АКАДЕМИЯ НАУК СССР
USSR ACADEMY OF SCIENCES

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ
ЖУРНАЛ „ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА"

INSTITUTE OF MECHANICS
JOURNAL OF APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Т. IV, в. 5—6, 1940

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ И ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА[1]

М. Я. ЛЕОНОВ
(Днепропетровск)

В работе рассматриваются некоторые вопросы, связанные с решением задач теории потенциала для того случая, когда предельное значение гармонической в некотором пространстве функции или ее нормальной производной задается на плоскости или на части плоскости. Полученные результаты применяются к решению задач электростатики, гидромеханики и теории упругости.

1°. Как известно, интеграл

$$U(x,y,z) = \iint\limits_S \frac{\rho(\zeta,\eta)}{r}\, dF \qquad [r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2] \tag{1.1}$$

представляет функцию, гармоническую во всем пространстве, кроме области S плоскости $z=0$. При этом

$$Z\big|_{z=+0} = \begin{cases} -2\pi\rho & \text{в области } S, \\ 0 & \text{вне области } S, \end{cases} \tag{1.2}$$

где $Z = \partial U / \partial z$ — функция, гармоничная в той же области.

Из последнего можно заметить, что U определяется по заданному граничному значению формулой:

$$U = -\frac{1}{2\pi} \lim_{S\to\infty} \frac{\partial}{\partial z} \iint\limits_S \frac{u(\xi,\eta)}{r}\, dF \qquad (z > 0), \tag{1.3}$$

где положено:

$$U(x,y+0) = u(x,y).$$

Ради краткости в дальнейшем будем считать функцию u непрерывной. Согласно предыдущему

$$Z = -\frac{1}{2\pi} \lim_{S\to\infty} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \iint\limits_S \frac{u}{r}\, dF \qquad (z > 0); \tag{1.4}$$

откуда, имея в виду, что интеграл в правой части (1.4) есть функция гармоническая, получим согласно (1.2):

$$\rho = -\frac{1}{4\pi^2} \lim_{S\to\infty} \Delta_{xy} \iint\limits_S \frac{u}{l}\, dF, \tag{1.5}$$

где

$$\Delta_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad l^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2.$$

---

[1] Данная статья является продолжением и развитием нашей работы [1a].

Производные от интегралов в формулах (1.3), (1.5) могут сходиться, в то время как соответствующие интегралы не имеют смысла при $S \to \infty$. Дифференцируя по параметру z под знаком интеграла в (1.3), легко установить, что формула (1.3) сходится, если для достаточно удаленных точек удовлетворяется условие:

$$|u(\xi,\eta)| \leqslant M d^{1-\varepsilon} \qquad (M = \text{const}, \ d^2 = \xi^2 + \eta^2, \ \varepsilon > 0). \tag{1.6}$$

Очевидно, что (1.5) дает решение интегрального уравнения

$$u = \iint\limits_{\infty} \frac{\rho}{l}\, dF, \tag{1.7}$$

если только решение этого уравнения существует. Отметим, что при условии (1.6) интегральное уравнение (1.7) может не иметь решения, так как в результате подстановки (1.5) в (1.7) мы, вообще говоря, не получим сходящегося интеграла. Достаточным условием сходимости (1.7) при подстановке (1.5) является:

$$|u| \leqslant d^{-\varepsilon}, \tag{1.8}$$

на доказательстве чего мы не останавливаемся. Ниже будет показано, что условие (1.8) является достаточным, чтобы уравнение (1.7) имело решение.

2°. Формула (1.5) совместно с (1.2) пока решает только „обратную задачу Неймана“ [2], т. е. определяет граничное значение нормальной производной функции U по ее значению на границе. В случае, если U будет потенциалом простого слоя, то (1.5) является решением уравнения (1.7).

Исходя из общеизвестной формулы

$$U = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\Sigma} \left[U \frac{d\,(1/r)}{dn} - \frac{1}{r} \frac{dU}{dn} \right] dF,$$

где предположено, что на бесконечности $U = 0$, и считая, что поверхность Σ весьма близко охватывает область S, получим:

$$U = -\frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S} \left[\delta U \frac{\partial\,(1/r)}{\partial z} + \delta Z \frac{1}{r} \right] dF, \tag{2.1}$$

где

$$\delta U = U(\xi,\eta,+0) - U(\xi,\eta,-0), \qquad \delta Z = \frac{\partial U}{\partial z}\bigg|_{z=+0} - \frac{\partial U}{\partial z}\bigg|_{z=-0}.$$

Из (2.1) видно, что функция U является потенциалом простого слоя, если она является четной функцией от z, т. е.

$$U(x,y,z) = U(x,y,-z). \tag{2.2}$$

При решении задач теории потенциала для полупространства $z > 0$, вообще говоря, безразлично, как ведет себя функция U по другую сторону плоскости $z = 0$. Отсюда следует, что любую гармоническую в полупространстве $z > 0$ функцию можно представить потенциалом простого слоя, если только интеграл (2.1) сходится при подстановке в него

$$\delta Z = -4\pi\rho, \quad \delta U = 0.$$

Для этого достаточно выполнения одного из условий:

$$|\rho| \leqslant Md^{-1-\varepsilon}, \qquad |u| \leqslant Md^{-\varepsilon}.$$

Обозначая

$$I_S = \Delta_{xy} \iint_S \frac{u}{l}\, dF$$

и интегрируя по частям, можно получить [1]:

$$I_S = \iint_S \frac{\Delta_{\xi\eta} U}{l}\, dF + \int_\sigma \left[\frac{1}{l}\frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{u}{l^2}\cos(\nu l)\right] d\sigma, \tag{2.3}$$

где σ — контур области S, а ν — внутренняя нормаль к контуру σ. Если на бесконечности

$$\operatorname{grad} u = 0, \qquad \frac{u(\xi,\eta)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} = 0, \tag{2.4}$$

то [2]

$$\lim_{S\to\infty} I_S = \iint_\infty \frac{\Delta_{\xi\eta} u}{l}\, dF;$$

откуда следует, что [3]

$$\rho = -\frac{1}{4\pi^2}\iint_\infty \frac{\Delta u}{l}\, dF. \tag{2.5}$$

3°. Обычно в физике представляют окончательный интерес только производные от U, причем U часто определяется с точностью до постоянной. В задачах теории упругости U определяется с точностью до линейной функции, что соответствует определению перемещений с точностью до перемещения твердого тела. Имея в виду последние, рассмотрим интегральное уравнение:

$$v = \iint_\infty \left(\frac{1}{l} + Ax + By + C\right) p(\xi,\eta)\, dF, \tag{3.1}$$

где A, B и C — функции от ξ, η, которые можно определить из „условий закрепления"; так, полагая, что $v = \partial v / \partial x = \partial v / \partial y = 0$ в некоторой точке (a, b), получим:

$$A = \frac{a-\xi}{l_0^3}, \quad B = \frac{b-\eta}{l_0^3}, \quad C = -\frac{1}{l_0} - Aa - Bb, \tag{3.2$_0$}$$

где

$$l_0 = \sqrt{(a-\xi)^2 + (b-\eta)^2}.$$

В большинстве задач можно положить $A = B = C = 0$, что соответствует закреплению бесконечно удаленных точек.

---

[1] Для краткости будем в дальнейшем считать, что функции, входящие в наши формулы, дифференцируемы до необходимых нам производных.

[2] Предполагается, что длина L контура σ удовлетворяет условию

$$L \leq Md_0, \tag{a}$$

где $M = \text{const}$, d_0 — наименьшее расстояние внутренней точки (xy) от контура.

[3] В предельном переходе к неограниченной области интегрирования в (2.5) нужно следить, чтобы условие (а) выполнялось; в противном случае можно получить неверный результат, так как интеграл (2.5) при условии (1.6) не абсолютно (условно) сходящийся.

Полагая

$$\Delta v = \lim_{s\to\infty} \Delta \iint_S \frac{p}{l}\, dF,$$

получим:

$$\Delta v = \iint_\infty \frac{\Delta p}{l}\, dF, \tag{3.2}$$

если только p на бесконечности удовлетворяет условию, аналогичному (2.4).

Мы будем считать, что для удаленных точек

$$|p| \leqslant Md^{1-\varepsilon}, \quad \left|\frac{\partial^2 p}{\partial s^2}\right| \leqslant Md^{-1-\varepsilon}, \tag{3.3}$$

а также

$$|v| \leqslant Md^{2-\varepsilon}, \quad |\Delta v| \leqslant Md^{-\varepsilon}, \quad |\Delta^2 v| \leqslant Md^{-1-\varepsilon}. \tag{3.4}$$

Тогда из (3.2) и (2.5) следует:

$$\Delta p = -\frac{1}{4\pi^2} \iint_\infty \frac{\Delta^2 v}{l}\, dF,$$

или

$$\Delta p = -\frac{\Delta}{4\pi^2} \iint_\infty \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l_0}\right) \Delta v\, dF; \tag{3.5}$$

откуда

$$p = -\frac{1}{4\pi^2} \iint_\infty \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l_0}\right) \Delta v\, dF + v_0, \tag{3.6}$$

где v_0 — некоторая гармоническая во всей бесконечной плоскости xy функция двух переменных, т. е. $\Delta_{xy} v_0 = 0$.

Нетрудно доказать, что в нашей задаче $v_0 = \text{const}$. Это следует из того, что для весьма больших значений x и y интеграл

$$\iint_\infty \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l_0}\right) \Delta v\, dF$$

растет медленнее, чем линейная функция $Ax + By + C$.

Для доказательства можно положить $y = 0$ и произвести замену переменных:

$$\xi = x\xi_1, \quad \eta = x\eta_1. \tag{6}$$

Положив $a = b = 0$, имеем:

$$l_0 = x\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}, \quad l = x\sqrt{(\xi_1 - 1)^2 + \eta_1^2}.$$

Так как интеграл

$$\iint_S \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l_0}\right) \Delta v\, dF$$

для любой конечной области S на бесконечности убывает очень быстро (как $1/l^2$), то для нашей цели можно ограничиться оценкой интеграла:

$$I = \iint_\infty \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l_0}\right) \frac{M}{l_0^\varepsilon}\, d\xi\, d\eta,$$

который при подстановке (б) дает:

$$I=\int\int_{\infty} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{(\xi_1-1)^2+\eta_1^2}}-\frac{1}{\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2}}\right)\frac{Mx^2\,d\xi_1\,d\eta_1}{x^{\varepsilon}\,(\xi_1^2+\eta_1^2)^{\varepsilon/2}}. \tag{в}$$

Интеграл (в) сходится при $0<\varepsilon<1$ и растет на бесконечности как $x^{1-\varepsilon}$ (при $3>\varepsilon>1$ получим тот же результат, взяв в качестве области интегрирования всю бесконечную плоскость, за исключением некоторой области, окружающей начало координат). Из только что доказанного и из формул (3.6) и (3.3) следует, что v_0 в удаленных точках растет медленнее линейной функции и поэтому может быть только постоянной.

Положив в формулах (3.6) и (3.2)

$$\triangle v=-4\pi^2\rho,\quad p=u,$$

можно заметить, что формула (2.5) при условии (1.6) дает решение интегрального уравнения:

$$u=\iint_{\infty}\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{l_0}\right)\rho\,dF. \tag{3.7}$$

4°. Представим функцию U в виде суммы:

$$U=U_1+U_2,$$

где

$$2U_1=U(x,y,z)-U(x,y,-z);\quad 2U_2=U(x,y,z)-U(x,y,-z).$$

Будем называть функцию U_1 четной, а U_2 нечетной. Назовем областью D_S все бесконечное пространство, за исключением точек области S плоскости $z=0$. Из формулы (2.1) для функций U_1 и U_2, гармонических в области D_S, получим:

$$\left.\begin{aligned} U_1&=-\frac{1}{2\pi}\iint_S Z_1\frac{dF}{r},\\ U_2&=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\iint_S U_2\frac{dF}{r}\end{aligned}\right\}\quad (z>0), \tag{4.1}$$

откуда видно, что по существу решение задачи Дирихле сводится к определению U_1, а задачи Неймана к определению U_2. В дальнейшем нас будут интересовать только эти случаи, причем достаточно определить U_1 или U_2 при $z>0$.

Обозначим через G область плоскости $z=0$, внешнюю по отношению к области S. Пусть в области G расположена электропроводящая поверхность. Из условия равновесия электричества в области G можем считать, что $u_G=0$ (значок G или S внизу будет показывать, в какой области определяется та или иная функция). Обозначим через $\Gamma(x,y;\ \xi,\eta)$ значение потенциала в точке $N(x,y,0)$ при наличии единичного заряда в точке $M(\xi,\eta,0)$, причем точки N и M принадлежат области S, вне которой $\Gamma=0$. Из самого определения функции Γ следует, что если в области S задано ρ, а $u_G=0$, то

$$u_S=\iint_S \Gamma\rho\,dF. \tag{4.2}$$

Формула (4.2) представляет решение интегрального уравнения (2.5), когда в области S задано ρ, а в области G $u=0$.

Если функция Γ известна, то можно решить уравнение (1.7), когда ρ задано в области G, а в области S задано Δu. Пусть ρ — функция, непрерывная по всей бесконечной области $S+G$ положим, что $\rho=0$ в области G. Пользуясь аналогией между (1.7) и (2.5), получим:

$$\rho_S = -\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_S \Gamma\, \Delta u_S\, dF. \tag{4.3}$$

Если удастся каким-либо образом решить уравнение (1.7) и если это решение можно привести к виду[1] (4.3), где Γ — функция, симметричная в силу свойств функции Грина, то тем самым можно определить Γ.

Решения задачи Дирихле для области D_G и задачи Неймана для области D_S могут быть сведены к решению смешанной задачи[2], когда задано ρ_S и u_G и требуется определить u_S. После определения u_S функция u будет известна на всей плоскости $z=0$, после чего задача решается формулой (1.3). Нетрудно видеть, что[3]

$$u_S = \iint\limits_S \Gamma\left(\rho_S + \frac{\Delta_{\xi\eta}}{4\pi^2} Lu_G\right) dF, \tag{4.4}$$

где[4]

$$\Delta_{\xi\eta} Lu_G = \lim_{\Sigma\to G} \Delta_{\xi\eta} \iint\limits_G \frac{u(\xi_0,\eta_0)\, dF}{\sqrt{(\xi-\xi_0)^2+(\eta-\eta_0)^2}} \qquad (|u_G| \leqslant M d^{1-\varepsilon}).$$

Из (1.5) и (4.2) следует, что если

$$f_S = \iint\limits_S \Gamma\varphi\, dF,$$

то

$$-\frac{\Delta_{xy}}{4\pi^2} Lf_S = \varphi(x,y), \tag{4.5}$$

когда точка (x,y) принадлежит области S. Формулу (1.5) можно представить в виде:

$$\rho = -\frac{\Delta}{4\pi^2}(Lu_S + Lu_G).$$

Когда точка (x,y) принадлежит области S, то согласно (4.5) мы получим тождество, что и доказывает справедливость формулы (4.4). Ниже будут применены полученные выше результаты к решению конкретных задач.

---

[1] Функция Γ является значением функции Грина для области D_G на плоскости $z=0$.

[2] В задаче Неймана следует взять $-\frac{1}{2\pi}Z$ вместо ρ, причем в области G $U_2=0$ в силу косой симметрии и непрерывности. Аналогично этому в задаче Дирихле $Z_1(x,y,0) = \rho = 0$ в области S.

[3] С добавлением некоторого контурного интеграла (см. примеры).

[4] Функция ΔLu_G неограниченно возрастает при приближении к контуру, как d_0^{-1} (d_0 — расстояние от контура). Мы предполагаем, что Γ достаточно быстро убывает (как $d_0^{-\varepsilon}$) при приближении к контуру (см. формулу 6.2).

5°. Случай задачи с осевой симметрией был частично рассмотрен И. Я. Штаерманом[6] и нами[1a]. Здесь мы рассмотрим эту задачу с более общей точки зрения, представляющей математический интерес.

Пусть область S есть круг радиуса R, а начало координат помещено в центре этого круга. Введем полярные координаты:

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad t^2 = \xi^2 + \eta^2.$$

Обозначая через φ угол между лучами, соединяющими центр круга с точками (x,y) и (ξ,η), имеем:

$$l^2 = (r - t)^2 - 4rt\cos^2\frac{\varphi}{2}, \qquad dF = t\,d\varphi.$$

Если вне заданного круга $\rho = 0$, то из (1.7) следует

$$u(r) = 4\int_0^R K\left(\frac{2\sqrt{rt}}{r+t}\right)\frac{t}{r+t}\rho(t)\,dt, \tag{5.1}$$

где K есть полный эллиптический интеграл первого рода, модуль которого $2\sqrt{rt}\,/\,(r+t)$ всегда меньше единицы. Применяя преобразование Ландена [3

$$\sin(2\psi - \alpha) = \frac{r}{t}\sin\alpha, \qquad 2\psi = \pi - \varphi,$$

получим:

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{1-(r^2/t^2)\sin^2\alpha}} = \frac{2t}{r+t}\,\frac{d\psi}{\sqrt{1-[4rt/(r+t)^2]\sin^2\psi}}; \tag{5.2}$$

отсюда следует:

$$\frac{t}{t+r}K\left(\frac{2\sqrt{rt}}{r+t}\right) = \begin{cases} K(r/t) & \text{при } r/t < 1, \\ (t/r)\,K(r/t) & \text{при } t/r < 1. \end{cases} \tag{5.3}$$

Первое из этих равенств следует непосредственно из (5.2), если заметить, что при $0 < \psi < \pi/2$ переменная α изменяется от нуля до π. Второе равенство (5.3) следует из свойств симметрии ядра уравнения (5.1).

Переходя к полярным координатам (l,α) с полюсом в точке (x,y), получим из (1.7):

$$u = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\rho\,dl\,d\alpha. \tag{5.4}$$

Начало отсчета от угла α возьмем так, что, когда точка (ξ,η) совпадает с центром круга, $\alpha = 0$. При этом из (5.4) получим:

$$u(r) = \int_0^{\pi} d\alpha\; 2\int_{\sin\alpha}^{R}\frac{\rho(t)\,t\,dt}{\sqrt{t^2 - r^2\sin^2\alpha}}. \tag{5.5}$$

Для решения последнего уравнения полезно воспользоваться решением интегрального уравнения типа Абеля:

$$F(x) = \int_a^x \frac{\Phi(t)\,dt}{|x^2 - t^2|^{\lambda}}, \tag{5.6}$$

где a может быть каким угодно действительным числом и $0 < \lambda < 1$.

Решение уравнения (5.6) можно представить в виде [9]:

$$\frac{\pi}{2\sin\lambda\pi}\Phi(x)=k\frac{d}{dx}\int\limits_a^x\frac{F(t)\,t\,dt}{|x^2-t^2|^{1-\lambda}}, \tag{5.7}$$

где [1]

$$k=\begin{cases}+1 & \text{при } a<x,\\ -1 & \text{при } a>x.\end{cases}$$

Если положить $x\sin\alpha=t$, то уравнение (5.6) примет вид:

$$F_1(x)=\int\limits_{\arcsin(a/x)}^{\pi/2}\frac{\Phi(x\sin\alpha)}{\cos^{2\lambda-1}\alpha}\,d\alpha, \tag{5.8$_1$}$$

решение которого дается формулой (5.7), где надо положить:

$$F(t)=t^{1-2\lambda}F_1(t).$$

При $\lambda=1/2$, $a=0$ получаем общеизвестное уравнение Шлемильха.

Пользуясь (5.6), (5.7) и (5.8$_1$), получим из (5.5):

$$\rho=-\frac{1}{\pi^2 r}\frac{d}{dr}\int\limits_r^R\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-r^2}}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x\frac{u(t)\,t\,dt}{\sqrt{x^2-t^2}}. \tag{5.8}$$

Формула (5.8) пригодна для случая разрывных и неограниченных в некоторых точках функций u, причем соответствующее решение надо понимать как предел некоторых непрерывных решений. Введя замену переменных

$$x^2-t^2=\tau,\quad x^2-r^2=s$$

и продифференцировав под знаком интеграла, получим после перехода к первоначальным переменным:

$$\pi^2\rho=\frac{c}{\sqrt{R^2-r^2}}-\int\limits_r^R\frac{dx}{\sqrt{x^2-r^2}}\int\limits_0^x\frac{\Delta u(t)\,t\,dt}{\sqrt{x^2-t^2}}, \tag{5.9}$$

где

$$c=u(0)+R\int\limits_0^{\pi/2}u'(R\sin\alpha)\,d\alpha,\qquad \Delta u(t)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{1}{t}\frac{\partial u}{\partial t},$$

или, изменив порядок интегрирования, получим:

$$\pi^2\rho=\frac{c}{\sqrt{R^2-r^2}}-\int\limits_0^R\Delta u(t)\,t\,dt\int\limits_a^R\frac{dx}{\sqrt{(x^2-r^2)(x^2-t^2)}},$$

где

$$a=\begin{cases}t & \text{при } t>r,\\ r & \text{при } r>t.\end{cases}$$

Обозначая

$$\Gamma_0(r,t)=t\int\limits_t^R\frac{dx}{\sqrt{(x^2-r^2)(x^2-t^2)}}$$

---

[1] Случай $a>x$ в литературе не рассматривается, однако к нему применим общеизвестный метод решения уравнения Абеля при $a<x$.

и положив $\sin\alpha = t/x$, получим[3]:

$$\Gamma_0(r,t) = \int\limits_{\arcsin(t/R)}^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-(r^2/t^2)\sin^2\alpha}} = F\left(\frac{\pi}{2};\frac{r}{t}\right) - F\left(\arcsin\frac{t}{R};\frac{r}{t}\right), \tag{5.10}$$

где F — эллиптический интеграл первого рода, $r < t$.

Определив $\Gamma_0(r,t)$ для $r > t$ формулой

$$\Gamma_0(r,t) = \frac{t}{r}\Gamma_0(t,r),$$

получим согласно (5.9):

$$\pi^2\rho = \frac{c}{\sqrt{R^2-r^2}} - \int\limits_0^R \Gamma_0(r,t)\,\Delta u(t)\,dt. \tag{5.11}$$

Применяя преобразование Ландена, обратное тому, которое делалось при выводе формул (5.3), получим:

$$\Gamma_0(r,t) = \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{t\,d\psi}{\sqrt{(r+t)^2-4rt\sin^2\psi}}, \tag{5.12}$$

где

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{t}{R} + \arcsin\frac{r}{R}\right), \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left|\arcsin\frac{t}{R} - \arcsin\frac{r}{R}\right|,$$

которая справедлива при любом значении t/r.

В физической интерпретации функция $4\pi^2\Gamma_0$ дает потенциал масс, распределенных по окружности радиуса t с интенсивностью, равной единице, в присутствии проводящей поверхности при $r > R$, или осадку на поверхности некоторого полубесконечного тела, точки которой вне круга радиуса R закреплены, а нагрузка распределена по кругу радиуса t.

Формулы (5.1), (5.3), (5.10) и (5.12) могут представить некоторый интерес для теории интегральных уравнений.

6°. Путем переноса центра круга в бесконечность при соответствующем увеличении радиуса R можно получить решение плоской задачи, когда u задана на полупрямой. Для этого положим:

$$x = R - r, \quad s = R - t. \tag{6.1}$$

Обозначая $\Gamma_0(r,t) = \Gamma_1(x,s)$, получим из (5.10):

$$\Gamma_1(x,s) = \int\limits_{\arcsin(t/R)}^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-[(R-x)/(R-s)]^2\sin^2\alpha}};$$

откуда, полагая $\gamma = \pi - \alpha$ и отбрасывая малые высшего порядка, получим при весьма большом R:

$$\Gamma_1(x,\rho) \approx \int\limits_0^{\sqrt{2s/R}} \frac{d\gamma}{\sqrt{2|x-s|/R+\gamma^2}} = \ln\frac{\sqrt{s}+\sqrt{x}}{\sqrt{|x-s|}}. \tag{6.2}$$

Рассмотрим плоскую задачу подробнее для того случая, когда значение гармонической функции $U(x,y)$ задано на отрезке $(-l,l)$ прямой $y=0$. Исходя из формулы (3.7), можно рассматривать плоскую задачу как частный случай пространственной. При этом из формулы (3.7) получим[1]:

$$u(x)=2\int_{-l}^{l}\rho(\xi)\ln\frac{1}{|x-\xi|}d\xi+\text{const}. \tag{6.3}$$

Для весьма удаленных точек функцию U можно представить в виде[2]:

$$U=k\ln\frac{1}{|x^2+y^2|}+\Pi(x,y), \tag{6.4}$$

где Π — функция, ограниченная на бесконечности, причем

$$k=\int_{-l}^{l}\rho(\xi)\,d\xi \tag{6.5}$$

будет считаться величиной заданной. Если

$$U_{y=0}=u(x),$$

то решение уравнения (6.3) будет:

$$\rho=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial U}{\partial y}\bigg|_{y=0}. \tag{6.6}$$

Конформное отображение плоскости $z=x+iy$ с щелью на оси x при $-l<x<l$ на плоскость $z_1=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ с круговым отверстием единичного радиуса определяется формулой:

$$z=\frac{l}{2}\left(z_1+\frac{1}{z_1}\right). \tag{6.7}$$

При этом контурной точке (1,0) плоскости z_1 соответствует точка на прямой $y=0$ с координатой

$$x=l\cos\theta, \tag{6.8}$$

причем

$$|dz/dz_1|=l\sin\theta=\sqrt{l^2-x^2}. \tag{6.9}$$

Пусть

$$U(x,y)=U_0(r,\theta) \tag{6.10}$$

в соответствующих точках, определяемых конформным отображением (6.7); тогда

$$U_0=2k\ln(1/r)+\Pi_1(r,\theta), \tag{6.11}$$

где Π_1 — гармоническая при $r>1$ функция, ограниченная на бесконечности и принимающая при $r=1$ значение

$$\Pi_1(1,\theta)=u(l\cos\theta); \tag{6.12}$$

откуда следует, что Π_1 можно определить интегралом Паусcона:

$$\Pi_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(r^2-1)\,u\,(l\cos\theta)\,d\theta}{1+r^2-2r\cos(\theta-\theta_0)}. \tag{6.13}$$

---

[1] Общее решение уравнения (6.3) дано акад. Н. И. Мусхелишвили[4] в форме комплексных интегралов типа Коши. Ниже будет дано решение через интеграл в действительной области.

[2] Следуя обычным обозначениям, мы, переходя к плоскому случаю, поменяли направления осей y и z.

Подставляя в (6.6)

$$\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=0}=\left.\frac{\partial U_0}{\partial r}\right|\left.\frac{dz_1}{dz}\right|_{r=1},$$

получим

$$\rho=\frac{1}{\sqrt{l^2-x^2}}\left\{\frac{k}{\pi}-\frac{1}{2\pi}\left.\frac{\partial \Pi_1}{\partial r}\right|_{r=1}\right\}. \tag{6.14}$$

В случае, когда $u=\text{const}$, получим согласно теории гармонических функций $\Pi_1=\text{const}$; откуда следует общеизвестное решение для этого случая:

$$\rho=\frac{k}{\pi\sqrt{l^2-x^2}},$$

полученное впервые Садовским [5].

Нетрудно видеть, что если

$$u=ax=al\cos\theta, \tag{6.15}$$

то

$$\Pi_1=(al/r)\cos\theta,$$

для чего стоит только убедиться, что

$$\triangle\Pi_1=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\Pi_1=0.$$

Полагая $k=0$, получим при (6.15):

$$\rho=\frac{ax}{2\pi\sqrt{l^2-x^2}}, \tag{6.16}$$

что по существу решает задачу о давлении на упругую полуплоскость жесткого прямолинейного штампа, нагруженного моментом.

В виду особенности подинтегрального выражения (6.13) дифференцирование соответствующего интеграла в формуле (6.14) по параметру r приводит к расходящимся интегралам.

Интегрируя (6.13) по частям, получим:

$$\Pi_1=u(l)-\int_0^{2\pi}F(r,\theta,\theta_0)\,du(l\cos\theta),$$

где [1]

$$F(r,\theta,\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\theta}\frac{(r^2-1)\,d\theta}{1+r^2-2r\cos(\theta-\theta_0)}=\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{r+1}{r-1}\operatorname{tg}\frac{\theta-\theta_0}{2},$$

причем очевидно, что

$$F(r,0,\theta_0)=0,\qquad F(r,2\pi,\theta_0)=1.$$

Подставляя последнее в (6.14), получим после дифференцирования под знаком интеграла:

$$\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{l^2-x^2}}\left[\frac{k}{\pi}+\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\theta-\theta_0}{2}\,du\,(l\cos\theta)\right], \tag{6.17}$$

---

[1] Подстановка $z=\operatorname{tg}[(\theta-\theta_0)/2]$ приводит интегралы типа (6.13) и (6.17) к элементарным для довольно широкого класса функций, например, для случая, когда u есть произвольная рациональная функция от x и $\sqrt{l^2-x^2}$.

где надо положить

$$\theta_0 = \arc\cos(x \mid l),\ du(l\cos\theta) = u'(l\cos\theta)\, l \sin\theta\, d\theta,$$

и причем берется главное значение интеграла, т. е.

$$\int\limits_0^{2\pi} = \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\int\limits_0^{\theta_0-\varepsilon} + \int\limits_{\theta_0+\varepsilon}^{2\pi}\right].$$

Применяя к (6.17) формулу интегрирования по частям, получим решение в форме (4.3), откуда можно определить функцию Γ и тем самым решить смешанную задачу пункта 4.

Из формулы (6.17) легко получить формулы для расчета фундаментных плит, аналогичные формулам для круглой плиты, данным в работах автора[16], [1в].

7°. Пусть в плоскости x, y расположена заряженная электричеством проводящая бесконечная плоскость, имеющая эллиптическое отверстие, полуоси которого суть a и b. Начало координат будем считать расположенным в центре отверстия. Требуется определить потенциал силы притяжения $\Pi(x,y)$, если поверхностная плотность электричества в бесконечно удаленных точках плоскости $z=0$ равна ρ_0.

Положим:

$$\Pi = V(x,y,z) - 2\pi\rho_0 z,$$

где V — гармоническая функция, равная нулю в бесконечности и на плоскости $z=0$, за исключением области S внутри эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Пользуясь формулой Пуассона, получим:

$$\rho = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial V}{\partial z}\bigg|_{z=+0} + \rho_0.$$

В области S имеем $\rho = 0$, откуда следует:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 2\pi\rho_0. \tag{7.1}$$

Условие (7.1) можно представить в виде:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\iint\limits_S \frac{V(\xi,\eta,0)}{l}\, dF = 4\pi\rho_0. \tag{7.2}$$

Из последнего можно заметить, что условия задачи будут удовлетворены, если мы положим

$$V_S(x,y,0) = A\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \tag{7.3}$$

где A — пока не определенная постоянная. При этом интеграл в правой части уравнения (7.2) можно рассматривать как потенциал бесконечного сплющенного эллипсоида, который вычисляется в эллиптических функциях по формуле[7]:

$$\iint\limits_S \frac{V}{r}\, dF = \frac{\pi a b}{2} A \int\limits_k^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+\psi} - \frac{y^2}{b^2+\psi} - \frac{z^2}{\psi}\right)\frac{d\psi}{\sqrt{(a^2+\psi)(b^2+\psi)\psi}}, \tag{7.4}$$

где k — положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+k} + \frac{y^2}{b^2+k} + \frac{z^2}{k} = 1,$$

причем $k=0$, если точка $(x,y,0)$ принадлежит области S.

Подставляя формулу (7.4) в уравнение (7.2), получим:

$$abA\int_0^\infty\left(\frac{1}{a^2+\psi}+\frac{1}{b^2+\psi}\right)\frac{d\psi}{\sqrt{(a^2-\psi)(b^2+\psi)\psi}}=-4\pi\rho_0, \tag{7.5}$$

откуда определяется постоянная A (интегралы в формулах (7.4) и (7.5) выражаются в эллиптических функциях). Подставляя формулу (7.4) в формулу (1.3), определим функцию $V(x,y,z)$ и П.

Обтекание эллиптической пластинки потенциальным потоком легко получить из предыдущего, приняв за потенциал скоростей функцию

$$\Pi_1=v_{x0}x+yv_{y0}+v_{z0}z+V_1(x,y,z), \tag{7.6}$$

где v_{x0}, v_{y0} и v_{z0} — составляющие скорости по осям x, y и z в бесконечности, а $V(x,y,z)$ при $z>0$ определяется, как показано выше [1], причем следует только произвести замену $2\pi\rho_0$ через $-v_{z0}$. Скорости на поверхности пластинки при $z=+0$ будут:

$$v_x=v_{x0}-\frac{Ax}{\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}},\qquad v_y=v_{y0}-\frac{Ay}{\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}}. \tag{7.7}$$

Отметим еще одно приложение решенной задачи к механике сплошной среды. Пусть требуется определить напряженное состояние упругого однородного и изотропного тела, если в нем имеется малая эллипсоидальная раковина, причем одна из осей эллипсоида, например, в направлении оси z, весьма мала.

Будем считать напряженное поле вдали от раковины однородным и направленным по оси z. Ясно, что поставленную задачу легко свести к случаю, когда внутри рассматриваемой трещины существует гидростатическое давление p, а на бесконечности напряжения отсутствуют.

Вследствие симметрии касательные напряжения в плоскости $z=0$ вне области S будут отсутствовать, что справедливо также по отношению к смещениям по направлению оси z. Для определения нормального перемещения w на поверхности трещины будем исходить из формулы [1a]:

$$p=-\frac{E}{4\pi(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\iint_\infty\frac{w(\xi,\eta,0)}{r}\,dF, \tag{7.8}$$

где E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона.

Решением уравнения (7.8), как было уже показано выше, является:

$$w_S(x,y,0)=B\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}, \tag{7.9}$$

где

$$B=p:ab\frac{E}{4(1-\nu^2)}\int_0^\infty\left(\frac{1}{a^2+\psi}+\frac{1}{b^2+\psi}\right)\frac{d\psi}{\sqrt{(a^2+\psi)(b^2+\psi)\psi}}.$$

Укажем решение задачи теории упругости для полупространства, когда на плоскости $z=0$ отсутствуют касательные напряжения и задано перемещение w. Дифференциальные уравнения равновесия и условия равенства нулю касательных усилий на границе будут удовлетворены, если мы будем искать компоненты упругого перемещения в виде:

[1] Функция V_1 кососимметрична, т. е. $V_1(x,y,-z)=-V_1(x,y,z)$; откуда также следует, что $V_G=0$ в силу ее гармоничности вне области S.

$$u = \varphi_1 - \frac{\nu}{2-2\nu} z \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}, \qquad v = \varphi_2 - \frac{\nu}{2-2\nu} z \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}, \qquad w = \varphi_3 - \frac{\nu}{2-2\nu} z \frac{\partial \varphi_3}{\partial z}, \quad (7.10)$$

где φ_1, φ_2 и φ_3 — гармонические функции, удовлетворяющие уравнениям [8]:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = -\frac{2-3\nu}{2-2\nu} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = -\frac{2-3\nu}{2-2\nu} \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}.$$

Легко заметить, что эти уравнения удовлетворяются, если положить:

$$\varphi_3 = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \qquad \varphi_1 = \frac{2-3\nu}{2-2\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad \varphi_2 = \frac{2-3\nu}{2-2\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \qquad (7.11)$$

Согласно формулам (7.10) и (7.11)

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|_{z=0} = -w(x,y,0),$$

откуда

$$\Phi = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\infty} \frac{w(\xi,\eta,0)}{r} dF.$$

В нашем случае получим:

$$\Phi = \frac{abB}{4} \int_k^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+\psi} - \frac{y^2}{b^2+\psi} - \frac{z^2}{\psi}\right) \frac{d\psi}{\sqrt{(a^2+\psi)(b^2+\psi)\psi}}.$$

В случае плоской задачи ($b \to \infty$) и круга ($a = b$) последний интеграл вычисляется элементарно. Некоторые дополнительные результаты для круговой трещины приведены в нашей статье [1].

Поступила в редакцию 10 I 1940.

ЛИТЕРАТУРА

1. Леонов М. Я. а) К теории расчета упругих оснований. „Приклад. мат. и мех.“ 1939. Т. III. Вып. 2; б) К расчету фундаментных плит. „Приклад. мат. и мех.“ Т. III. Вып. 3; в) журнал „Вестник инженеров и техников“. 1940. № 4.
2. Идельсон Н. Теория потенциала.
3. Сикорский Ю. С. Элементы теории эллиптических функций. ОНТИ. 1936.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые задачи теории упругости. Изд. Акад. Наук. 2-е изд. 1935.
5. Sadovsky M. „Zeitschr. für ang. Math. u. Mech.“ 1928. Bd. 8.
6. Штаерман И. Я. К теории Герца местных деформаций при сжатии упругих тел. ДАН. 1939. № 5.
7. Аппель. Руководство теоретической механики. Т. III.
8. Франк и Мизес. Дифференциальные и интегральные уравнения. ОНТИ. 1937 [Стр. 291].

PROBLEMS AND APPLICATIONS OF THE THEORY OF POTENTIAL

M. J. LEONOV

(Summary)

The work deals with questions arising from problems of the theory of potential for cases in which a function, harmonic in space, or its normal derivative, is given on the plane, or on its part.

The results obtained are applied to the solution of problems in electrostatics, hydrodynamics and the theory of elasticity.