконечно малых возмущений и с помощью этих уравнений исследуется вопрос об устойчивости сферической газовой массы. Работа возникла при знакомстве со статьями А. Б. Северного, посвященными разбираемому здесь вопросу о гравитационной неустойчивости [2]. Наши общие результаты не вполне согласуются друг с другом и, как мы думаем, главным образом, благодаря различию в выбираемых нами граничных условиях.

Внесем во всю массу гравитирующего газа небольшое возмущение. Пусть Δp, $\Delta\rho$, $\Delta\Omega$ будут изменениями давления, плотности и Ньютоновского потенциала, возникшими благодаря этому возмущению. Обозначим далее через u, v, w эйлеровские координаты возникшего движения газа. Напишем уравнения гидродинамики, считая все введенные величины Δp, $\Delta\rho$, $\Delta\Omega$, u, v, w малыми. Это последнее допущение позволяет написать уравнения малых движений газа в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial x} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial y} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial y}, \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial z} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial z}, \tag{1.4}$$

где

$$\rho_1 = \rho + \Delta p, \qquad p_1 = p + \Delta p, \qquad \Omega_1 = \Omega + \Delta\Omega.$$

Величина p_1 связана с ρ_1 зависимостью (1.1):

$$p_1 = p(\rho + \Delta\rho).$$

Отсюда, на основании предположения о малости изменения плотности $\Delta\rho$, получаем:

$$p_1 = p + \frac{dp}{d\rho}\Delta\rho.$$

Величина $\Delta\rho$ может быть выражена через конденсацию газа s, определяемую формулой:

$$s = (\rho_1 - \rho)/\rho, \qquad s = \Delta\rho/\rho.$$

Мы имеем:

$$\Delta\rho = \rho s, \quad \rho_1 = (1+s)\rho.$$

Отсюда

$$p_1 = p + \rho\,(dp/d\rho)\,s.$$

Величина $dp/d\rho$ есть квадрат скорости звука c^2; следовательно,

$$p_1 = p + \rho c^2 s. \tag{1.5}$$

Отметим, что величины p и ρc^2 вычисляются для равновесного состояния газа.

Рассмотрим теперь первое уравнение системы (1.4).

Преобразуем правую часть этого уравнения, учитывая лишь главные бесконечно малые:

$$\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{1}{(1+s)\rho}\,\frac{\partial(p+\rho c^2 s)}{\partial x} = \frac{1}{\rho}(1-s)\left[\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \rho c^2 s}{\partial x}\right] =$$
$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left[-s\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \rho c^2 s}{\partial x}\right].$$

Продолжая вычисления, найдем:

$$-s\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \rho c^2 s}{\partial x} = -s\frac{dp}{d\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} + c^2 s\frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial c^2 s}{\partial x} = \rho\frac{\partial c^2 s}{\partial x}.$$

Таким образом

$$\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial x}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial c^2 s}{\partial x}$$

и, следовательно, первое уравнение системы (1.4) приводится к виду:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial c^2 s}{\partial x}-\frac{\partial \Omega_1}{\partial x},$$

или, в силу соотношения $\Omega_1=\Omega+\Delta\Omega$ и первого из уравнений гидростатики (1.3),

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial c^2 s}{\partial x}-\frac{\partial \Delta\Omega}{\partial x}.$$

Аналогично найдем:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{\partial c^2 s}{\partial y}-\frac{\partial \Delta\Omega}{\partial y},\qquad \frac{\partial w}{\partial t}=-\frac{\partial c^2 s}{\partial z}-\frac{\partial \Delta\Omega}{\partial z}.$$

Нетрудно видеть, интегрируя эти уравнения по времени в пределах от 0 до t, что если в начальный момент времени существует потенциал скоростей, то потенциал скоростей будет существовать и во все последующее время.

В дальнейшем мы будем изучать лишь потенциальные движения газа как наиболее обусловленные с физической точки зрения. Обозначим через $\varphi(x,y,z;t)$ потенциал скоростей и положим:

$$u=-\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad v=-\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad w=-\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Этот потенциал является решением уравнения:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=c^2 s+\Delta\Omega. \tag{1.6}$$

Величина $\Delta\Omega$ есть то увеличение Ньютоновского потенциала в данной точке, которое получается благодаря перераспределению основной массы газа при движении возмущения. Форма поверхности движущегося газа меняется с течением времени, но в силу основных допущений о малости возмущающего движения эта поверхность не будет значительно уклоняться от своей первоначальной сферической формы. В силу этого величина $\Delta\Omega$ может быть составлена из двух частей; первая часть, равная

$$-\gamma\iiint\limits_{(S)}\frac{\rho s\,d\tau}{R},$$

проистекает от изменения плотности газа внутри сферы, а вторая часть, равная потенциалу простого слоя плотности $\rho_0\zeta$, нанесенного на поверхность сферы (S), появляется благодаря указанной выше деформации внешней поверхности газа; ζ есть увеличение радиуса-вектора этой поверхности по сравнению с радиусом сферы. В дальнейшем мы не будем принимать в расчет эту вторую часть приращения $\Delta\Omega$ и положим

$$\Delta\Omega = -\gamma \iiint\limits_{(S)} \frac{\rho s\, d\tau}{R}.$$

Отсюда уравнение (1.6), определяющее потенциал скоростей, перепишется так:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = c^2 s - \gamma \iiint\limits_{(S)} \frac{\rho s\, d\tau}{R}. \tag{1.7}$$

Присоединим теперь к динамическим уравнениям уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t} + \frac{\partial\rho_1 u}{\partial x} + \frac{\partial\rho_1 v}{\partial y} + \frac{\partial\rho_1 w}{\partial z} = 0.$$

В нашем случае $\rho_1 = (1 + \rho)s$; величина ρ от времени не зависит, компоненты скорости u, v, w и конденсация s суть величины малые, поэтому уравнение непрерывности может быть переписано в упрощенном виде:

$$\rho \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial\rho u}{\partial x} + \frac{\partial\rho v}{\partial y} + \frac{\partial\rho w}{\partial z} = 0,$$

или, вводя потенциал скоростей,

$$\rho \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right). \tag{1.8}$$

Наша задача содержит два неизвестных φ и s. Для определения этих неизвестных мы имеем два основных уравнения (1.7) и (1.8). Нам остается только установить граничные условия для решения этих уравнений.

Пусть уравнение деформированной поверхности газовой массы будет

$$r = a(1 + \zeta), \tag{1.9}$$

где a есть радиус недеформированной сферы. Это уравнение изображает поверхность газа в момент времени t. В момент времени $t + dt$ внешняя поверхность газа изобразится уравнением:

$$r - \frac{\partial\varphi}{\partial r} dt = a\left[1 + \zeta + \frac{\partial\zeta}{\partial t} dt - \frac{1}{a}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} dt - \frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial\zeta}{\partial\psi}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi} dt\right],$$

где θ и ψ — географические координаты точки на сфере.

Устраняя в правой части два последних члена как величины второго порядка малости и принимая в расчет уравнение (1.9), получим первое граничное условие задачи:

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial r} + a\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right]_{r=a} = 0. \tag{1.10}$$

На поверхности деформированной сферы давление постоянно:

$$p_0 = p(\rho + \Delta\rho), \quad \text{или} \quad p_0 = p(\rho) + (dp/d\rho)\,\Delta\rho,$$

или же

$$p(\rho) + c^2\rho s = p_0.$$

Левая часть этого равенства должна быть вычислена в точках деформированной поверхности, т. е. при $r=a(1+\zeta)$; следовательно, мы имеем возможность переписать рассматриваемое условие так:

$$[p(\rho)+c^2\rho s]_{r=a}+\left[\frac{\partial(p+c^2\rho s)}{\partial r}\right]_{r=a} a\zeta=p_0.$$

Но при $r=a$ давление $p(\rho)$ равно p_0; поэтому данное соотношение перепишется так:

$$\left[c^2\rho s+\frac{\partial p}{\partial r}a\zeta\right]_{r=a}=0.$$

Отсюда

$$\zeta=\alpha^2[\rho s]_{r=a}, \tag{1.11}$$

где

$$\alpha^2=-\left[\frac{c^2}{a}\frac{dr}{dp}\right]_{r=a}.$$

Исключив из условия (1.10), пользуясь формулой (1.11), деформацию ζ, получим:

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial r}+a\alpha^2\frac{\partial\rho s}{\partial t}\right]_{r=a}=0. \tag{1.12}$$

Это граничное условие будет играть в дальнейшем основную роль.

2. Уравнения колебаний сферы

Пусть плотность ρ начального состояния газа является функцией только радиуса-вектора r. Тогда уравнение (1.8) можно преобразовать, вводя сферические координаты r, θ, ψ, к виду:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=\frac{\rho}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2}\right]+\frac{d\rho}{dr}\frac{\partial\varphi}{\partial r}, \tag{2.1}$$

причем $\omega=\rho s$.

Уравнение (1.7) с помощью функции ω запишется так:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{c^2}{\rho}\omega-\gamma\iiint\limits_{S}\frac{\omega\,d\tau}{R}. \tag{2.2}$$

Частные решения системы уравнений (2.1) и (2.2) следующего вида:

$$\omega=\omega'(r,\theta,\psi)\cos\sigma t,\quad \varphi=-\varphi'(r,\theta,\psi)\sin\sigma t. \tag{2.3}$$

Определение частоты σ составляет наиболее интересную часть нашей задачи.

Из уравнений (2.1) и (2.2) для определения функций ω' и φ' имеем:

$$+\sigma\omega'=\rho\Delta_2\varphi'+\frac{d\rho}{dr}\frac{\partial\varphi'}{\partial r}, \tag{2.4}$$

$$-\sigma\varphi'=\frac{c^2}{\rho}\omega'-\gamma\iiint\limits_{(S)}\frac{\omega'\,d\tau}{R}. \tag{2.5}$$

Граничное условие (1.12) примет такой вид:

$$\left[\frac{\partial\varphi'}{\partial r}+a\alpha^2\sigma\omega'\right]_{r=a}=0. \tag{2.6}$$

Фундаментальные функции нашей задачи будем искать в виде:

$$\varphi'=f_1(r)\,S_{nj}(\theta,\psi) \qquad \omega'=f_2(r)\,S_{nj}(\theta,\psi), \tag{2.7}$$

где $f_1(r)$ и $f_2(r)$ — неизвестные функции r, а $S_{nj}(\theta,\psi)$ есть одна из сферических функций порядка n:

$$S_{nj}(\theta,\psi)=(1-\mu^2)^{j/2}\frac{d^jX_n}{d\mu^j}\begin{cases}\cos j\psi\\ \sin j\psi\end{cases} \qquad (j=0,1,2,\ldots,n),$$

где $X_n(\mu)$ есть многочлен Лежандра порядка n, а $\mu=\cos\theta$.

Отметим, что

$$\begin{gathered}X_n(\cos\alpha)=X_n(\mu)\,X_n(\mu')+2\sum_{j=1}^{n}\frac{(1-\mu^2)^{j/2}(1-\mu'^2)^{j/2}}{(n-j+1)\ldots(n+j)}\frac{d^jX_n}{d\mu^j}\frac{d^jX_n'}{d\mu'^j}\cos j(\psi-\psi'),\\ \cos\alpha=\mu\mu'+\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos(\psi-\psi').\end{gathered} \tag{2.8}$$

Подставив выражения (2.7) функций φ' и ω' в уравнение (2.4), получим:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{df_1}{dr}\right)-n(n+1)f_1+\frac{r^2}{\rho}\frac{d\rho}{dr}\frac{df_1}{dr}=\frac{\sigma r^2}{\rho}f_2. \tag{2.9}$$

Интегральное слагаемое правой части уравнения (2.5) может быть преобразовано к виду:

$$\iiint\limits_{(S)}\frac{\omega'\,d\tau}{R}=\int_0^a r_1^2\,dr_1\iint\limits_{(\Sigma)}\frac{\omega'\,d\Sigma}{R}=$$

$$=\int_0^r r_1^2\,dr_1\iint\limits_{(\Sigma)}\frac{\omega'}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_1}{r}\right)^nX_n(\cos\alpha)\,d\Sigma+\int_r^a r_1^2\,dr_1\iint\limits_{(\Sigma)}\frac{\omega'}{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r_1}\right)^nX_n(\cos\alpha)\,d\Sigma,$$

где (Σ) есть поверхность сферы радиуса единица.

Подставим сюда вместо функции ω' ее выражение (2.7) через сферическую функцию $S_{nj}(\theta,\psi)$. Пользуясь формулой (2.8) и свойством ортогональности сферических функций, находим:

$$\begin{gathered}\iint\limits_{(\Sigma)}\frac{\omega'}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_1}{r}\right)^nX_n(\cos\alpha)\,d\Sigma=\frac{4\pi}{2n+1}\frac{r_1^n}{r^{n+1}}\,\omega'(r_1,\theta,\psi),\\ \iint\limits_{(\Sigma)}\frac{\omega'}{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r_1}\right)^nX_n(\cos\alpha)\,d\Sigma=\frac{4\pi}{2n+1}\frac{r^n}{r_1^{n+1}}\,\omega'(r_1,\theta,\psi)\end{gathered} \tag{2.10}$$

и, следовательно,

$$\iiint\limits_{(S)} \frac{\omega' \, d\tau}{R} = \frac{4\pi}{2n+1} S_{nj}(\theta,\psi) \left[\int\limits_0^r \frac{r_1^{n+2}}{r^{n+1}} f_2(r_1)\, dr_1 + \int\limits_r^a \frac{r^n}{r_1^{n-1}} f_2(r_1)\, dr_1 \right].$$

Теперь уравнение (2.5) примет вид:

$$\frac{4\pi\gamma}{2n+1} \left[\int\limits_0^r \frac{r_1^{n+2}}{r^{n+1}} f_2(r_1)\, dr_1 + \int\limits_r^a \frac{r^n}{r_1^{n-1}} f_2(r_1)\, dr_1 \right] = \frac{c^2}{\rho} f_2(r) + \sigma f_1(r). \tag{2.11}$$

Умножая обе части этого уравнения на r^{n+1} и дифференцируя по r, получим:

$$\frac{d}{dr}\left[r^{n+1} \left(\frac{c^2}{\rho} f_2 + \sigma f_1 \right) \right] = 4\pi\gamma \int\limits_r^a \frac{r^{2n}}{r_1^{n-1}} f_2(r_1)\, dr_1. \tag{2.12}$$

Освобождаясь в этом уравнении от знака интеграла, получим дифференциальное уравнение для функций $f_1(r)$ и $f_2(r)$.

Это уравнение запишем в сокращенном виде, вводя новую функцию $F(r)$ с помощью равенства:

$$\sigma F(r) = \frac{c^2}{\rho} f_2(r) + \sigma f_1(r). \tag{2.13}$$

Таким образом получим:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dF}{dr} \right) - n(n+1) F = -\frac{4\pi\gamma}{\sigma} r^2 f_2. \tag{2.14}$$

Посмотрим, при каком условии функции $f_1(r)$ и $f_2(r)$, удовлетворяющие этому дифференциальному уравнению, будут удовлетворять и исходному уравнению (2.11). Прежде всего ясно, что к уравнению (2.14) мы пришли бы и в том случае, если бы отправлялись от более общего уравнения, чем уравнение (2.11), а именно от уравнения:

$$\frac{4\pi\gamma}{2n+1} \left[\int\limits_0^r \frac{r_1^{n+2}}{r^{n+1}} f_2(r_1)\, dr_1 + \int\limits_r^a \frac{r^n}{r_1^{n-1}} f_2(r_1)\, dr_1 \right] = \sigma F(r) + Ar^n + \frac{B}{r^{n+1}}, \tag{2.15}$$

где A и B — две произвольные константы.

Если функция $F(r)$, а равно и функция $f_2(r)$ конечны в начале координат, то константа B может быть только нулем.

Умножая обе части уравнения (2.15) на r^{n+1} и дифференцируя по r, получим:

$$\sigma \frac{d}{dr}[r^{n+1} F] + (2n+1) Ar^{2n} = 4\pi\gamma \int\limits_r^a \frac{r^{2n}}{r_1^{n-1}} f_2(r_1)\, dr_1.$$

Это уравнение показывает, что если при $r = a$ функция $F(r)$ будет удовлетворять условию

$$\frac{d}{dr}(r^{n+1} F) = 0, \tag{2.16}$$

то число A необходимо будет равно нулю и, следовательно, выбранные нами функции $f_1(r)$ и $f_2(r)$, конечные в начале координат и удовлетворяющие уравнению (2.14), будут удовлетворять и исходному уравнению (2.11).

Преобразуем уравнения (2.9) и (2.14), устраняя функцию $f_2(r)$ и сохраняя функции $f_1(r)$ и $F(r)$.

После несложных преобразований приходим к основной системе уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dr}\left(\rho r^2 \frac{df}{dr}\right) + \rho\left[\frac{\sigma^2 r^2}{c^2} - n(n+1)\right] f = \frac{\rho r^2}{c^2}\sigma^2 F, \\ &\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dF}{dr}\right) + \left[\frac{4\pi\gamma\rho r^2}{c^2} - n(n+1)\right] F = \frac{4\pi\gamma}{c^2}\rho r^2 f, \end{aligned} \tag{2.17}$$

где индекс 1 у функции $f_1(r)$ для простоты опущен.

Напишем подробно граничные условия интегрирования этой системы уравнений. Прежде всего при $r=0$ функции $f(r)$ и $F(r)$ должны быть конечны. При $r=a$ должны быть соблюдены условия (2.6) и (2.16); эти условия в функциях $f(r)$ и $F(r)$ записываются так:

$$\frac{df}{dr} - \beta^2\sigma^2 f = -\beta^2\sigma^2 F, \quad \frac{d}{dr}(r^{n+1}F) = 0 \qquad (r=a), \tag{2.18}$$

где

$$\beta^2 = -\left[\rho\frac{dr}{dp}\right]_{r=a}.$$

3. Решение задачи при новом упрощающем предположении

Исследование системы уравнений (2.17) предыдущего раздела значительно упрощается, если отвлечься от влияния на Ньютоновский потенциал перераспределения массы газа при его движении. Иными словами, исследование значительно упрощается, если считать $\Delta\Omega=0$. В этом случае система уравнений (2.17) записывается так:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dr}\left(\rho r^2 \frac{df}{dr}\right) + \rho\left[\frac{\sigma^2 r^2}{c^2} - n(n+1)\right] f = \frac{\rho r^2}{c^2}\sigma^2 F, \\ &\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dF}{dr}\right) - n(n+1) F = 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Последнее уравнение интегрируется полностью, и мы получаем:

$$F = C_1 r^n + C_2 / r^{n+1}.$$

Константа C_2 должна быть приравнена нулю, так как функция $F(r)$ сохраняет конечное значение в начале координат, следовательно,

$$F = C_1 r^n.$$

Граничное условие $d(r^{n+1}F)/dr=0$ показывает, что $C_1=0$. Таким образом $F\equiv 0$. В силу этого первое из уравнений (3.1) и первое из условий (2.18) принимают более простой вид:

$$\frac{d}{dr}\left(\rho r^2 \frac{df}{dr}\right) + \rho\left[\frac{\sigma^2 r^2}{c^2} - n(n+1)\right] f = 0, \tag{3.2}$$

$$\left[\frac{df}{dr} - \beta^2 \sigma^2 f\right]_{r=a} = 0. \tag{3.3}$$

Покажем, что интеграл уравнения (3.2), конечный в начале координат, может удовлетворять условию (3.3) лишь при σ^2 действительном.

Покажем прежде всего, что величина σ^2 не может быть комплексной. Предположим, что σ^2 есть величина комплексная; этой комплексной величине σ^2 будет соответствовать решение $f(r)$ уравнения (3.2). Комплексной сопряженной величине $\bar{\sigma}^2$ будет отвечать тогда решение $\bar{f}(r)$, сопряженное решению $f(r)$:

$$\frac{d}{dr}\left(\rho r^2 \frac{d\bar{f}}{dr}\right) + \rho\left[\frac{\bar{\sigma}^2 r^2}{c^2} - n(n+1)\right] \bar{f} = 0, \tag{3.4}$$

$$\left[\frac{d\bar{f}}{dr} - \beta^2 \bar{\sigma}^2 \bar{f}\right]_{r=a} = 0. \tag{3.5}$$

Эти уравнения приводят к соотношению между $f(r)$ и $\bar{f}(r)$:

$$\bar{f}\,\frac{d}{dr}\left(\rho r^2 \frac{df}{dr}\right) - f\,\frac{d}{dr}\left(\rho r^2 \frac{d\bar{f}}{dr}\right) + \frac{\rho r^2}{c^2}(\sigma^2 - \bar{\sigma}^2) f\bar{f} = 0.$$

Откуда, интегрируя обе части этого соотношения в пределах от 0 до a и используя (3.4) и (3.5), получим:

$$(\sigma^2 - \bar{\sigma}^2)\left[a^2 \rho(a)\,\beta^2 f(a)\bar{f}(a) + \int\limits_0^a \frac{r^2}{c^2} f(r)\bar{f}(r)\,dr\right] = 0.$$

В этом соотношении квадратная скобка обращаться в нуль не может, и, следовательно, $\sigma^2 - \bar{\sigma}^2 = 0$; а это и значит, что числа σ^2 могут быть лишь действительные.

Найдем знак σ^2. Для этого составим с помощью уравнения (3.2) интегральную комбинацию:

$$\int\limits_0^a f\,\frac{d}{dr}\left(\rho r^2 \frac{df}{dr}\right) dr + \int\limits_0^a \rho\left[\frac{\sigma^2 r^2}{c^2} - n(n+1)\right] f^2\,dr = 0.$$

Отсюда, пользуясь условием (3.3), получим:

$$\sigma^2\left[a^2 \beta^2 \rho(a) f^2(a) + \int\limits_0^a \frac{\rho r^2}{c^2} f^2(r)\,dr\right] = n(n+1)\int\limits_0^a \rho f^2(r)\,dr + \int\limits_0^a \rho r^2 \left(\frac{df}{dr}\right)^2 dr.$$

Из этой формулы видно, что величина σ^2 всегда положительна, а, следовательно, σ есть величина действительная. Формулы (2.3) показывают, в силу этого, что в данном случае малые колебания газа не будут развиваться с течением времени и, следовательно, при принятии упрощающих предположений данного раздела оказывается, что рассматриваемая нами газовая сфера устойчива.

4. Радиальные колебания газовой сферы

Положим в уравнениях (2.17) n равным нулю. В этом случае колебания газа будут чисто радиальными, ибо φ' и ω' будут зависеть лишь от радиуса r. Для определения этих колебаний будем иметь уравнения:

$$\frac{d}{dr}\left(\rho r^2 \frac{df}{dr}\right) + \frac{\rho r^2}{c^2}\sigma^2 f = \frac{\rho r^2}{c^2}\sigma^2 F, \tag{4.1}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dF}{dr}\right) + 4\pi\gamma \frac{\rho r^2}{c^2} F = 4\pi\gamma \frac{\rho r^2}{c^2} f. \tag{4.2}$$

Граничные условия интегрирования этих уравнений принимают вид:

$$\frac{df}{dr} - \beta^2\sigma^2 f = -\beta^2\sigma^2 F \tag{4.3}$$

$$(r = a).$$

$$\frac{drF}{dr} = 0 \tag{4.4}$$

Умножая уравнение (4.1) на $4\pi\gamma$, а уравнение (4.2) на σ^2 и почленно складывая результаты, получим:

$$\frac{d}{dr}\left[r^2\left(4\pi\gamma\rho\frac{df}{dr} + \sigma^2\frac{dF}{dr}\right)\right] = 0.$$

Интегрируя это уравнение, находим:

$$4\pi\gamma\rho\frac{df}{dr} + \sigma^2\frac{dF}{dr} = \frac{C}{r^2}.$$

Функции f и F конечны в начале координат, следовательно, константа интеграции C равна нулю, т. е.

$$4\pi\gamma\rho\frac{df}{dr} + \sigma^2\frac{dF}{dr} = 0. \tag{4.5}$$

Положим в этом уравнении $r = a$ и рассмотрим получающееся таким путем соотношение вместе с граничными условиями (4.3) и (4.4). Легко убедиться, что эти три соотношения позволяют записать граничные условия нашей задачи в виде:

$$\frac{dF}{dr} + \frac{F}{a} = 0 \tag{4.6}$$

$$(r = a),$$

$$F(a) = mf(a) \tag{4.7}$$

где

$$m = \frac{\beta^2}{\beta^2 + 1/[4\pi\gamma a\rho(a)]}.$$

Разберем вопрос о характере числа σ^2. Покажем, что σ^2 при известных условиях не может быть числом комплексным. Если число σ^2 комплексное и ему отвечают решения F и f системы (4.1), (4.2), то существует и комплексное сопряженное число $\bar{\sigma}^2$, и этому числу отвечают решения $\bar{F}$ и $\bar{f}$ системы (4.1), (4.2), сопряженные решениям F и f.

Составим из двух уравнений

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dF}{dr}\right)+4\pi\gamma\frac{\rho r^2}{c^2}F=4\pi\gamma\frac{\rho r^2}{c^2}f,\qquad \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\overline{F}}{dr}\right)+4\pi\gamma\frac{\rho r^2}{c^2}\overline{F}=4\pi\gamma\frac{\rho r^2}{c^2}\overline{f}$$

интегральную комбинацию

$$\int\limits_0^a\left[\overline{F}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dF}{dr}\right)-F\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\overline{F}}{dr}\right)\right]dr=4\pi\gamma\int\limits_0^a\frac{\rho r^2}{c^2}(f\overline{F}-\overline{f}F)\,dr.$$

Выполняя интегрирование в левой части и пользуясь граничными условиями

$$dF/dr+F/a=0,\qquad d\overline{F}/dr+\overline{F}/a=0,$$

получим:

$$\int\limits_0^a\frac{\rho r^2}{c^2}(f\overline{F}-\overline{f}F)\,dr=0. \tag{4.8}$$

Возьмем уравнения:

$$\frac{d}{dr}\left(\rho r^2\frac{df}{dr}\right)+\frac{\rho r^2}{c^2}\sigma^2 f=\frac{\rho r^2}{c^2}\sigma^2 F,\qquad \frac{d}{dr}\left(\rho r^2\frac{d\overline{f}}{dr}\right)+\frac{\rho r^2}{c^2}\overline{\sigma}^2\overline{f}=\frac{\rho r^2}{c^2}\overline{\sigma}^2\overline{F}.$$

Из этих уравнений легко получить:

$$\int\limits_0^a\left[\overline{f}\frac{d}{dr}\left(\rho r^2\frac{df}{dr}\right)-f\frac{d}{dr}\left(\rho r^2\frac{d\overline{f}}{dr}\right)\right]dr+\int\limits_0^a\frac{\rho r^2}{c^2}(\sigma^2-\overline{\sigma}^2)f\overline{f}\,dr=$$

$$=\int\limits_0^a\frac{\rho r^2}{c^2}(\sigma^2F\overline{f}-\overline{\sigma}^2\overline{F}f)\,dr.$$

Рассмотрим первый интеграл левой части. Пользуясь граничными условиями и уравнением (4.5), найдем:

$$\int\limits_0^a\left[\overline{f}\frac{d}{dr}\left(\rho r^2\frac{df}{dr}\right)-f\frac{d}{dr}\left(\rho r^2\frac{d\overline{f}}{dr}\right)\right]dr=$$

$$=a^2\rho(a)\left[\overline{f}(a)\left(\frac{df}{dr}\right)_{r=a}-f(a)\left(\frac{d\overline{f}}{dr}\right)_{r=a}\right]=\frac{am}{4\pi\gamma}(\sigma^2-\overline{\sigma}^2)\,f(a)\overline{f}(a).$$

Таким образом

$$(\sigma^2-\overline{\sigma}^2)\left[\frac{am}{4\pi\gamma}f(a)\overline{f}(a)+\int\limits_0^a\frac{\rho r^2}{c^2}f\overline{f}\,dr\right]=\int\limits_0^a\frac{\rho r^2}{c^2}(\sigma^2F\overline{f}-\overline{\sigma}^2\overline{F}f)\,dr.$$

Применяя для преобразования правой части этой формулы соотношение (4.8), получим:

$$(\sigma^2-\overline{\sigma}^2)\left[\frac{am}{4\pi\gamma}f(a)\overline{f}(a)+\int\limits_0^a\frac{\rho r^2}{c^2}f\overline{f}\,dr-\int\limits_0^a\frac{\rho r^2}{c^2}F\overline{f}\,dr\right]=0. \tag{4.9}$$

Покажем, что при соблюдении некоторого условия величина, стоящая в квадратной скобке этого равенства, отлична от нуля. С этой целью преобразуем уравнение (4.2), вводя новую неизвестную функцию

$$\Phi = rF.$$

Для функции Φ получим уравнение:

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{4\pi\gamma\rho}{c^2}\Phi = 4\pi\gamma\frac{\rho r}{c^2}f. \tag{4.10}$$

Функция Φ должна при $r=0$ обращаться в нуль, а при $r=a$ удовлетворять условию:

$$d\Phi \,/\, dr = 0.$$

Построим для уравнения

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{4\pi\gamma\rho}{c^2}\Phi = 0 \tag{4.11}$$

функцию Грина $G(r,r_1)$ по условиям:

$$G(0,r_1) = 0, \qquad dG(a,r_1) \,/\, dr = 0.$$

С помощью этой функции интеграл уравнения (4.10) запишется так:

$$\Phi(r) = -4\pi\gamma\int_0^a G(r,r_1)\frac{\rho r_1}{c^2}f(r_1)\,dr_1.$$

Возвращаясь к первоначальной функции $F(r)$, получим:

$$F(r) = -4\pi\gamma\int_0^a G(r,r_1)\frac{\rho r_1}{c^2 r}f(r_1)\,dr_1.$$

Получив эту формулу, преобразуем последний интеграл формулы (4.9):

$$\int_0^a \frac{\rho r^2}{c^2}F\bar{f}\,dr = -4\pi\gamma\int_0^a \frac{\rho r^2}{c^2}\bar{f}\,dr\int_0^a G(r,r_1)\frac{\rho r_1}{c^2 r}f(r_1)\,dr_1 =$$

$$= -4\pi\gamma\int_0^a\int_0^a G(r,r_1)\frac{\rho(r)\,\rho(r_1)}{c^2(r)\,c^2(r_1)}\,rr_1\bar{f}(r)f(r_1)\,dr\,dr_1.$$

Подставив сюда функции $f(r)$ и $\bar{f}(r)$, представленные в форме

$$f(r) = f_1(r) + if_2(r), \qquad \bar{f}(r) = f_1(r) - if_2(r),$$

получим:

$$\int_0^a \frac{\rho r^2}{c^2}F\bar{f}\,dr = -4\pi\gamma\int_0^a\int_0^a G(r,r_1)\frac{\rho(r)\,\rho(r_1)}{c^2(r)\,c^2(r_1)}\,rr_1\,[f_1(r)f_1(r_1) + f_2(r)f_2(r_1)]\,dr\,dr_1 -$$

$$-4\pi\gamma i\int_0^a\int_0^a G(r,r_1)\frac{\rho(r)\,\rho(r_1)}{c^2(r)\,c^2(r_1)}\,rr_1\,[f_1(r)f_2(r_1) - f_2(r)f_1(r_1)]\,dr\,dr_1.$$

Функция $G(r,r_1)$ симметрична относительно своих аргументов, поэтому второй двойной интеграл пропадает и, следовательно,

$$\int_0^a \frac{\rho r^2}{c^2} F\bar{f}\, dr = -4\pi\gamma \int_0^a\int_0^a G(r,r_1)\frac{r\rho(r)}{c^2(r)} f_1(r)\frac{r_1\rho(r_1)}{c^2(r_1)} f_1(r_1)\, dr\, dr_1 -$$

$$-4\pi\gamma \int_0^a\int_0^a G(r,r_1)\frac{r\rho(r)}{c^2(r)} f_2(r)\frac{r_1\rho(r_1)}{c^2(r_1)} f_2(r_1)\, dr\, dr_1. \tag{4.12}$$

Получив эту формулу, рассмотрим фундаментальные числа ядра $G(r,r_1)$. Фундаментальные числа этого ядра найдутся как такие числа λ, при которых уравнение

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{4\pi\gamma\rho}{c^2}\Phi = -\lambda\Phi \tag{4.13}$$

имеет отличный от нуля интеграл при условиях:

$$\Phi(0) = 0, \quad (d\Phi / dr)_{r=a} = 0. \tag{4.14}$$

Обозначим через M максимальное значение функции $4\pi\gamma\rho / c^2$ в интервале $(0,a)$ и рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + M\varphi = -\mu\varphi, \tag{4.15}$$

где μ есть постоянное число. Это уравнение имеет при определенных значениях параметра μ отличный от нуля интеграл, удовлетворяющий условиям

$$\varphi(0) = 0, \qquad (d\varphi / dr)_{r=a} = 0. \tag{4.16}$$

Эти значения параметра μ содержатся в формуле:

$$\mu_N = \frac{\pi^2 N^2}{4a^2} - M \quad (N = 1, 3, 5, \ldots).$$

Интеграл рассматриваемого уравнения при взятых граничных условиях имеет вид:

$$\varphi_N(r) = C\sin\frac{\pi N}{2a} r.$$

Рассмотрим наименьшее из фундаментальных чисел μ_N:

$$\mu_1 = \frac{\pi^2}{4a^2} - M. \tag{4.17}$$

Этому числу отвечает фундаментальная функция:

$$\varphi_1(r) = C\sin\frac{\pi r}{2a}.$$

Особо отметим, что в промежутке $(0,a)$ функция $\varphi_1(r)$ имеет только положительные значения.

Составим теперь с помощью уравнений (4.13) и (4.15) следующую комбинацию:

$$\int_0^r \left(\varphi_1\frac{d^2\Phi}{dr^2} - \Phi\frac{d^2\varphi_1}{dr^2}\right) dr = \int_0^r \left[\left(M - \frac{4\pi\gamma\rho}{c^2}\right) + (\mu_1 - \lambda)\right]\Phi\varphi_1 dr.$$

Выполняя интегрирование в правой части и пользуясь граничными условиями (4.14) и (4.16), находим:

$$\varphi_1(r)\frac{d\Phi}{dr} - \Phi(r)\frac{d\varphi_1}{dr} = \int_0^r \left[\left(M - \frac{4\pi\gamma\rho}{c^2}\right) + (\mu_1 - \lambda)\right]\Phi\varphi_1 dr. \tag{4.18}$$

Покажем теперь, что никакое решение уравнения (4.13), обращающееся в нуль при $r=0$, не может обращаться в нуль между 0 и a, если число $\lambda < \mu_1$.

В самом деле, если при некотором значении r_1 переменного r функция $\Phi(r)$ равна нулю, то для этого значения левая часть равенства (4.18) будет отрицательной, так как можно считать, что при r, меньшем r_1, функция $\Phi(r)$ положительна. Но левая часть равенства (4.18) не может быть отрицательной, так как подинтегральная функция правой части во всех точках промежутка интегрирования $(0,r_1)$ положительна в силу определения числа M и неравенства $\lambda < \mu_1$. Итак, во всех точках промежутка $(0,a)$ функция $\Phi(r)$ положительна.

Предположим теперь, что уравнение (4.13) обладает некоторым фундаментальным числом λ_1, меньшим числа μ_1, и допустим, что λ_1 есть самое маленькое в алгебраическом смысле фундаментальное число уравнения (4.13) при граничных условиях (4.14). Пусть $\Phi_1(r)$ будет соответствующей фундаментальной функцией. В силу доказанного выше во всех точках интервала $(0,a)$ функция $\Phi_1(r)$ будет положительной.

Напишем теперь формулу (4.18) для функции $\Phi_1(r)$, беря в качестве верхнего предела число a. Левая часть этой формулы обращается в нуль, и таким образом:

$$\int_0^a \left[\left(M - \frac{4\pi\gamma\rho}{c^2}\right) + (\mu_1 - \lambda_1)\right] \Phi_1 \varphi_1 \, dr = 0.$$

В промежутке интегрирования функции Φ_1 и φ_1 положительны; кроме того, в силу определения числа M и в силу существования предполагаемого неравенства $\lambda_1 < \mu_1$ вся квадратная скобка положительна. Все это показывает, что мы пришли к невозможному результату, и это потому, что мы предположили, что самое маленькое фундаментальное число λ_1 уравнения (4.13) меньше самого маленького фундаментального числа μ_1 уравнения (4.15).

Продолжая сохранять за λ_1 его значение как самого маленького фундаментального числа уравнения (4.13), имеем неравенство:

$$\lambda_1 > \frac{\pi^2}{4a^2} - M.$$

Если удовлетворяется неравенство

$$\frac{\pi^2}{4a^2} > M, \tag{4.19}$$

то все фундаментальные числа уравнения (4.13) положительны и, следовательно, ядро $G(r,r_1)$ положительно в смысле теории интегральных уравнений. Это заключение показывает, что каждый из двойных интегралов формулы (4.12) есть величина положительная. В силу этого имеем:

$$\int_0^a \frac{\rho r^2}{c^2} F\bar{f}\, dr < 0. \tag{4.20}$$

Вернемся теперь к формуле (4.9). Если имеет место неравенство (4.19), то вся квадратная скобка формулы (4.9) положительна и, следовательно, $\sigma^2 = \bar{\sigma}^2$, т. е. число σ^2 действительное. Найдем знак этого числа. С этой целью, умножая обе части уравнения (4.1) на $f(r)$ и интегрируя результат в промежутке $(0, a)$, получим:

$$\left[\rho r^2 f \frac{df}{dr}\right]_0^a - \int_0^a \rho r^2 \left(\frac{df}{dr}\right)^2 dr + \sigma^2 \int_0^a \frac{\rho r^2}{c^2} f^2 \, dr = \sigma^2 \int_0^a \frac{\rho r^2}{c^2} fF \, dr.$$

Преобразуя это соотношение с помощью граничных условий, найдем:

$$\sigma^2 \left\{ \frac{am}{4\pi\gamma} f^2(a) + \int_0^a \frac{\rho r^2}{c^2} f^2 \, dr - \int_0^a \frac{\rho r^2}{c^2} fF \, dr \right\} = \int_0^a \rho r^2 \left(\frac{df}{dr}\right)^2 dr. \tag{4.21}$$

Для данного случая $\bar{f} = f$, следовательно, последний интеграл в фигурных скобках имеет, в силу неравенства (4.20), отрицательное значение. Благодаря этому все выражение в фигурных скобках имеет положительное значение и, следовательно, $\sigma^2 > 0$. Этот результат показывает [см. формулы (2.3)], что если имеет место неравенство (4.19), то колебания газа имеют во времени периодический характер. Таким образом при соблюдении неравенства (4.19) газовая сферическая масса обладает устойчивостью по отношению к радиальным возмущающим колебаниям.

Замечание. Если для данного значения a неравенство (4.19) не соблюдается, то могут представиться два случая: 1) квадратная скобка в формуле (4.9) равна нулю и в этом случае ничего нельзя сказать о числе σ^2; 2) квадратная скобка формулы (4.9) отлична от нуля; тогда, как и выше, $\sigma^2 = \bar{\sigma}^2$ и в зависимости от знака фигурной скобки в формуле (4.21) будем иметь либо устойчивую, либо неустойчивую газовую сферу.

Вернемся теперь к колебаниям общего вида. Хотя в этом случае нам и не удалось провести исследования уравнений колебаний и решить вопрос, при каких условиях числа σ^2 действительны и положительны, тем не менее из предыдущего анализа можно извлечь и для общего случая некоторые следствия. В разделе 3 мы нашли, что если коэффициент γ взять равным нулю, то все числа σ^2 будут положительны и сфера будет устойчива. Наименьшее значение σ^2 отлично здесь от нуля, и поэтому, если мы опять введем коэффициент γ в уравнения колебаний, то наименьшее фундаментальное число σ^2 будет, по всей вероятности, действительным и, если коэффициент γ достаточно мал, положительным. Более же точно число σ^2 будет положительным, если безразмерная величина $4\pi\gamma\,\rho r^2/c^2$ не превосходит некоторого предела ε:

$$4\pi\gamma \frac{\rho r^2}{c^2} < \varepsilon.$$

Это неравенство должно выполняться для всех значений r между 0 и a, следовательно, оно должно иметь место и для того значения r, при котором левая часть получает свое максимальное значение M^*.

Таким образом гравитирующая газовая сфера будет устойчива, если выполняется неравенство $M^* < \varepsilon$. Из этого критерия сейчас же получается менее точный критерий устойчивости:

$$M < \varepsilon / a^2,$$

где число M обозначает максимум функции $4\pi\gamma\rho / c^2$.

Для случая радиальных колебаний мы нашли, что $\varepsilon = \pi^2 / 4$. Отметим, что из неравенства (4.19) отнюдь не следует, что всякая сфера радиуса, меньшего, чем $(\pi / 2)\sqrt{1 / M}$, устойчива при наложении радиальных колебаний. Действительно, величина M сама зависит от a, и можно только утверждать, что при выполнении неравенства (4.19) имеет место устойчивость.

5. Определение размера газового шара по его массе

Определение плотности газового шара, между частицами которого действуют силы Ньютоновского тяготения, зависит от решения уравнения:

$$\frac{p'(\rho)}{\rho}\frac{d\rho}{dr} = -\frac{4\pi\gamma}{r^2}\int_0^r r^2\rho(r)\,dr. \tag{5.1}$$

Уравнение (5.1) может быть приведено к дифференциальному уравнению Эмдена (Emden):

$$\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{p'(\rho)}{\rho}\frac{d\rho}{dr}\right] + 4\pi\gamma r^2\rho(r) = 0. \tag{5.2}$$

Всякий интеграл этого уравнения, имеющий в начале координат конечное значение, удовлетворяет и уравнению (5.1).

Рассмотрим один частный случай, когда уравнение (5.2) может быть проинтегрировано в элементарных функциях. Предположим, что давление и плотность газа подчиняются при своем изменении закону Лапласа:

$$p = k(\rho^2 - \rho_0^2) + p_0,$$

где k есть некоторое постоянное число.

Уравнение (5.2) в этом случае будем линейным:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\rho}{dr}\right) + \varkappa^2 r^2\rho = 0,$$

где

$$\varkappa^2 = 2\pi\gamma / k.$$

Общий интеграл этого уравнения будет:

$$\rho(r) = \frac{A\sin\varkappa r + B\cos\varkappa r}{\varkappa r}.$$

Частное решение, отвечающее требованиям рассматриваемой задачи, имеет вид:

$$\rho(r) = \frac{A\sin\varkappa r}{\varkappa r}.$$

При $r = a$ плотность газа есть ρ_0; это условие определяет константу A, и мы получаем:

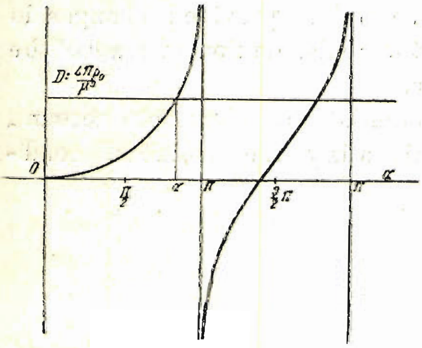
$$\rho(r) = \rho_0 \frac{\varkappa a}{\sin \varkappa a} \frac{\sin \varkappa r}{\varkappa r}.$$

Найдем массу газа D:

$$D = 4\pi \int_0^a r^2 \rho(r)\, dr = 4\pi\rho_0 \frac{1 - \varkappa a \operatorname{ctg} \varkappa a}{\varkappa^3} \varkappa a = \frac{4\pi\rho_0}{\varkappa^3} (1 - \alpha \operatorname{ctg} \alpha)\, \alpha,$$

где $\alpha = \varkappa a$.

На фиг. 1 представлена кривая зависимости массы газа ($\mu = \varkappa$) а более точно — величины $D : (4\pi\rho_0 / \varkappa^3)$ от безразмерного параметра α. Из чертежа видно, что при рассмотрении положительных плотностей каждой массе D отвечает вполне определенный радиус газового шара. Кроме того, как бы велика ни была масса газового шара, его радиус никогда не может стать больше, чем $\pi / \varkappa$. Иными словами, взаимное тяготение частиц газа друг к другу не позволяет иметь, при законе Лапласа, газовых шаров радиуса большего, чем $\sqrt{\pi k / (2\gamma)}$. Это последнее обстоятельство повторяется всякий раз, как только при некотором значении r плотность газа обращается в нуль; например, для законов Роха (Roche), Липшица (Lipschitz), Мориса Леви (Maurice Levy) и др.



Фиг. 1

Найденное предельное значение радиуса шара интересно связывается с установленным выше условием устойчивости (4.19).

Найдем для закона Лапласа число M. Мы имеем:

$$p = k(\rho^2 - \rho_0^2) + p_0, \qquad c^2 = dp / d\rho = 2k\rho, \qquad 4\pi\gamma\rho / c^2 = 2\pi\gamma / k,$$

следовательно,

$$M = 2\pi\gamma / k.$$

Отсюда условие устойчивости (4.19) показывает, что при радиальных колебаниях всякая сфера газа, радиус которой меньше, чем $\frac{1}{2}\sqrt{\pi k / (2\gamma)}$, устойчива. Таким образом всякая сфера газа, радиус которой не превосходит половины наибольшего значения радиусов газовых шаров, устойчива.

Поступила в редакцию 25 X 1939.

Научно-исследовательский
институт механики
Московского университета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jean J. H. Problems of Cosmogony and Stellar Dynamics.
2. Северный А. Б. О гравитационной неустойчивости. ДАН. 1938.

ON THE GRAVITATIONAL OSCILLATIONS OF GASEOUS SPHERES

L. N. SRETTENSKY

(Summary)

The work deals with the question of small oscillations of a spherical mass of gas within the field of its own gravitation.

By employing the methods of the theory of sound and the wave theory, equations of oscillations of the spherical mass of gas relative to its hydrostatic state of equilibrium are established.

A study of the frequency of oscillations leads the author to the conclusion that a gaseous sphere of any radius will be stable, provided changes in the field of Newtonian potential arising from the redistribution of mass of the oscillating gas are not taken into consideration.

If the aforesaid changes of Newtonian potential are taken into account, only those spheres will be stable whose radii satisfy the additional conditions (4.19).