

**МЕТОД КОМПЕНСИРУЮЩИХ НАГРУЗОК В ПРИЛОЖЕНИИ К ЗАДАЧАМ
О РАВНОВЕСИИ, КОЛЕБАНИЯХ И УСТОЙЧИВОСТИ ПЛИТ И МЕМБРАН**

Б. Г. КОРЕНЕВ

(Днепропетровск)

§ 1. В работе излагается метод решения краевых задач, встречающихся в теории плит и мембран, для которых дифференциальные уравнения имеют вид:

$$\Delta w + \rho w = f, \quad \Delta \Delta w \pm \rho w = f, \quad \Delta \Delta w + \rho \Delta w = 0.$$

Будем называть основной функцией влияния решение, удовлетворяющее однородному уравнению:

$$L(w) + \rho w = 0,$$

имеющее особенность, соответствующую сосредоточенной силе, но не удовлетворяющее граничным условиям; это решение можно в ряде случаев интерпретировать как результат действия единичной силы на бесконечную область.

Основное решение, удовлетворяющее неоднородному уравнению, можно представить истокообразно с помощью функции влияния. Для того чтобы удовлетворить граничным условиям, на основное решение накладываем другое, которое будем называть компенсирующим. Это второе решение также представляем истокообразно с помощью основной функции влияния, задавая некоторые особенности вне изучаемой области и подбирая их так, чтобы удовлетворить условиям на контуре.

§ 2. Перейдем к двумерным задачам о равновесии¹. Рассмотрим плиту произвольной формы, лежащую на упругом основании. Дифференциальное уравнение задачи имеет вид:

$$D \Delta \Delta w + k_0 w = q, \tag{2.1}$$

где D — цилиндрическая жесткость, k_0 — коэффициент постели. Пусть $\xi_1 = \xi_1(\theta)$ есть уравнение контура в полярных безразмерных координатах (т. е. все длины умножены на $\lambda = \sqrt[3]{k_0/D}$).

Функцией влияния будет решение для бесконечной плиты, нагруженной единичной сосредоточенной силой; это решение, как известно, имеет вид:

$$K(n, \varphi; \xi, \theta) = \frac{1}{4\lambda^2 D} Z_3(\bar{n}), \tag{2.2}$$

¹ Содержание § 2, необходимое для иллюстрации метода, изложено более подробно в работах автора ^[1] и ^[2].

где

$$\bar{n} = \sqrt{\eta^2 + \zeta^2 - 2\eta\zeta \cos(\theta - \varphi)}$$

расстояние между исследуемой точкой и точкой, где имеется особенность, $Z_3(n) = \operatorname{Re} H_0^{(1)}(\bar{n} \sqrt{i})$ — действительная часть функции Ганкеля первого рода нулевого порядка комплексного аргумента.

Основное решение найдем, интегрируя функцию влияния (2.2). Компенсирующее решение представим истокообразно, задав по некоторым линиям, находящимся вне рассматриваемой области, компенсирующие силы интенсивности q_1 . Зная эти силы, мы определим компенсирующее решение по тем же формулам, по которым определяется основное решение.

Для определения компенсирующей нагрузки необходимо составить интегральные уравнения. Для примера составим уравнения в случае односвязного контура (пластина зажата).

Обозначим через f_1 прогиб точки на контуре, f_2 — угол наклона нормали к контуру, взятые из основного решения. Далее через q_1 — интенсивность компенсирующих сил, $\tau_1 = \tau_1(\varphi)$ — уравнение особой линии, и таким образом

$$\bar{n}_1 = \sqrt{\zeta_1^2 + \tau_1^2 - 2\zeta_1 \tau_1 \cos(\theta - \varphi)}$$

будет расстояние между точкой особой линии и точкой контура.

Уравнения для определения функций q_1 и τ_1 будут иметь вид:

$$\oint q_1 Z_3(n_1) ds = -4\lambda^2 Df_1, \quad (2.3)$$

$$\oint q_1 Z_3'(n_1) \cos \alpha ds = -4\lambda Df_2. \quad (2.4)$$

Здесь α — угол, составленный отрезком \bar{n}_1 и нормалью к контуру. С вычислительной точки зрения удобно, задавшись двумя особыми линиями, найти интенсивности компенсирующих сил q_1 и q_2 по этим линиям.

В этом случае интегральные уравнения примут вид:

$$\oint q_1 Z_3(\bar{n}_1) ds_1 + \oint q_2 Z_3(\bar{n}_2) ds_2 = -4\lambda^2 Df_1, \quad (2.5)$$

$$\oint q_1 Z_3'(\bar{n}_1) \cos \alpha_1 ds_1 + \oint q_2 Z_3'(\bar{n}_2) \cos \alpha_2 ds_2 = -4\lambda Df_2. \quad (2.6)$$

Решение уравнений (2.5) и (2.6) проводилось численно¹, для чего интегральные уравнения заменились системой алгебраических линейных уравнений.

При этом мы получили решения, строго удовлетворяющие дифференциальному уравнению и приближенно граничным условиям.

Замена интегральных уравнений линейными уравнениями производится в результате приближенной замены интеграла суммой; естественно, что коэффициенты и число уравнений будут зависеть от принятого в данной задаче способа приближенного представления интеграла.

¹ См. работу автора [1], где при проведении числовых примеров граничные условия выполнялись в некоторых точках контура.

Отметим, что метод можно распространить и на задачи с различными по длине контура условиями.

Статическая интерпретация компенсирующего решения дает возможность вносить очень полезные упрощения. Нами были проведены вычисления для полубесконечной плиты, защемленной по прямой линии и нагруженной сосредоточенной силой, и квадратной плиты, защемленной по периметру и нагруженной силой в центре^[1]. В обоих случаях удалось легко, путем соответствующего выбора компенсирующего решения, перейти от определения двух нагрузок q_1 и q_2 к определению лишь одной нагрузки q_1 . Вид компенсирующей нагрузки для одного из примеров представлен на фиг. 1.

Заметим, что для круглых плит, принимая за особые линии окружности и разлагая компенсирующую нагрузку в ряд Фурье, мы получим решение в виде ряда; каждый из коэффициентов при этом будет определяться из системы с двумя неизвестными в случае односвязного контура и соответственно с четырьмя неизвестными в случае кругового кольца¹.

В связи с неудовлетворительностью гипотезы Винклера решения рассматриваемых в этом параграфе задач дают лишь приближенную картину работы конструкций, опирающихся на грунт. Для задач, разбиравшихся в § 2,

до настоящего времени существует очень мало решений даже в рамках гипотезы Винклера, поэтому полученные результаты представляют все же практический интерес. С другой стороны, формальное решение плит, находящихся на упругом, в смысле Винклера, основании, имеет значение при исследовании неустановившихся колебательных процессов в свободных плитах.

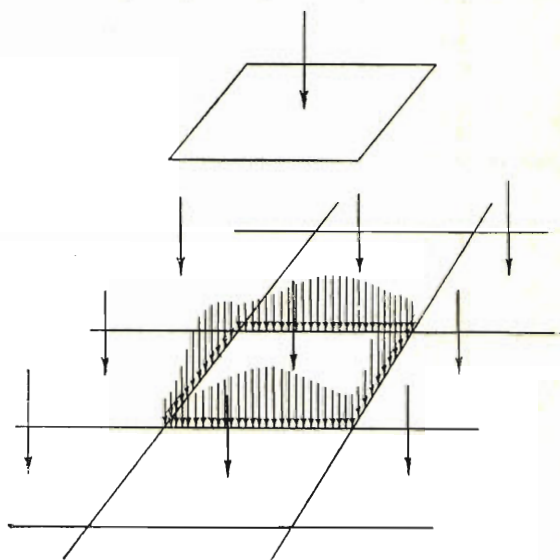
Как известно, применение операционного метода к решению таких задач требует предварительного решения задачи о расчете плиты на упругом основании (см. книгу проф. А. И. Лурье^[3]).

§ 3. Перейдем к задачам на собственные значения. Рассмотрим свободные колебания мембраны постоянной толщины с постоянным натяжением, дифференциальное уравнение которых, как известно, имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u,$$

где $a = \sqrt{T_0/\sigma}$, T_0 — натяжение, σ — поверхностная плотность.

¹ См. работу автора^[2].



Фиг. 1

Представим, как обычно, искомую функцию u в виде:

$$u = w \cos kt.$$

В дальнейшем при изложении задач о колебаниях речь будет идти лишь об определении вида функции w , удовлетворяющей колебательному дифференциальному уравнению:

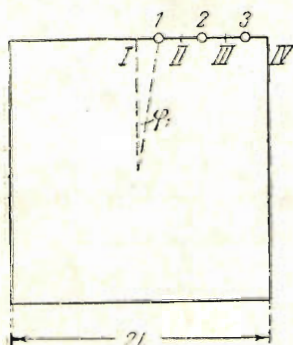
$$\Delta w + \lambda^2 w = 0. \quad (3.1)$$

Функцию w будем называть амплитудной функцией.

Представим амплитудную функцию истокообразно, так же как мы представляли компенсирующее решение в предыдущем параграфе:

$$w = \oint qK(\bar{n}) ds.$$

В рассматриваемом случае функцией влияния будет с точностью до постоянного множителя функция Неймана полевого порядка



Фиг. 2

$$N_0(\bar{n})$$

(здесь, как и всюду, обозначения соответствуют известным таблицам Янке и Емде, откуда взяты и числовые значения бесселевых функций).

Рассмотрим для определенности мембрану, жестко опертую на контур. Собственные значения определяются из интегрального уравнения:

$$\oint qK(\bar{n}_1) ds = 0. \quad (3.2)$$

Найдем частоту колебания для основного тона квадратной мембраны.

Если особой линией будет окружность, а q разложим в ряд Фурье, то решение будет иметь вид:

$$w = A_0 J_0(\eta) + A_4 J_4(\eta) \cos 4\varphi + A_8 J_8(\eta) \cos 8\varphi + \dots \quad (3.3)$$

Здесь использованы условия симметрии.

Найдем приближенное решение, удовлетворяющее условиям в точках 1, 2, 3, показанных на фиг. 2. Тогда собственные значения найдем, вычисляя $a = \lambda L$ из трансцендентного уравнения¹, которое получается, если мы отсечем три первых члена ряда (3.3):

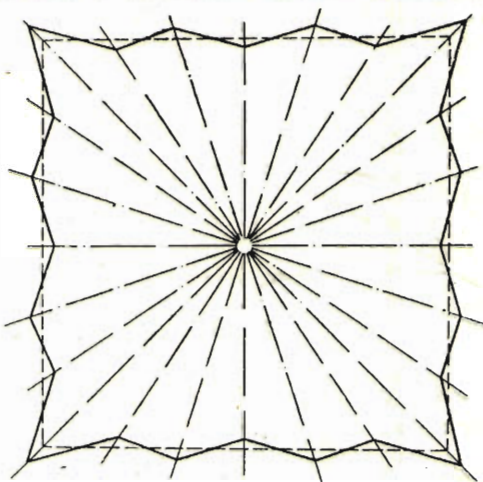
$$\begin{vmatrix} J_0(k_1 a) & J_4(k_1 a) \cos 4\varphi_1 & J_8(k_1 a) \cos 8\varphi_1 \\ J_0(k_2 a) & J_4(k_2 a) \cos 4\varphi_2 & J_8(k_2 a) \cos 8\varphi_2 \\ J_0(k_3 a) & J_4(k_3 a) \cos 4\varphi_3 & J_8(k_3 a) \cos 8\varphi_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.4)$$

¹ Очевидно, что

$$k_1 = \sqrt{1 + (1/6)^2} = \sqrt{37}/6, \quad k_2 = \sqrt{5}/2, \quad k_3 = \sqrt{61}/6;$$

$$\varphi_1 = \arctg k_1 = \arctg(\sqrt{37}/6), \quad \varphi_2 = \arctg(\sqrt{5}/2), \quad \varphi_3 = \arctg(\sqrt{61}/6).$$

Решая полученное уравнение, находим частоту собственных колебаний, которая (в пределах точности расчетов) совпала со строгим решением. При этом узловая линия, которая в соответствии с принятой схемой решения проходит через 24 точки контура мембраны 1, 2, 3..., повидимому, достаточно хорошо налагается на контур. Так, вычисление полярных координат точек I, II, III, IV... узловой линии, расположенных посередине между точками 1, 2, 3..., позволило построить фиг. 3, где разность радиусов-векторов пришлось увеличить в двадцать пять раз для того, чтобы узловая линия и контур не слились на чертеже.



Фиг. 3

Точно такие же вычисления были проведены для мембраны в форме правильного треугольника. Здесь мы также поставили условием, чтобы соответствующая основному тону функция w имела узловую линию, совпадающую в равноудаленных друг от друга точках 1, 2, 3 контура (фиг. 4).

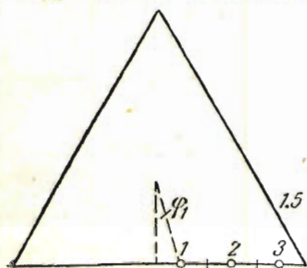
Приближенно решение представляем в виде суммы:

$$w = A_0 J_0(\eta) + A_3 J_3(\eta) \cos 3\varphi + A_6 J_6(\eta) \cos 6\varphi.$$

Частоту найдем из уравнения:

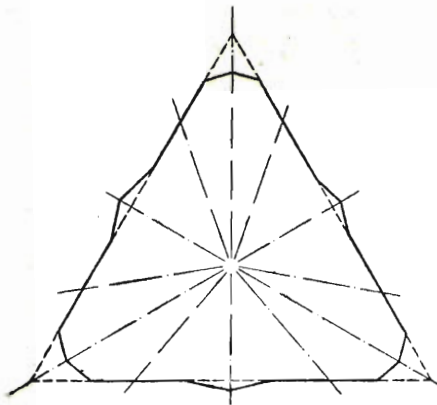
$$\begin{vmatrix} J_0(k_1' a) & J_3(k_1' a) \cos 3\varphi_1' & J_6(k_1' a) \cos 6\varphi_1' \\ J_0(k_2' a) & J_3(k_2' a) \cos 3\varphi_2' & J_6(k_2' a) \cos 6\varphi_2' \\ J_0(k_3' a) & J_3(k_3' a) \cos 3\varphi_3' & J_6(k_3' a) \cos 6\varphi_3' \end{vmatrix} = 0. \quad (3.5)$$

Здесь также коэффициенты k' и углы φ' определяются из геометрических соображений. Частота основного тона, полученная нами, совпала со строгим решением. Узловая линия, соответствующая приближенному решению, приведена на фиг. 5 (следует только отметить, что точки у вершин треугольника соответствуют не корню, а минимуму функции с очень малым значением по сравнению с остальными ординатами, причем разность радиусов-векторов на чертеже у вершин треугольника не увеличена).



Фиг. 4

Заметим, что приближенное решение можно было построить с помощью только лишь функций нулевого порядка, если задать особенности в нескольких точках, находящихся вне рассматриваемой области.



Фиг. 5

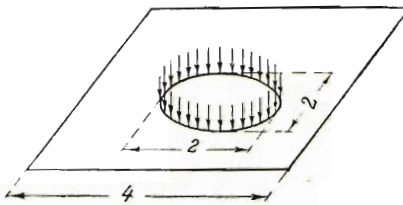
груженных силами интенсивности $q \cos kt$ по окружности радиуса α , как это показано на фиг. 6 и 7.

Основное решение будет иметь вид:

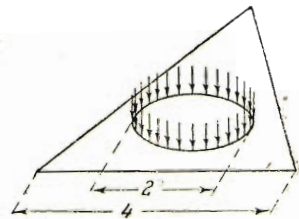
$$w_0 = J_0(\eta) N_0(\alpha) \quad (\eta \leq \alpha), \tag{4.2}$$

$$w_0 = J_0(\alpha) N_0(\eta) \quad (\eta \geq \alpha) \tag{4.3}$$

с точностью до несущественного постоянного множителя.



Фиг. 6



Фиг. 7

Для определения компенсирующего решения, удовлетворяющего граничным условиям в смысле примеров предыдущего параграфа, мы получаем систему линейных алгебраических уравнений (для квадратной мембраны):

$$A_0 J_0(\eta_k) + A_4 J_4(\eta_k) \cos 4\varphi_k + A_8 J_8(\eta_k) \cos 8\varphi_k = -f_k,$$

где индекс $k=1, 2, 3$ соответствует номеру точки контура, в которой удовлетворяются граничные условия.

Результаты вычислений представлены графически на фиг. 8, где показан план в горизонталях для четверти мембраны и на одной из сторон контура приведены значения функции w . Ординаты функции на контуре увеличены в десять раз по сравнению с ординатами внутри контура. Результаты аналогичных вычислений для мембраны в форме равностороннего треугольника представлены на фиг. 9.

§ 5. Перейдем к задаче о поперечных колебаниях плит постоянного сечения.

§ 4. Рассмотрим чисто вынужденные колебания мембраны. В этом случае частота колебаний задана. Интегральное уравнение будет иметь вид:

$$\oint q_1 K(\bar{n}_1) ds = -f_1, \tag{4.1}$$

где f_1 — значение основного решения на контуре.

Так же как и в предыдущем, интегральное уравнение (4.1) заменяется системой линейных уравнений, откуда определяются коэффициенты ряда.

Вычисления были проведены для квадратной и треугольной мембран, за-

Рассмотрим колебания плит, не имеющих промежуточных опор. Для дифференциального уравнения этой задачи

$$\Delta \Delta w - \lambda^4 w = 0, \quad (5.1)$$

где σ — поверхностная плотность, k — частота, а $\lambda = \sqrt[4]{\sigma k^2 / D}$, функция влияния имеет вид:

$$K(\bar{n}) = -\frac{1}{8D\lambda^2} \{N_0(\bar{n}) + iH_0^{(1)}(i\bar{n})\}. \quad (5.2)$$

Будем представлять, как и ранее, искомую функцию w искомо-образно. Особенности представляют силы, меняющиеся по закону $a \sin kt + b \cos kt$, где коэффициенты a и b определяются из начальных условий.

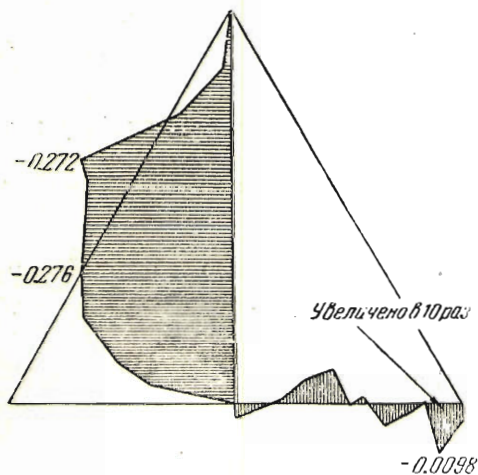
Уравнения для плиты с закатым краем, следуя схеме, принятой при составлении уравнений (2.3) и (2.4), напишутся в виде:

$$\oint q_1 K(\bar{n}_1) ds = 0, \quad \oint q_1 K'(\bar{n}_1) \cos \alpha ds = 0. \quad (5.3)$$

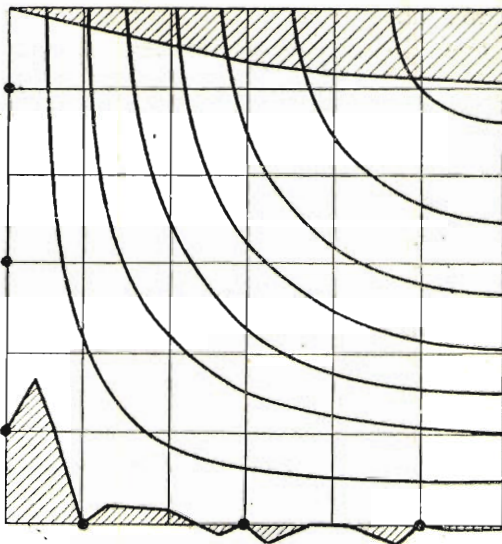
Для упрощения вычислений зададимся двумя особыми линиями, как это было сделано в § 2; уравнения задачи при этом примут вид:

$$\oint q_1 K(\bar{n}_1) ds_1 + \oint q_2 K(\bar{n}_2) ds_2 = 0, \quad (5.4)$$

$$\oint q_1 K'(\bar{n}_1) \cos \alpha_1 ds_1 + \oint q_2 K'(\bar{n}_2) \cos \alpha_2 ds_2 = 0.$$



Фиг. 9



Фиг. 8

§ 6. Задача об определении критической нагрузки для плиты, нагруженной сжимающим гидростатическим давлением p по контуру, как известно, сводится к интегрированию уравнения:

$$D \Delta \Delta w + p \Delta w = 0. \quad (6.1)$$

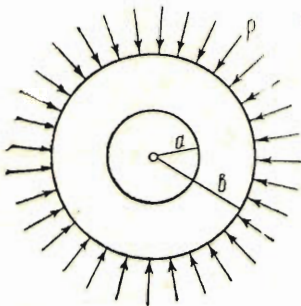
Если край зажат, то в уравнениях (5.3), (5.4) следует положить:

$$K(\bar{n}) = \frac{-1}{4\lambda^2 D} \left\{ N_0(\bar{n}) + \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma \bar{n}} \right\}, \quad (6.2)$$

где $\lambda = \sqrt{p/D}$.

§ 7. В случаях, когда пластина имеет промежуточные опоры точечного или линейного типа, следует задать особенности по этим линиям или в этих

точках. Интенсивность этих особенностей определится из уравнений (алгебраических или интегральных), выражающих отсутствие прогиба в этих опорах.



Фиг. 10

В качестве примера остановимся на задачах об устойчивости круглых плит с опорами.

Рассмотрим устойчивость круглой плиты постоянной толщины, защемленной по контуру и имеющей жесткую concentricкую кольцевую опору (фиг. 10). Будем определять наименьшую критическую силу, рассматривая симметричные относительно центра формы потери устойчивости.

Решение, имеющее особенность при $\eta = \lambda a = \alpha$, соответствующую действию нагрузки, распределенной по окружности, имеет вид:

$$w_0 = J_0(\eta) N_0(\alpha) - \frac{2}{\pi} \ln \alpha \quad (\eta \leq \alpha), \quad (7.1)$$

$$w_0 = J_0(\alpha) N_0(\eta) - \frac{2}{\pi} \ln \eta \quad (\eta \geq \alpha). \quad (7.2)$$

Граничные условия при $\eta = \beta = \lambda b$ имеют вид:

$$w = 0, \quad w' = 0. \quad (7.3)$$

Решение, удовлетворяющее граничным условиям и имеющее заданную особенность, напишем в такой форме:

$$w = w_0 + A_0 + B_0 J_0(\eta). \quad (7.4)$$

Найдем коэффициенты A_0 и B_0 , внося (7.4) в условия (7.3):

$$A_0 = \frac{2}{\pi} \ln \beta + \frac{2 \{J_0(\beta) - J_0(\alpha)\}}{\pi \beta J_1(\beta)}, \quad B_0 = - \frac{J_0(\alpha) N_1(\beta) + 2/(\pi \beta)}{J_1(\beta)}. \quad (7.5)$$

Пользуясь дополнительным условием при $\eta = \alpha$

$$w = 0, \quad (7.6)$$

получим трансцендентное уравнение для определения критической нагрузки:

$$J_0(\alpha) N_0(\alpha) + \frac{2}{\pi} \ln \frac{b}{a} + \frac{[2/(\pi \beta)] \{J_0(\beta) - 2J_0(\alpha)\} - J_0^2(\alpha) N_1(\beta)}{J_1(\beta)} = 0. \quad (7.7)$$

Если положить $\alpha = 0$ в (7.7), то мы перейдем к задаче об устойчивости плиты, имеющей опору в центре и зажатой по контуру, рассмотренной Надаи^[4]; в этом случае уравнение (7.9) совпадает с полученным Надаи.

Приведем значения наименьшего корня уравнения (7.7) для различных отношений a/b :

$a/b = 0.1$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$\beta_k = 6.77$	6.96	6.99	6.86	6.07	5.47	4.95	4.51	4.15	3.83.

Критическая нагрузка p_k определится по формуле:

$$p_k = \beta_k^2 D / b^2. \tag{7.8}$$

§ 8. Рассмотрим устойчивость пластины, имеющей кольцевую промежуточную опору и шарнирно опертую по контуру.

Эта задача отличается от рассмотренной выше лишь одним из граничных условий при $\eta = \beta$; взамен равенства нулю угла поворота на контуре мы должны положить, что интенсивность изгибающих моментов G_1 на контуре равна нулю, т. е. при $\eta = \beta$

$$w = 0, \quad G_1 = -D\lambda^2 \left\{ \nu \Delta w + (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right\} = 0, \tag{8.1}$$

где ν — Пуассоново отношение (в вычислениях принималось равным $1/3$).

Эти условия приводят к таким выражениям для постоянных A_0 и B_0 :

$$\begin{aligned} A_0 &= (2/\pi) \ln \beta - J_0(\alpha) N_0(\beta) - B_0 J_0(\beta), \\ B_0 &= \frac{J_0(\alpha) \{ (1 - \nu) N_1(\beta) - \beta N_0(\beta) \} + 2(1 - \nu) / (\pi\beta)}{\beta J_0(\beta) - (1 - \nu) J_1(\beta)}. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Приравнявая прогиб при $\eta = \alpha$ нулю, получим трансцендентное уравнение:

$$\begin{aligned} &J_0(\alpha) \{ N_0(\alpha) - N_0(\beta) \} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{\beta}{\alpha} + \\ &+ \{ J_0(\alpha) - J_0(\beta) \} \frac{J_0(\alpha) \{ (1 - \nu) N_1(\beta) - \beta N_0(\beta) \} + 2(1 - \nu) / (\pi\beta)}{\beta J_0(\beta) - (1 - \nu) J_1(\beta)} = 0. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Приводим значения наименьшего корня этого уравнения для различных отношений a/b :

$a/b = 0.2$	0.4	0.6	0.8
$\beta_k = 4.79$	5.13	5.18	4.42

§ 9. Перейдем к исследованию устойчивости плит, имеющих точечные опоры, препятствующие вертикальному смещению; реакции в таких опорах приводятся к сосредоточенным силам.

Для дальнейшего существенное значение будет иметь решение задачи о круглой пластине, сжатой радиальным давлением и загруженной реактивной силой $P=1$ в точке A с полярными координатами α, φ .

Рассмотрим пластину с зажатым краем. Решение разобьем на два: основное, имеющее заданную особенность в A , но не удовлетворяющее граничным условиям, и компенсирующее, не имеющее особенностей в рассматриваемой области и, совместно с основным, удовлетворяющее граничным условиям. Мы не будем останавливаться в этой задаче на том обстоятельстве, что компенсирующее решение можно рассматривать как результат действия некоторой специальным образом подобранной нагрузки, приложенной к пластине бесконечных размеров.

Основное решение w_0 должно быть конечным при конечных значениях аргумента и должно иметь особенность, соответствующую силе; это решение имеет вид, как отмечалось выше (§ 6):

$$w_0 = \frac{1}{4\lambda^2 D} \left\{ N_0(\bar{n}) + \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma \bar{n}} \right\}; \quad (9.1)$$

при $\bar{n} \rightarrow 0$

$$2\pi \bar{n} D \lambda^2 \frac{\partial \Delta w_0}{\partial \bar{n}} = P.$$

Для получения компенсирующего решения представим (9.1) в виде ряда по $\cos(\theta - \varphi)$. Это можно сделать, воспользовавшись известной формулой сложения бесселевых функций и аналогичным разложением для логарифма. Тот же результат можно получить, разлагая сосредоточенную силу в ряд:

$$\frac{P\lambda}{\pi\alpha} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n(\theta - \varphi) \right\}.$$

Таким образом получим:

$$w_0 = \frac{P}{4D\lambda^2} \left\{ J_0(\gamma) N_0(\alpha) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(\gamma) N_n(\alpha) \cos n(\theta - \varphi) - \frac{2}{\pi} \ln \alpha + \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{-n} \gamma^n}{n} \cos n(\theta - \varphi) \right\} \quad (\gamma \leq \alpha), \quad (9.2)$$

$$w_0 = \frac{P}{4\lambda^2 D} \left\{ J_0(\alpha) N_0(\gamma) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(\alpha) N_n(\gamma) \cos n(\theta - \varphi) - \frac{2}{\pi} \ln \gamma + \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n \gamma^{-n}}{n} \cos n(\theta - \varphi) \right\} \quad (\gamma \geq \alpha). \quad (9.3)$$

Найдем выражение основного решения на контуре; для этого положим $\gamma = \beta$ в (9.3), где $\beta = \lambda b$ — приведенный радиус контура; тогда

$$w_0(\beta) = \frac{P}{4\lambda^2 D} \left\{ J_0(\alpha) N_0(\beta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(\alpha) N_n(\beta) \cos n(\theta - \varphi) + \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma \beta} + \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n \beta^{-n}}{n} \cos n(\theta - \varphi) \right\}. \quad (9.4)$$

Компенсирующее решение будем искать в виде ряда:

$$w_k = \sum \{ A_n J_n(\gamma) + B_n \gamma^n \} \cos n(\theta - \varphi). \quad (9.5)$$

Решение в такой форме можно получить, задавая особенности по окружности и разлагая их в тригонометрический ряд. Тогда для определения коэффициентов A_n и B_n при $n \neq 0$ будем иметь уравнения:

$$\frac{P}{2\lambda^2 D} \left\{ J_n(\alpha) N_n(\beta) + \frac{\alpha^n}{\pi n \beta^n} \right\} + A_n J_n(\beta) + B_n \beta^n = 0, \quad (9.6)$$

$$\frac{P}{2\lambda^2 D} \left\{ J_n(\alpha) N_n'(\beta) - \frac{\alpha^n}{\pi \beta^{n+1}} \right\} + A_n J_n'(\beta) + B_n n \beta^{n-1} = 0, \quad (9.7)$$

откуда

$$A_n = - \frac{P}{2\lambda^2 D} \frac{J_n(\alpha) N_{n+1}(\beta) + 2\alpha^n / (\pi\beta^{n+1})}{J_{n+1}(\beta)}, \tag{9.8}$$

$$B_n = - \frac{P}{2\lambda^2 D} \frac{2J_n(\alpha) / \pi\beta - J_{n-1}(\beta) \alpha^n / (\pi n\beta^n)}{J_{n+1}(\beta) \beta^n}. \tag{9.9}$$

Таким образом

$$w = w_0 + w_k = \frac{P}{4\lambda^2 D} \left\{ N_0(\bar{n}) + \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma\bar{n}} \right\} + w_k. \tag{9.10}$$

Для круглой плиты, имеющей жесткую точечную опору, критическую нагрузку получим, приравняв прогиб в опоре нулю:

$$w(\alpha, \varphi; \alpha, \varphi) = 0,$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{ A_n J_n(\alpha) + B_n \alpha^n \} = 0. \tag{9.11}$$

§ 10. Положим, что круговая плита, зажатая по контуру и нагруженная радиальными силами, имеет k опор точечного типа. Отбросим опоры, заменяя их действие силами.

Критическую нагрузку следуя С. А. Георшгорину получим, приравняв нулю определитель системы уравнений, выражающих, что перемещения в опорах равны нулю:

$$\begin{vmatrix} w(\alpha_1, \varphi_1; \alpha_1, \varphi_1) & w(\alpha_1, \varphi_1; \alpha_2, \varphi_2) & \dots & w(\alpha_1, \varphi_1; \alpha_k, \varphi_k) \\ w(\alpha_2, \varphi_2; \alpha_1, \varphi_1) & w(\alpha_2, \varphi_2; \alpha_2, \varphi_2) & \dots & w(\alpha_2, \varphi_2; \alpha_k, \varphi_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w(\alpha_k, \varphi_k; \alpha_1, \varphi_1) & w(\alpha_k, \varphi_k; \alpha_2, \varphi_2) & \dots & w(\alpha_k, \varphi_k; \alpha_k, \varphi_k) \end{vmatrix} = 0. \tag{10.1}$$

Функции w определяются по формуле (9.10).

§ 11. Для того чтобы рассмотреть опоры, препятствующие не только смещениям, перпендикулярным срединной плоскости плиты, но и повороту, необходимо сначала получить решение для нагружения бесконечной плиты сосредоточенным моментом. В предыдущем параграфе дано решение для плиты, нагруженной по окружности. Положим, что заданная поперечная нагрузка меняется по закону $q_0 \cos(\theta - \varphi)$. Для внешней части окружности решение имеет вид:

$$w = \frac{q_0 \pi \alpha}{2D\lambda^3} \left\{ J_1(\alpha) N_1(\alpha) + \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\eta} \right\} \cos(\theta - \varphi). \tag{11.1}$$

Главный момент внешней поперечной нагрузки будет:

$$M = \frac{\alpha^2}{\lambda^2} \int_0^{2\pi} q_0 \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi \alpha^2 q_0}{\lambda^2}.$$

Рассмотрев (11.1) при $\alpha \rightarrow 0$, получим искомое решение в виде:

$$w_0 = \frac{M}{2D\lambda} \left\{ \frac{N_1(\eta)}{2} + \frac{1}{\pi\eta} \right\} \cos(\theta - \varphi). \tag{11.2}$$

Разлагая в ряд функцию w_0 и ее нормальную производную на контуре, получим так же, как это делалось выше, компенсирующее решение. Уравнение для определения критической нагрузки будет при этом более сложным; в общем случае определитель будет порядка $3n$, где n — число точечных опор.

Точно так же можно исследовать влияние опор, препятствующих повороту и в задаче о колебаниях и равновесии плит.

Поступила в редакцию 5 XI 1939.
Доложена на Всесоюзном совещании
по строительной механике в Институте
механики Акад. Наук СССР 22—26 ноября 1939 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коренев Б. Г. Приложение функций Грина к расчету конструкций на упругом основании методом компенсирующих нагрузок. 1936. Труды Днепропетровского инженерно-строительного института. 1940. Вып. 29.
2. Коренев Б. Г. Расчет круглых плит на упругом основании. Труды Днепропетровского инженерно-строительного института. 1940. Вып. 29.
3. Лурье А. И. Операционное исчисление в приложениях к задачам механики. 1938.
4. N a d a u. Elastische Platten. 1925.

SOLUTION OF PROBLEMS OF EQUILIBRIUM, OSCILLATION AND STABILITY BY MEANS OF COMPENSATING LOADS

B. G. KORENEV

(Summary)

The work presents a procedure for solving boundary problems of the theory of plates and membranes.

This procedure is based on an efflux representation of the solution, obtained by introducing peculiarities called compensating loads.

In § 2 this procedure is applied to the problem of equilibrium of a plate on the elastic foundation. This problem is reduced to a system of integral equations (2.3)—(2.6) of the first type.

In §§ 3, 4 free and constrained oscillations of membranes are considered. The solutions of these problem are reduced to integral equations (3.2) and (4.1).

In §§ 5—11 problems of stability and oscillation of plates are considered. As an example, the stability of a radially compressed circular plate with supports is examined.